Equazioni

- Le **equazioni** sono relazioni di uguaglianza tra due espressioni algebriche.
- Nelle espressioni compare una lettera, chiamata **incognita**. Possiamo attribuire un valore a questa incognita, e vedere se per quel valore l'equazione diventa un'**identità** (cioè risulta vera: ad esempio $x + 6 = 7$ è un'identità se $x = 1$ perchè diventa $7 = 7$, ma per ogni altro valore che attribuiamo alla x l'equazione è falsa).
- Risolvere un'equazione significa trovare quei valori dell'incognita per cui l'equazione diventa un'identità (e questi valori si chiamano **soluzioni** o **radici**).
- I numeri che si possono attribuire alle lettere di un'equazione, inipendentemente dal fatto che rendano vera o meno l'uguaglianza, costituiscono il suo **dominio** (ad esempio, in presenza di una frazione, i numeri che rendono il denominatore pari a zero vanno esclusi dal dominio perchè dividere per zero non ha senso). Prima di risolvere un'equazione, scriviamo il dominio (le cosidette C.E., ovvero le **Condizioni di Esistenza**) in modo da confrontarlo alla fine con la soluzione ottenuta. Se la soluzione è un valore che cade al di fuori del dominio, essa va scartata.
- A seconda del numero di soluzioni, le equazioni si possono classificare in:
  - **determinate**, se hanno un numero finito di soluzioni;
  $$x - 3 = 0$$
  - **indeterminate**, se hanno infinite soluzioni (qualunque numero è soluzione, rende vera l'equazione);
  $$2x + 4 = 2(x + 2)$$
  - **impossibili**, se non hanno soluzioni.
  $$4x - 1 = 4x + 2$$
- Il **grado** di un'equazione è il massimo grado con cui compare l'incognita.
- Due equazioni si dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.
- Le equazioni si possono classificare in:
  - **numeriche**, se compare solo l'incognita e nessun'altra lettera;
  - **letterali**, se compaiono altre lettere (dette **parametri**).
- Le equazioni si possono classificare in:
  - **intere**, se l'incognita compare solo al numeratore;
  - **fratte**, o **frazionarie**, se l'incognita si trova anche al denominatore.

Teoremi sulle Equazioni

Per risolvere le equazioni ricorreremo ai seguenti teoremi.

E1. **Primo Principio di Equivalenza**

Siano a, b, $c \in \mathbb{R}$. Allora

$$a = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a + c = b + c$$

Ovvero: se a entrambi i membri di un'equazione si aggiunge o si toglie una stessa espressione, l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data.

E1a. **Spostamento di addendi (corollario del Primo P.E.)**

Siano a, b, $c \in \mathbb{R}$. Allora

$$a = b + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad a - c = b$$

E1b. **Legge di Cancellazione (corollario del Primo P.E.)**

Siano a, b, $c \in \mathbb{R}$. Allora

$$a + c = b + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = b$$

E2. **Secondo Principio di Equivalenza**

Siano a, b, $c \in \mathbb{R}$, con $\mathbf{c \neq 0}$. Allora

$$a = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \cdot c = b \cdot c$$

Ovvero: se entrambi i membri di un'equazione vengono moltiplicati o divisi per una stessa espressione ***non nulla****, l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data.*

E2b. **Spostamento di fattori (corollario del Secondo P.E.)**

Siano a, b, $c \in \mathbb{R}$, con $\mathbf{c \neq 0}$. Allora

$$a \cdot c = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = \frac{b}{c}$$

E2b. **Cambiamento di segno (corollario del Secondo P.E.)**

Siano a, b, $c \in \mathbb{R}$. Allora

$$a = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad -a = -b$$

E2c. **Reciproco (corollario del Secondo P.E.)**

Siano a, $b \in \mathbb{R}$, con $\mathbf{a}$, $\mathbf{b \neq 0}$. Allora

$$a = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$$

E3. **Somma membro a membro**

Siano a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a + c = b + d$$

E4. **Elevamento a potenza**

Siano a, $b \in \mathbb{R}$, con $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, e $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$a = b \qquad \Longrightarrow \qquad a^n = b^n$$

*Ovvero: se entrambi i membri di un'equazione sono **positivi o nulli** e vengono elevati ad uno stesso esponente, l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data.*

E5. **Elevamento a potenza (esponente dispari)**

Siano a, $b \in \mathbb{R}$, e $n \in \mathbb{N}$ dispari. Allora

$$a = b \qquad \Longrightarrow \qquad a^n = b^n$$

*Ovvero: se entrambi i membri (di qualunque segno) di un'equazione vengono elevati ad uno stesso esponente **dispari**, l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data.*[1]

E6. **Estrazione di radice**

Siano a, $b \in \mathbb{R}$, con $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, e $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$a = b \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$$

*Ovvero: se entrambi i membri di un'equazione sono **positivi o nulli** e ad essi viene estratta una radice di stesso indice, l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data.*

Attenzione: l'utilizzo di questo teorema, in generale, è sconsigliato. Quando viene estratta una radice di indice pari infatti, può comparire un valore assoluto! Spesso si preferisce quindi ricorrere ad altre tecniche (vedi ad esempio *equazioni pure* ed *equazioni binomie*).

$$x^2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt[2]{x^2} = \sqrt[2]{4} \qquad \Rightarrow \qquad |x| = 2$$

E7. **Estrazione di radice (indice dispari)**

Siano a, $b \in \mathbb{R}$, e $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$a = b \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$$

*Ovvero: se ad entrambi i membri (di qualunque segno) di un'equazione viene estratta una radice di indice **dispari**, l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data.*[2]

[1] Si noti che, se n è pari, in generale il teorema non vale più: infatti le equazioni

$$x = 2 \qquad \text{e} \qquad x^2 = 4$$

non sono equivalenti. La prima ha un'unica soluzione ($x = 2$) mentre la seconda ne ha due ($x_{1,2} = \pm 2$).

[2] Si noti che, se n è pari, in generale il teorema non vale più perchè, essendo a, $b \in \mathbb{R}$, in particolare potrebbero essere negativi e non avrebbe senso considerare una loro radice di indice pari.

1 Equazioni di primo grado

Un'equazione di primo grado nell'incognita x si può ricondurre alla forma:

$$\mathbf{a\,x = b},$$

dove a e b sono numeri reali.

In particolare, è facile vedere che:

- se $a \neq 0$ l'equazione è determinata;
- se $a = 0$ e $b \neq 0$ l'equazione è impossibile:

$$0\,x = b$$

- se $a = 0$ e $b = 0$ l'equazione è indeterminata:

$$0\,x = 0$$

1.1 Equazioni di primo grado intere numeriche

- $\dfrac{x+2}{5} + \dfrac{x-3}{2} - \dfrac{4x-1}{10} = x + \dfrac{2x-1}{2}$

Portare tutte le eventuali frazioni a denominatore comune.

$$\frac{2(x+2)+5(x-3)-(4x-1)}{10} = \frac{10x+5(2x-1)}{10}$$

Moltiplicare entrambi i membri per il denominatore comune (Teo. E2).

$$10 \cdot \frac{2(x+2)+5(x-3)-(4x-1)}{10} = \frac{10x+5(2x-1)}{10} \cdot 10$$

$$2(x+2)+5(x-3)-(4x-1) = 10x+5(2x-1)$$

$$2x+4+5x-15-4x+1 = 10x+10x-5$$

Spostare i termini con x al primo membro, i termini noti al secondo (Teo. E1).

$$2x+5x-4x-10x-10x = -5-4+15-1$$

$$\mathbf{-17x = 5}$$

Dividere entrambi i membri per il coefficiente di x (Teo. E2).

$$\frac{-17x}{-17} = \frac{5}{-17}$$

$$S : x = -\frac{5}{17}$$

1.1.1 Esempio di equazione impossibile

- $\dfrac{2(x-1)}{4} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{1}{2}\,x - 3$

  $\dfrac{6(x-1)+20}{12} = \dfrac{6x-36}{12}$

  $6(x-1)+20 = 6x-36$

  $6x-6+20 = 6x-36$

  $6x-6x = -36+6-20$

  $\mathbf{0x = -50}$

  $S = \emptyset$ eq. impossibile.

1.1.2 Esempio di equazione indeterminata

- $(x+3)^2 - (x+1)^2 = 4(x+2)$

  $x^2+6x+9-(x^2+2x+1) = 4x+8$

  $x^2+6x+9-x^2-2x-1 = 4x+8$

  $6x-2x-4x = 8-9+1$

  $\mathbf{0x = 0}$

  $S = \mathbb{R}$ eq. indeterminata.

1.2 Equazioni di primo grado intere letterali

- $\dfrac{2x}{a-1} = \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{x}{a^2-1}$

  $\dfrac{2x}{a-1} = \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{x}{(a+1)(a-1)}$

Porre le eventuali Condizioni di Esistenza del parametro.

C.E. (parametro) $\begin{cases} a+1 \neq 0 \\ a-1 \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq 1 \end{cases}$ (1)

$\dfrac{2x(a+1)}{(a+1)(a-1)} = \dfrac{a-1+x}{(a+1)(a-1)}$

$2x(a+1) = a-1+x$

$2ax+2x = a-1+x$

$2ax+x = a-1$

$\mathbf{(2a+1)x = a-1}$ (2)

DISCUSSIONE

(1) Discutere le ***C.E. del parametro***: se il parametro non soddisfa le C.E., allora l'equazione **perde significato**.

(1) Se $a = +1 \quad \vee \quad a = -1 \quad \Longrightarrow$ l'equazione perde significato

(2) Discutere la ***divisione finale***: per risolvere l'equazione, all'ultimo passaggio si dovrebbe dividere entrambi i membri per il coefficiente di x. Perchè sia lecito però, è necessario che questo coefficiente sia diverso da 0. Cerchiamo il valore che annulla il coefficiente e sostituiamolo all'equazione. Si possono avere due casi: l'equazione risulta **impossibile** o **indeterminata**.

(2) Se $a = -\dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow$ l'equazione diventa $0x = -\dfrac{3}{2} \quad \Longrightarrow$ eq. impossibile

(3) Discutere che ***soluzione generale*** risulta se non si ricade nei due casi precedenti. risulterebbe **impossibile**.

(3) Se $a \neq +1 \quad \wedge \quad a \neq -1 \quad \wedge \quad a \neq -\dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad S : x = \dfrac{a-1}{2a+1}$

1.2.1 Esempio di equazione con due parametri

- $(ax+b)^2 - (ax-b)^2 = 2b(1+ax)$

  $(ax+b)^2 - (ax-b)^2 = 2b(1+ax)$

  $a^2x^2 + 2abx + b^2 - (a^2x^2 - 2abx + b^2) = 2b + 2abx$

  $a^2x^2 + 2abx + b^2 - a^2x^2 + 2abx - b^2) = 2b + 2abx$

  $4abx = 2b + 2abx$

  $2abx = 2b$

  $\mathbf{abx = b} \qquad ^{(\mathbf{2})}$

DISCUSSIONE

(1) Non ci sono C.E. del parametro: non c'è nulla da discutere in questo punto

(2) Se $a = 0 :\ \Rightarrow$ l'equazione diventa $0\,x = b \quad \Rightarrow$
- se $b = 0 \quad \Rightarrow$ eq. indeterminata
- se $b \neq 0 \quad \Rightarrow$ eq. impossibile

Se $b = 0 :\ \Rightarrow$ l'equazione diventa $0\,x = 0 \quad \Rightarrow$ eq. indeterminata

(3) Se $a \neq 0 \quad \wedge \quad b \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad S : x = \dfrac{b}{ab} = \dfrac{1}{a}$

1.3 Equazioni di primo grado fratte numeriche

- $$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x-2} = \frac{4x-3}{2x^2-5x+2}$$

  $$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x-2} = \frac{4x-3}{(2x-1)(x-2)}$$

Porre le Condizioni di Esistenza dell'incognita.

$$\textbf{C.E.} \qquad \begin{cases} 2x-1 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\frac{3(x-2)-2(2x-1)}{(2x-1)(x-2)} = \frac{4x-3}{(2x-1)(x-2)}$$

$3(x-2)-2(2x-1) = 4x-3$

$3x-6-4x+2 = 4x-3$

$3x-4x-4x = -3+6-2$

$\mathbf{-5x = 1}$

Controllare se la soluzione verifica le C.E.

$S: x = -\dfrac{1}{5}$ sol. acc.

1.3.1 Esempio di equazione impossibile perchè la soluzione non è accettabile

- $$\frac{2(x-1)}{(x^2-4)(x+1)} - \frac{x-3}{(x-2)(x+1)} = -\frac{3+x}{x^2-4}$$

  $$\frac{2(x-1)}{(x-2)(x+2)(x+1)} - \frac{x-3}{(x-2)(x+1)} = -\frac{3+x}{(x-2)(x+2)}$$

$$\textbf{C.E.} \qquad \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\frac{2(x-1)-(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+1)} = -\frac{(3+x)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x+1)}$$

$2(x-1)-(x-3)(x+2) = -(3+x)(x+1)$

$2x-2-(x^2-x-6) = -(x^2+4x+3)$

$2x-2-x^2+x+6 = -x^2-4x-3$

$2x+x+4x = -3+2-6$

$\mathbf{7x = -7}$

$S: x = -1$ sol. non acc. $\Rightarrow$ eq. impossibile.

1.4 Equazioni di primo grado fratte letterali

- $\dfrac{1}{x-2} = 1 + \dfrac{2x}{ax - x - 2a + 2}$

  $\dfrac{1}{x-2} = 1 + \dfrac{2x}{(x-2)(a-1)}$

Porre le eventuali Condizioni di Esistenza del parametro.

C.E. (parametro) $\quad a - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 1 \quad$ **(1)**

Porre le Condizioni di Esistenza dell'incognita.

C.E. $\quad x - 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 2 \quad$ **(3)**

$$\frac{a-1}{(x-2)(a-1)} = \frac{(x-2)(a-1) + 2x}{(x-2)(a-1)}$$

$a - 1 = (x-2)(a-1) + 2x$

$a - 1 = ax - x - 2a + 2 + 2x$

$-ax + x - 2x = -2a + 2 - a + 1$

$-ax - x = -3a + 3$

$\mathbf{(-a-1)x = -3a + 3} \quad$ **(2)**

DISCUSSIONE

(1) Discutere le ***C.E. del parametro***: se il parametro non soddisfa le C.E., allora l'equazione **perde significato**.

(1) Se $\quad a = 1 \quad \Longrightarrow \quad$ l'equazione perde significato

(2) Discutere la ***divisione finale***: per risolvere l'equazione, all'ultimo passaggio si dovrebbe dividere entrambi i membri per il coefficiente di x. Perchè sia lecito però, è necessario che questo coefficiente sia diverso da 0. Cerchiamo il valore che annulla il coefficiente e sostituiamolo all'equazione. Si possono avere due casi: l'equazione risulta **impossibile** o **indeterminata**.

(2) Se $\quad a = -1 \quad \Longrightarrow \quad$ l'equazione diventa $\quad 0x = 6 \quad \Longrightarrow \quad$ eq. impossibile

(3) Effettuare il ***confronto***: potrebbe succedere che, per un certo valore del parametro, la soluzione generica dell'equazione non soddisfi le C.E. (dell'incognita). In tal caso la soluzione non sarebbe accettabile, quindi l'equazione risulterebbe **impossibile**.

(3) Confronto ($x \neq 2$):

$$x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-3a+3}{-a-1} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -3a + 3 = -2a - 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 5$$

Se $\quad a = 5 \quad \Longrightarrow \quad x = 2 \quad \Longrightarrow \quad$ soluzione non accettabile, eq. impossibile

(4) Discutere che ***soluzione generale*** risulta se non si ricade nei due casi precedenti. risulterebbe **impossibile**.

(4) Se $a \neq +1 \quad \wedge \quad a \neq -1 \quad \wedge \quad a \neq 5 \quad \Longrightarrow \quad S : x = \dfrac{-3a+3}{-a-1} = \dfrac{3a-3}{a+1}$

- $\dfrac{1}{x+a} = \dfrac{a-1}{x^2+ax-2x-2a}$

  $\dfrac{1}{x+a} = \dfrac{a-1}{(x+a)(x-2)}$

  C.E. (parametro): non ci sono particolari Condizioni di Esistenza del parametro

  $$\textbf{C.E.} \quad \begin{cases} x+a \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x \neq -a \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$\dfrac{x-2}{(x+a)(x-2)} = \dfrac{a-1}{(x+a)(x-2)}$

$x-2 = a-1$

$\mathbf{x = a+1}$

DISCUSSIONE

(1) Non ci sono C.E. del parametro: non c'è nulla da discutere in questo punto

(2) Il coefficiente di x è sempre diverso da zero: non c'è nulla da discutere in questo punto

(3) Confronto ($x \neq -a$):

$x = -a \quad \Leftrightarrow \quad a+1 = -a \quad \Leftrightarrow \quad 2a = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\dfrac{1}{2}$

Se $a = -\dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = -a \quad \Longrightarrow$ soluzione non accettabile, eq. impossibile

Confronto ($x \neq 2$):

$x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a+1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$

Se $a = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 2 \quad \Longrightarrow$ soluzione non accettabile, eq. impossibile

(4) Se $a \neq -\dfrac{1}{2} \quad \wedge \quad a \neq 1 \quad \Longrightarrow \quad S : x = a+1$

1.5 Equazioni riconducibili al primo grado

Un'equazione riconducibile al primo grado è un'equazione che si può ricondurre alla forma

$$\mathbf{A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_n(x) = 0},$$

dove $A_1(x), A_2(x), \ldots A_n(x)$ sono espressioni polinomiali di primo grado nell'incognita x.

- $x^3 - x = 0$

Scomporre il polinomio fino ad ottenere fattori di primo grado.

$\mathbf{x(x+1)(x-1) = 0}$

Legge di annullamento del prodotto: un prodotto è nullo se e solo se almeno uno dei suoi fattori è nullo.

$x = 0 \quad \vee \quad x + 1 = 0 \quad \vee \quad x - 1 = 0$
$S: \quad x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = -1 \quad \vee \quad x_3 = +1$

- $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

Mediante Teorema di Ruffini:

$p(1) = (1)^3 + 2 \cdot (1)^2 - 5 \cdot (1) - 6 \neq 0$

$p(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = 0 \qquad c = -1$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & +1 & +2 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & -1 & +6 \\ \hline & +1 & +1 & -6 & 0 \end{array}$$

$(x+1)(x^2 + x - 6) = 0$

Mediante Trinomio Particolare:

$$\begin{cases} s = 1 \\ p = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 3 \\ n_2 = -2 \end{cases}$$

$\mathbf{(x+1)(x+3)(x-2) = 0}$

$x + 1 = 0 \quad \vee \quad x + 3 = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0$
$S: \quad x_1 = -1 \quad \vee \quad x_2 = -3 \quad \vee \quad x_3 = +2$

2 Equazioni di secondo grado

Un'equazione di secondo grado nell'incognita x si può ricondurre alla forma:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0},$$

dove a, b e c sono numeri reali, e $a \neq 0$ (altrimenti l'equazione non sarebbe più di secondo grado).

2.1 Equazioni di secondo grado intere numeriche

2.1.1 Equazioni pure (b = 0)

Un'equazione pura si può sempre ricondurre alla forma $\mathbf{x^2 = k}$, e

- se $k \geq 0$ l'equazione ha due soluzioni opposte: $x_{1,2} = \pm\sqrt{k}$;
- se $k < 0$ l'equazione è impossibile.

- $4x^2 - 9 = 0$

Ricondurre alla forma $x^2 = k$.

$4x^2 = 9$

$\mathbf{x^2 = \frac{9}{4}}$

Caso $k > 0 \quad \Rightarrow \quad$ due soluzioni opposte.

$S:\ x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$

- $4x^2 + 9 = 0$

Ricondurre alla forma $x^2 = k$.

$4x^2 = -9$

$\mathbf{x^2 = -\frac{9}{4}}$

Caso $k < 0 \quad \Rightarrow \quad$ nessuna soluzione.

$S = \emptyset \qquad$ eq. impossibile

2.1.2 Equazioni spurie (c = 0)

Un'equazione spuria ha due soluzioni distinte, di cui una uguale a $x_1 = 0$.

- $5x^2 + 3x = 0$

Raccogliere x.

$\mathbf{x(5x + 3) = 0}$

Utilizzare la legge di annullamento del prodotto.

$x = 0 \qquad \vee \qquad 5x + 3 = 0$

$S: \quad x_1 = 0 \qquad \vee \qquad x_2 = -\frac{3}{5}$

2.1.3 Equazioni complete (a,b,c $\neq 0$)

Si dice *determinante* la quantità

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Le soluzioni di un'equazione di secondo grado dipendono dal determinante:

- se $\Delta > 0$ l'equazione ha due soluzioni distinte date da

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

- se $\Delta = 0$ l'equazione ha due soluzioni coindidenti date da[3]

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a};$$

- se $\Delta < 0$ l'equazione è impossibile.

Nel caso in cui b sia pari, è possibile usare una formula ridotta per calcolare le due soluzioni nel caso $\Delta \geq 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta/4}}{a} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - a\,c}}{a} \qquad \text{ove } \beta = \frac{b}{2}.$$

- $\mathbf{2x^2 + -3x - 5 = 0}$

Calcolare il Δ.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49$$

Caso $\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad$ due soluzioni distinte.

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} = \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ \searrow x_2 = -\frac{4}{4} = -1 \end{array}$$

- $\mathbf{4x^2 - 12x + 9 = 0}$

Calcolare il Δ.

$$\frac{\Delta}{4} = (-6)^2 - 4 \cdot 9 = 0$$

Caso $\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad$ due soluzioni coincidenti.

$$x_{1,2} = \frac{-(-12)}{2 \cdot 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{4}$$

- $\mathbf{x^2 - x + 3 = 0}$

Calcolare il Δ.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -11$$

Caso $\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad$ equazione impossibile.

$$S = \emptyset$$

[3] La formula $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$ si ottiene da quella del caso precedente, ponendo $\Delta = 0$.

2.2 Equazioni di secondo grado intere letterali

- $\mathbf{(k-1)\,x^2 - 2(k+2)x + k + 1 = 0}$

DISCUSSIONE

(1) Discutere il caso ***a=0*** (caso in cui l'equazione diventa di primo grado). Sostituire il valore di k nell'equazione.

(1) Se $(k-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1$

L'eq. diventa $-6x + 1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}.$

(2) Se $a \neq 0$ l'equazione è di secondo grado. Calcolarne il ***discriminante***.

(2) Se $k \neq 1$

$$\frac{\Delta}{4} = [-(k+2)]^2 - (k-1)\cdot(k+1) = (k^2+4k+4) - (k^2-1) = 4k+5$$

(2.1) Se $\mathbf{\Delta > 0}$ l'equazione ha due soluzioni distinte.

(2.1) Se $\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad 16k + 20 > 0 \quad \Rightarrow \quad k > -\frac{5}{4}$

$$x_{1,2} = \frac{(k+2) \pm \sqrt{4k+5}}{k-1}$$

(2.2) Se $\mathbf{\Delta = 0}$ l'equazione ha due soluzioni coincidenti. Sostituire il valore di k nella formula.

(2.2) Se $\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad 16k + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{5}{4}$

$$x_{1,2} = \frac{k+2}{k-1} = \frac{-\frac{5}{4}+2}{-\frac{5}{4}-1} = \frac{\frac{-5+8}{4}}{\frac{-5-8}{4}} = \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{13}\right) = -\frac{3}{13}.$$

(2.3) Se $\mathbf{\Delta < 0}$ l'equazione è impossibile.

(2.3) Se $\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad 16k + 20 < 0 \quad \Rightarrow \quad k < -\frac{5}{4}$

eq. impossibile.

RIASSUNTO

Se $k = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}.$

Se $k \neq 1$: Se $k > -\frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{k+2 \pm \sqrt{4k+5}}{k-1}.$

Se $k = -\frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{3}{13}.$

Se $k < -\frac{5}{4} \quad \Rightarrow$ eq. impossibile.

2.2.1 Esempio di equazione in cui il discriminante è un quadrato perfetto

- $\mathbf{x^2 - (k+1)x + k = 0}$

DISCUSSIONE

(1) a è diverso da 0: non c'è niente da discutere in questo punto

(2) $\Delta = (k+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = k^2 + 2k + 1 - 4k = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$

(2.1) Se $\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad (k-1)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad k \neq 1$

$$x_{1,2} = \frac{k+1 \pm \sqrt{(k-1)^2}}{2} = \frac{k+1 \pm (k-1)}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{2k}{2} = k \\ \searrow x_2 = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

(2.2) Se $\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1$

$$x_{1,2} = \frac{k+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

(2.3) Se $\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad$ caso mai verificato

RIASSUNTO

Se $k \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = k \quad \vee \quad x_2 = 1$

Se $k = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = 1$

2.3 Equazioni di secondo grado fratte numeriche

- $\dfrac{x}{x+3} = \dfrac{6}{x-3} - \dfrac{27-x^2}{9-x^2}$

$$\frac{x}{x+3} = \frac{6}{x-3} - \frac{27-x^2}{(3-x)(3+x)}$$

$$\frac{x}{x+3} = \frac{6}{x-3} + \frac{27-x^2}{(x-3)(3+x)}$$

Porre le Condizioni di Esistenza dell'incognita.

$$\textbf{C.E.} \quad \begin{cases} x+3 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x \neq \pm 3$$

$$\frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{6(x+3)+27-x^2}{(x+3)(x-3)}$$

$$x^2 - 3x = 6x + 18 + 27 - x^2$$

$\mathbf{2x^2 - 9x - 45 = 0}$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-45) = 441$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{441}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm 21}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} \\ \searrow x_2 = -\frac{12}{4} = -3 \quad \text{non acc.} \end{cases}$$

Controllare se la soluzione verifica le C.E.

$$S : x = \frac{15}{2}$$

2.4 Equazioni di secondo grado fratte letterali

- $$\frac{x^2 - 3x + kx + 2k}{kx - 2x + k - 2} - \frac{x}{x+1} = \frac{k}{k-2}$$

$$\frac{x^2 - 3x + kx + 2k}{(x+1)(k-2)} - \frac{x}{x+1} = \frac{k}{k-2}$$

Porre le eventuali Condizioni di Esistenza del parametro.

C.E. (parametro) $\quad k - 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 2 \quad$ **(1)**

Porre le Condizioni di Esistenza dell'incognita.

C.E. $\quad x + 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -1 \quad$ **(3)**

$$\frac{x^2 - 3x + kx + 2k - x(k-2)}{(x+1)(k-2)} = \frac{k(x+1)}{(x+1)(k-2)}$$

$$\frac{x^2 - 3x + kx + 2k - kx + 2x)}{(x+1)(k-2)} = \frac{kx + k)}{(x+1)(k-2)}$$

$$x^2 - x - kx + k = 0$$

$$\mathbf{x^2 - (1+k)x + k = 0}$$

DISCUSSIONE

(1) Discutere il caso ***a=0*** (caso in cui l'equazione diventa di primo grado). Sostituire il valore di k nell'equazione.

(1) $\quad a$ è diverso da 0: non c'è niente da discutere in questo punto

(2) Se $a \neq 0$ l'equazione è di secondo grado. Calcolarne il ***discriminante***.

(2) $\quad \Delta = [-(1+k)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 1 + 2k + k^2 - 4x = 1 - 2k + k^2 = (1-k)^2$

(2.1) Se $\underline{\mathbf{\Delta > 0}}$ l'equazione ha due soluzioni distinte. Calcolarle ed effettuare il ***confronto***: potrebbe succedere che, per un certo valore del parametro, una delle soluzioni generiche dell'equazione non soddisfi le C.E. (dell'incognita). In tal caso la soluzione non sarebbe accettabile, quindi l'equazione avrebbe solo una soluzione (l'altra).

(2.1) Se $\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad (1-k)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad k \neq 1$

$$x_{1,2} = \frac{1+k \pm (1-k)}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{1+k+1-k}{2} = 1 \\ \searrow x_2 = \dfrac{1+k-1+k}{2} = k \end{cases}$$

Confronto ($x_{1,2} \neq -1$):

$x_1 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = -1$ caso mai verificato

$x_2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad k = -1$

Se $k = -1 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = -1 \quad \Longrightarrow$ soluzione non accettabile

(2.2) Se $\underline{\mathbf{\Delta = 0}}$ l'equazione ha due soluzioni coincidenti. Sostituire il valore di k nella formula, e controllare che queste soluzioni ***soddisfino le C.E.*** (dell'incognita).

(2.2) Se $\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-k)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1$

$$x_{1,2} = \frac{1+k}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \qquad \text{(sol. acc.)}$$

(2.3) Se $\underline{\mathbf{\Delta < 0}}$ l'equazione è impossibile.

(2.3) Se $\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad (1-k)^2 < 0 \quad \Rightarrow$ caso mai verificato

RIASSUNTO

Se $k = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

Se $k = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = 1$

Se $k \neq -1 \quad \wedge \quad k \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \vee \quad x_2 = k$

2.5 Equazioni riconducibili al secondo grado

Un'equazione riconducibile al primo grado è un'equazione che si può ricondurre alla forma

$$\mathbf{A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_n(x) = 0},$$

dove $A_1(x), A_2(x), \ldots A_n(x)$ sono espressioni polinomiali di primo o di secondo grado nell'incognita x.

- $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = 0$

Scomporre il polinomio fino ad ottenere fattori di primo o secondo grado.

Mediante Teorema di Ruffini:

$p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 3 \cdot (1)^2 - 4 \cdot (1) - 4 \neq 0$

$p(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 4 \neq 0$

$p(2) = (2)^4 + (2)^3 - 3 \cdot (2)^2 - 4 \cdot (2) - 4 = 0 \qquad c = 2$

	+1	+1	-3	-4	-4
2		+2	+6	+6	+4
	+1	+3	+3	+2	0

$(x-2)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) = 0$

Mediante Teorema di Ruffini:

$p(2) = (2)^3 + 3 \cdot (2)^2 + 3 \cdot (2) + 2 \neq 0$

$p(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 2 \neq 0 \qquad c = -2$

	+1	+3	+3	+2
-2		-2	-2	-2
	+1	+1	+1	0

$\mathbf{(x-2)(x+2)(x^2+x+1) = 0}$

Legge di annullamento del prodotto: un prodotto è nullo se e solo se almeno uno dei suoi fattori è nullo.

$x - 2 = 0 \qquad \vee \qquad x + 2 = 0 \qquad \vee \qquad x^2 + x + 1 = 0$

$x_1 = 2 \qquad \vee \qquad x_2 = -2 \qquad \vee \qquad S_3 = \emptyset$

$S : x_{1,2} = \pm 2$

3 Equazioni di grado superiore al secondo

3.1 Equazioni binomie

Un'equazione binomia è un'equazione che si può ricondurre alla forma[4]

$$\mathbf{x^n = k}.$$

- se n è dispari, l'equazione ha una soluzione dello stesso segno di k: $x = \sqrt[n]{k}$;
- se n è pari: se $k \geq 0$, l'equazione ha due soluzioni opposte: $x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{k}$; se $k < 0$, l'equazione è impossibile.

- $27x^3 - 8 = 0$

  $\mathbf{x^3 = \frac{8}{27}}$

  Caso n dispari $\Rightarrow$ si può estrarre la radice a entrambi i membri (Teo. E6).

  $S: \ x = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$

- $27x^3 + 8 = 0$

  $\mathbf{x^3 = -\frac{8}{27}}$

  Caso n dispari $\Rightarrow$ si può estrarre la radice a entrambi i membri (Teo. E6).

  $S: \ x = \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3}$

- $16x^4 - 1 = 0$

  $\mathbf{x^4 = \frac{1}{16}}$

  Caso n pari e $k \geq 0$ $\Rightarrow$ due soluzioni opposte.

  $S: \ x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \pm\frac{1}{2}$

- $16x^4 + 1 = 0$

  $\mathbf{x^4 = -\frac{1}{16}}$

  Caso n pari e $k < 0$ $\Rightarrow$ eq. impossibile.

  $S = \emptyset$

[4] Si noti che se $n = 2$ ci si riconduce al caso particolare delle equazioni pure.

3.2 Equazioni trinomie

Un'equazione biquadratica è un'equazione che si può ricondurre alla forma[5]

$$\mathbf{ax^{2n} + bx^{n} + c = 0}.$$

Si risolve riconducendola ad un'equazione di secondo grado, tramite l'artificio $t = x^n$.

- $\mathbf{x^4 - 4x^2 + 3 = 0}$

Artificio: porre $t = x^n$.

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = (-2)^2 - 1 \cdot 3 = 1$

$t_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{1}}{1} = 2 \pm 1 = \begin{cases} \nearrow t_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \\ \searrow t_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{3,4} = \pm 1 \end{cases}$

$S: \; x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \quad \vee \quad x_{3,4} = \pm 1$

- $\mathbf{x^4 + 4x^2 - 5 = 0}$

$t^2 + 4t - 5 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = (2)^2 - 1 \cdot (-5) = 9$

$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{9}}{1} = -2 \pm 3 = \begin{cases} \nearrow t_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1 \\ \searrow t_2 = -5 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -5 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \emptyset \end{cases}$

$S: \; x_{1,2} = \pm 1$

- $\mathbf{x^6 + 4x^3 - 5 = 0}$

$t^2 + 4t - 5 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = (2)^2 - 1 \cdot (-5) = 9$

$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{9}}{1} = -2 \pm 3 = \begin{cases} \nearrow t_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \\ \searrow t_2 = -5 \quad \Rightarrow \quad x^3 = -5 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\sqrt[3]{5} \end{cases}$

$S: \; x_1 = 1 \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt[3]{5}$

[5]Se $n = 2$ l'equazione si dice biquadratica.

4 Equazioni con valore assoluto

4.1 Banali

Per alcune equazioni in cui compaiono uno o più valori assoluti, è possibile dare la soluzione senza svolgere nessun calcolo, semplicemente a partire da alcune considerazioni sul segno dei termini coinvolti. Si ricordi infatti che la quantità $|A(x)|$, dove $A(x)$ è una qualunque espressione nell'incognita x, è sempre *positiva o nulla*.

- $\overset{+,Z}{|x^3 - 8x + 2|} = \overset{-}{-5}$

  Il primo membro è positivo o nullo, mentre il secondo membro è negativo. Perciò nessun valore di x verifica l'equazione.

  $S = \emptyset$

- $\overset{+,Z}{|x - 2|} = \overset{Z}{0}$

  Il primo membro è positivo o nullo, mentre il secondo membro è nullo. L'equazione è verificata quando il primo membro è nullo, ovvero quando $x = 2$.

  $S:\ x = 2$

- $\overset{+,Z}{|x - 2|} + \overset{+,Z}{|x^2 - 4|} = \overset{Z}{0}$

  Il primo membro è una somma di termini positivi o nulli, mentre il secondo membro è nullo. L'equazione è verificata se tutti gli addendi del primo membro sono nulli, ovvero quando $x = 2$ (infatti il primo addendo si annulla per $x = 2$, e il secondo per $x = \pm 2$).

  $S:\ x = 2$

- $\overset{+,Z}{|x - 2|} + \overset{+,Z}{|x^2 - 1|} = \overset{Z}{0}$

  Il primo membro è una somma di termini positivi o nulli, mentre il secondo membro è nullo. L'equazione è verificata se tutti gli addendi del primo membro sono nulli, ma ciò non succede mai (infatti il primo addendo si annulla per $x = 2$, e il secondo per $x = \pm 1$).

  $S = \emptyset$

4.2 Con scorciatoia

Un'equazione con valore assoluto si può risolvere con la scorciatoia se è nella forma

$$\mathbf{|A(x)| = k \qquad \text{con } k \geq 0},$$

dove $A(x)$ è una qualunque espressione nell'incognita x. In tal caso, per risolvere l'equazione utilizzeremo la seguente proprietà:

$$|A(x)| = k \qquad \Longrightarrow \qquad A(x) = +k \quad \vee \quad A(x) = -k.$$

- $|\mathbf{x+2}| = \mathbf{5}$

Utilizzare la proprietà: $|A(x)| = k \quad \Rightarrow \quad A(x) = +k \quad \vee \quad A(x) = -k.$

$x + 2 = 5 \qquad \vee \qquad x + 2 = -5$

$S: \; x_1 = -3 \quad \vee \quad x_2 = -7$

- $7 - |x^2 - 2| = 0$

$|\mathbf{x^2 - 2}| = \mathbf{7}$

$x^2 - 2 = 7 \qquad \vee \qquad x^2 - 2 = -7$

$x^2 = 9 \qquad \vee \qquad x^2 = -5$

$x_{1,2} = \pm 3 \qquad \vee \qquad S_2 = \emptyset$

$S: \; x_{1,2} = \pm 3$

4.3 Caso generale

Un'equazione con valore assoluto è un'equazione che si può ricondurre alla forma

$$|\mathbf{A(x)}| = \mathbf{B(x)},$$

dove $A(x)$ e $B(x)$ sono due qualunque espressioni nell'incognita x. Per risolvere l'equazione considereremo separatamente il caso in cui l'argomento del valore assoluto $A(x)$ è positivo o nullo, e il caso in cui è negativo. Grazie a questa scelta, in ciascuno di questi casi il valore assoluto potrà essere sostituito rispettivamente con $A(x)$ o con $-A(x)$, secondo la definizione:

$$|A(x)| = \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{rl} A(x) & \text{se } A(x) \geq 0 \\ -\,A(x) & \text{se } A(x) < 0 \end{array}$$

In sintesi, lo schema risolutivo per le equazioni con valore assoluto è:

$$|A(x)| = B(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) = B(x) \end{cases}$$

- $|x - 3| = 2 - 3x$

Dividere in casi, a seconda che $A(x) \geq 0$ o $A(x) < 0$.

Nel primo caso: $|A(x)|$ diventa $A(x)$.
Nel secondo caso: $|A(x)|$ diventa $-A(x)$.

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x - 3 = 2 - 3x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x - 3 < 0 \\ -x + 3 = 2 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ 4x = 5 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 3 \\ 2x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 3 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$S_1 = \emptyset \qquad \vee \qquad x_1 = -\dfrac{1}{2}$

$S: \; x = -\dfrac{1}{2}$

4.3.1 Esempio di equazione con valore assoluto avente argomento di secondo grado

- $2 - |x^2 - 4| = x$

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ 2 - (x^2 - 4) = x \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ 2 + (x^2 - 4) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_1 = 2 \\ \searrow x_2 = -3 \end{matrix} \end{cases} \vee \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_1 = 2 \\ \searrow x_2 = -1 \end{matrix} \end{cases}$$

$S_1 : x = 2 \quad \vee \quad S_2 : x = -1$

$S : \; x_1 = -1 \quad \vee \quad x_2 = 2$

4.4 Equazioni con più valori assoluti

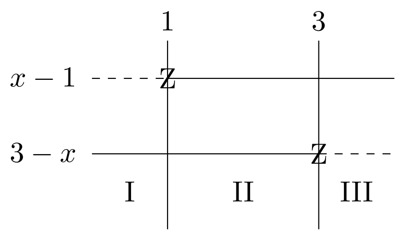
Per risolvere un'equazione con più valori assoluti, si considerano diversi casi a seconda di tutte le possibili variazioni di segno di tutti gli argomenti, in relazione al segno degli altri.

- $|x - 1| - 2x = 3 + |3 - x|$

Disegnare la bussola: la tabella che ci orienta nella divisione dei casi, mostrando il segno di ciascun argomento. Il numero di casi è dato dal numero di diverse combinazioni del segno degli argomenti.

$x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1$

$3 - x > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 3$



$$\begin{cases} x \leq 1 \\ -x + 1 - 2x = 3 + 3 - x \end{cases} \vee \begin{cases} 1 < x \leq 3 \\ x - 1 - 2x = 3 + 3 - x \end{cases} \vee \begin{cases} x > 3 \\ x - 1 - 2x = 3 - 3 + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ -2x = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 < x \leq 3 \\ 0\,x = 7 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 3 \\ -2x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} 1 < x \leq 3 \\ S = \emptyset \end{cases} \vee \begin{cases} x > 3 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

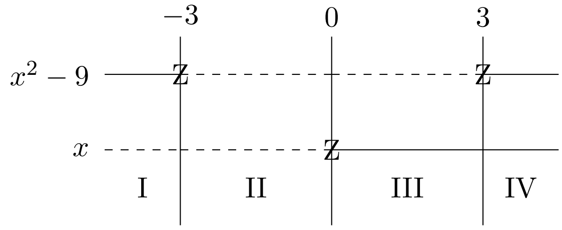
$S_1 : x = -\dfrac{5}{2} \quad \vee \quad S_2 = \emptyset \quad \vee \quad S_3 = \emptyset$

$S : \; x = -\dfrac{5}{2}$

- $|x^2 - 9| + |x| = 9$

$x^2 - 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -3 \ \vee \ x > 3$

$x > 0$



$$\begin{cases} x \leq -3 \\ x^2 - 9 - x = 9 \end{cases} \vee \begin{cases} -3 < x \leq 0 \\ -x^2 + 9 - x = 9 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x \leq 3 \\ -x^2 + 9 + x = 9 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 9 + x = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -3 \\ x^2 - x + 18 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -3 < x \leq 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x \leq 3 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 3 \\ x^2 + x - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -3 \\ S = \emptyset \end{cases} \vee \begin{cases} -3 < x \leq 0 \\ x_1 = 0 \ \vee \ x_2 = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x \leq 3 \\ x_1 = 0 \ \vee \ x_2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 3 \\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{73}}{2} \end{cases}$$

$$S_1 = \emptyset \quad \vee \quad S_2 : x = 0 \quad \vee \quad S_3 : x = 1 \quad \vee \quad S_4 : x = \frac{-1 + \sqrt{73}}{2}$$

$$S: \ x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 1 \quad \vee \quad x_3 = \frac{-1 + \sqrt{73}}{2}$$

4.4.1 Caso particolare

Se l'equazione è nella forma

$$|\mathbf{A}(\mathbf{x})| = |\mathbf{B}(\mathbf{x})|,$$

dove $A(x)$ e $B(x)$ sono due qualunque espressioni nell'incognita x, per risolvere l'equazione è possibile utilizzare la seguente proprietà:

$$|A(x)| = |B(x)| \qquad \Longrightarrow \qquad A(x) = B(x) \quad \vee \quad A(x) = -B(x)$$

- $|x^2 - 2x| - |x| = 0$

  $|\mathbf{x^2} - \mathbf{2x}| = |\mathbf{x} - \mathbf{2}|$

  $x^2 - 2x = x - 2 \qquad \vee \qquad x^2 - 2x = -x + 2$

  $x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad \vee \qquad x^2 - x - 2 = 0$

  $$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_1 = 2 \\ \searrow x_2 = 1 \end{matrix} \qquad \vee \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_1 = 2 \\ \searrow x_2 = -1 \end{matrix}$$

  $S: \ x_1 = -1 \quad \vee \quad x_2 = 1 \quad \vee \quad x_{3,4} = 2$

Albero Genealogico delle Equazioni

Equazioni

Algebriche

- **di primo grado (lineari)**
  - intere
    - numeriche
    - letterali
  - fratte
    - numeriche
    - letterali
  - riconducibili al primo grado
- **di secondo grado**
  - intere
    - numeriche
    - letterali
  - fratte
    - numeriche
    - letterali
  - riconducibili al secondo grado
- **di grado sup. al secondo**
  - binomie
  - trinomie
- **con valore assoluto**
  - banali
  - scorciatoie
  - caso generale
  - con più valori assoluti
- **irrazionali**
  - banali
  - scorciatoie
  - caso generale
  - con più radici

Trascendenti

- **goniometriche**
  - elementari
    - riconducibili
  - particolari
  - lineari
  - omogenee
- **esponenziali**
  - elementari
    - riconducibili
  - non elementari
- **logaritmiche**
  - elementari
    - riconducibili
  - non elementari