Principali Definizioni e Teoremi di Geometria

• **Concetti primitivi**

Un *concetto primitivo* è un termine che non viene definito, come:

- Punto
- Retta
- Piano
- Spazio
- Insieme
- Elemento
- Appartenenza
- Movimento rigido

• **Postulati**

Un *postulato* è un'affermazione riguardante gli enti geometrici e le relazioni tra essi, che viene accettata come vera, senza bisogno di essere dimostrata, come:

- Una retta contiene infiniti punti, un piano contiene infinite rette, lo spazio contiene infiniti piani.
- Per due punti distinti passa una e una sola retta.
- Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.
- Se due punti di una retta appartengono ad un piano, allora tutti i punti di quella retta appartengono a quel piano.
- Tra i punti di una retta si può stabilire una relazione di ordine totale (ossia, dati due punti A e B di una retta: o A e B coincidono, o A precede B, o B precede A).
- Tra due punti di una retta è compreso almeno un terzo punto.

• **Teoremi**

Un *teorema* è un'affermazione (detta *enunciato*) riguardante gli enti geometrici e le relazioni tra essi, che viene giustificata attraverso ragionamenti logici, spesso a partire da postulati, altri teoremi o termini già definiti. Spesso un teorema si presenta nella forma «se è vero A, allora è vero B»:

$$A \Longrightarrow B$$

A si dice *ipotesi* del teorema, B si dice *tesi* del teorema. Il processo deduttivo che porta ad affermare la verità dell'enunciato si dice *dimostrazione* del teorema.

• **Condizione sufficiente e condizione necessaria**

Quando un predicato A implica un predicato B, si scrive:

$$A \Longrightarrow B \qquad \text{oppure} \qquad B \Longleftarrow A$$

e si dice che A è una *condizione sufficiente* per B, mentre B è una *condizione necessaria* per A. Il simbolo $\Longrightarrow$ si legge: «se... allora...».

• **Coimplicazione**

Quando un predicato A implica un predicato B, e anche B implica A, si scrive:

$$A \Longleftrightarrow B$$

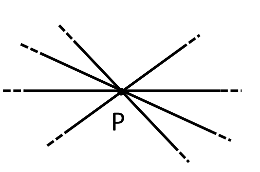
e si dice che A è una *condizione necessaria e sufficiente* per B (e viceversa, B è una condizione necessaria e sufficiente per A). Il simbolo $\Longleftrightarrow$ si legge: «...se e solo se...».

• **Teorema senza nome**

Tra due punti di una retta sono compresi infiniti punti.

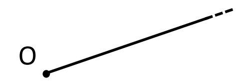
• **Teorema senza nome**

Per un punto passano infinite rette.



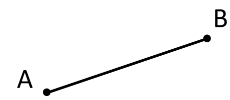
- **Semiretta (definizione)**

  Si dice *semiretta* la figura formata da un punto di una retta (detto *origine*) e da una delle due parti in cui la retta viene divisa da tale punto.



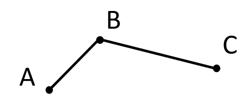
- **Segmento (definizione)**

  Si dice *segmento* la figura formata da due punti di una retta (detti *estremi*) e da tutti i punti della retta compresi tra essi.



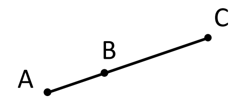
  - **Segmenti consecutivi (definizione)**

    Due segmenti si dicono *consecutivi* quando hanno un estremo e nessun altro punto in comune.



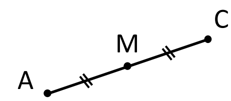
  - **Segmenti adiacenti (definizione)**

    Due segmenti si dicono *adiacenti* quando sono consecutivi e giacciono sulla stessa retta.



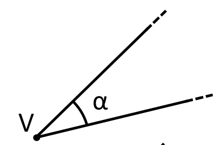
  - **Punto medio di un segmento (definizione)**

    Si dice *punto medio di un segmento* il punto, interno al segmento, che lo divide in due segmenti congruenti.



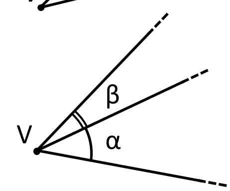
- **Angolo (definizione)**

  Si dice *angolo* ciascuna delle due parti di piano individuate da due semirette (dette *lati*) aventi la stessa origine (detta *vertice*), semirette incluse.



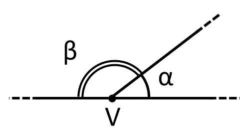
  - **Angoli consecutivi (definizione)**

    Due angoli si dicono *consecutivi* quando hanno il vertice, un lato e nessun altro punto in comune.



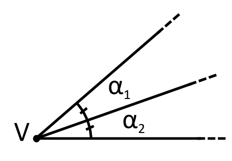
  - **Angoli adiacenti (definizione)**

    Due angoli si dicono *adiacenti* quando sono consecutivi e i lati non in comune appartengono alla stessa retta.



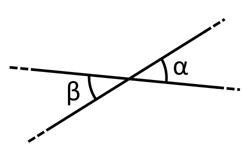
  - **Bisettrice di un angolo (definizione)**

    Si dice *bisettrice* di un angolo la semiretta avente per origine il vertice dell'angolo, interna all'angolo, che lo divide in due angoli congruenti.



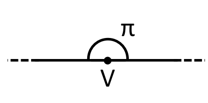
  - **Angoli opposti al vertice (definizione)**

    Due angoli si dicono *opposti al vertice* quando i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

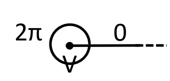


  - **Angolo nullo, retto, piatto e giro (definizione)**

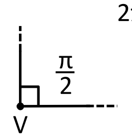
    Si dice angolo *piatto* (e si indica con π) un angolo i cui lati sono uno il prolungamento dell'altro.



    Si dicono angolo *giro* e angolo *nullo* (e si indicano con 2π con 0) gli angoli i cui lati sono coincidenti.



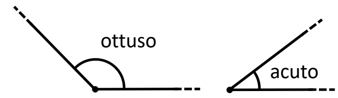
    Si dice angolo *retto* (e si indica con $\pi/2$) la metà di un angolo piatto.



○ Angolo acuto e angolo ottuso (definizione)

Si dice *acuto* un angolo minore di un angolo retto.

Si dice *ottuso* un angolo maggiore di un angolo retto ma minore di un angolo piatto.

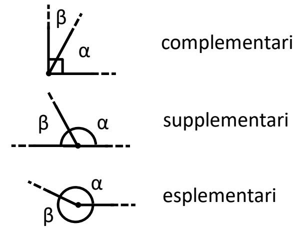


○ Angoli complementari, supplementari ed esplementari (definizione)

Si dicono *complementari* due angoli la cui somma è un angolo retto.

Si dicono *supplementari* due angoli la cui somma è un angolo piatto.

Si dicono *esplementari* due angoli la cui somma è un angolo giro.

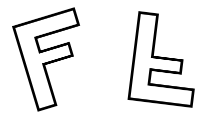


• Figura geometrica (definizione)

Si dice figura geometrica un qualsiasi insieme di punti.

• Congruenza di figure geometriche (definizione)

Due figure si dicono *congruenti* se è possibile sovrapporle mediante un movimento rigido (il concetto di movimento rigido è primitivo).



○ Postulato sulle proprietà della congruenza

La relazione di congruenza gode delle seguenti proprietà.

Proprietà riflessiva. Ogni figura è congruente a se stessa.

$$F_1 \cong F_1$$

Proprietà simmetrica. Se una figura F_1 è congruente ad una figura F_2, allora la figura F_2 è congruente alla figura F_1.

$$F_1 \cong F_2 \;\Rightarrow\; F_2 \cong F_1$$

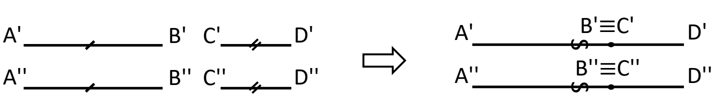
Proprietà transitiva. Se una figura F_1 è congruente ad una figura F_2, e la figura F_2 è congruente ad una figura F_3 , allora F_1 è congruente a F_3.

$$F_1 \cong F_2 \text{ e } F_2 \cong F_3 \Rightarrow F_1 \cong F_3$$

• Postulato della somma (e differenza) di segmenti congruenti

Sommando (o sottraendo) segmenti rispettivamente congruenti, si ottengono segmenti a loro volta congruenti.

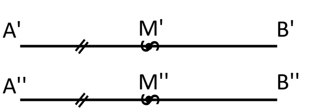
$$\left.\begin{array}{l} A'B' \cong A''B'' \\ C'D' \cong C''D'' \end{array}\right. \Rightarrow \quad A'D' \cong A''D''$$



• Postulato della metà (o doppio) di segmenti congruenti

Le metà (o i doppi) di due segmenti congruenti sono segmenti a loro volta congruenti.

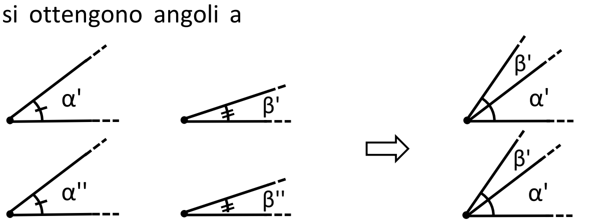
$$A'B' \cong A''B'' \quad \Rightarrow \quad A'M' \cong A''M''$$



• Postulato della somma (e differenza) di angoli congruenti

Sommando (o sottraendo) angoli rispettivamente congruenti, si ottengono angoli a loro volta congruenti.

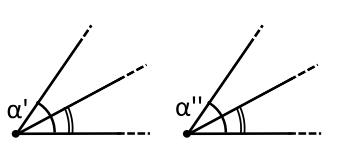
$$\left.\begin{array}{l} \alpha' \cong \alpha'' \\ \beta' \cong \beta'' \end{array}\right. \Rightarrow \quad \alpha' + \beta' \cong \alpha'' + \beta''$$



• Postulato della metà (o doppio) di angoli congruenti

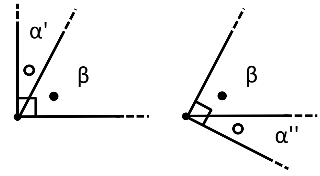
Le metà (o i doppi) di due angoli congruenti sono angoli a loro volta congruenti.

$$\alpha' \cong \alpha'' \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha'}{2} \cong \frac{\alpha''}{2}$$



- **Teorema degli angoli complementari (o supplementari)**

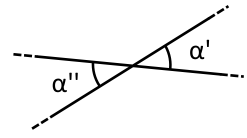
  Se due angoli sono complementari (o supplementari) di uno stesso angolo o di angoli congruenti, allora sono congruenti.



Hp	Th
$\alpha' + \beta \cong \frac{\pi}{2}$	$\alpha' \cong \alpha''$
$\alpha'' + \beta \cong \frac{\pi}{2}$	

- **Teorema degli angoli opposti al vertice**

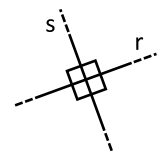
  Se due angoli sono opposti al vertice, allora sono congruenti.



Hp	Th
α' e α'' opp. al vert.	$\alpha' \cong \alpha''$

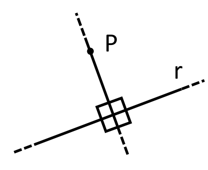
- **Rette perpendicolari (definizione)**

  Due rette si dicono *perpendicolari* se, intersecandosi, formano quattro angoli retti.



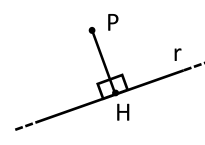
  - **Teorema dell'esistenza e unicità della perpendicolare**

    Dati una retta r e un punto P (appartenente alla retta, o esterno ad essa), esiste un'unica retta perpendicolare ad r e passante per P.



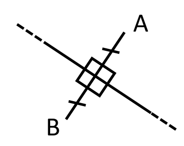
- **Proiezione ortogonale e distanza di un punto da una retta (definizione)**

  Dati una retta r e un punto P, il punto H di intersezione tra r e la retta perpendicolare ad r e passante per P si dice proiezione ortogonale di P su r (o piede della perpendicolare), mentre il segmento PH si dice distanza di P da r.



- **Asse di un segmento (definizione)**

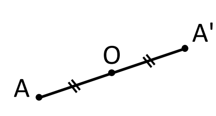
  Si dice *asse di un segmento* la retta che è perpendicolare al segmento e passa per il suo punto medio.

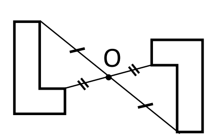


- **Simmetria rispetto ad un punto (definizione)**

  Si dice che due punti A ed A' sono *simmetrici rispetto ad un punto* O (detto *centro di simmetria*) se O è il punto medio del segmento AA'.

  Due figure F ed F' sono simmetriche rispetto ad un punto O se ogni punto di una è il simmetrico dei punti dell'altra rispetto ad O.

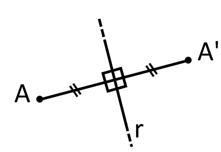


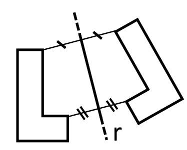


- **Simmetria rispetto ad una retta (definizione)**

  Si dice che due punti A ed A' sono *simmetrici rispetto ad una retta* r (detta *asse di simmetria*) se r è l'asse del segmento AA'.

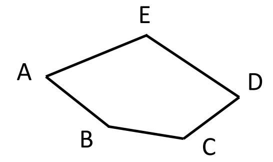
  Due figure F ed F' sono simmetriche rispetto ad una retta r se ogni punto di una è il simmetrico dei punti dell'altra rispetto ad r.





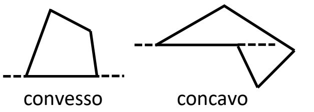
• **Poligono (definizione)**

Si dice *poligono* la figura formata da una poligonale piana chiusa non intrecciata, e dalla parte di piano da essa delimitata.



○ **Poligoni convessi e concavi (definizione)**

Un poligono si dice *convesso* se non contiene alcun prolungamento dei suoi lati, si dice *concavo* altrimenti.



○ **Corda, diagonale, angoli interni ed esterni di un poligono (definizione)**

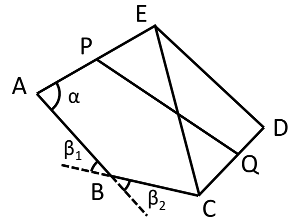
Sia dato un poligono convesso.

Si dice *corda* un segmento che ha gli estremi su due lati distinti del poligono.

Si dice *diagonale* un segmento che ha gli estremi su due vertici non consecutivi del poligono.

Si dice *angolo interno* ogni angolo individuato da una coppia di lati consecutivi.

Si dice *angolo esterno* ciascuno dei due angoli adiacenti ad un angolo interno.



PQ	è una corda
CE	è una diagonale
α	è un angolo interno
β_1 e β_2	sono angoli esterni

• **Triangolo (definizione)**

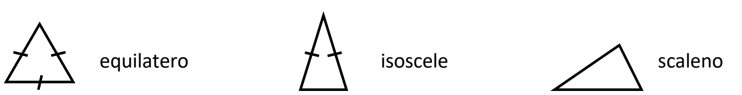
Si dice *triangolo* un poligono con tre lati.

○ **Triangolo equilatero, isoscele e scaleno (definizione)**

Un triangolo si dice *equilatero* se ha tre lati congruenti.

Un triangolo si dice *isoscele* se ha due lati congruenti.

Un triangolo si dice *scaleno* se nessun lato è congruente ad un altro.

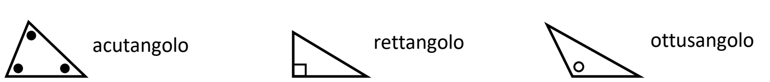


○ **Triangolo acutangolo, rettangolo e ottusangolo (definizione)**

Un triangolo si dice *acutangolo* se ha tre angoli acuti.

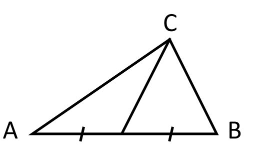
Un triangolo si dice *rettangolo* se ha un angolo retto.

Un triangolo si dice *ottusangolo* se ha un angolo ottuso.



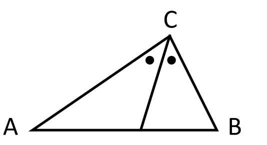
• **Mediana di un triangolo (definizione)**

In un triangolo ABC, si dice *mediana relativa al lato AB* il segmento che ha per estremi il punto medio di AB e il vertice C opposto a quel lato.



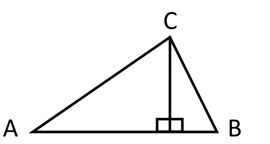
• **Bisettrice di un triangolo (definizione)**

In un triangolo ABC, si dice *bisettrice relativa al vertice C* il segmento che divide a metà l'angolo di vertice C e congiunge C con il lato opposto.

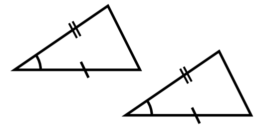


• **Altezza di un triangolo (definizione)**

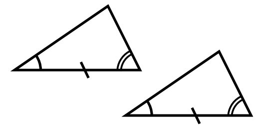
In un triangolo ABC, si dice *altezza relativa al lato AB* il segmento perpendicolare al lato AB che congiunge il vertice C con AB, o con il suo prolungamento.



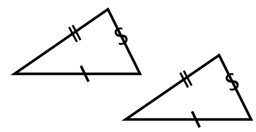
- **Primo criterio di congruenza dei triangoli (LAL)**
  Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso, allora sono congruenti.



- **Secondo criterio di congruenza dei triangoli (ALA)**
  Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti un lato e i due angoli ad esso adiacenti, allora sono congruenti.

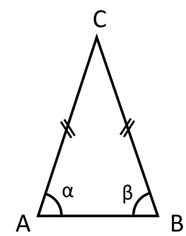


- **Terzo criterio di congruenza dei triangoli (LLL)**
  Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti i tre lati, allora sono congruenti.



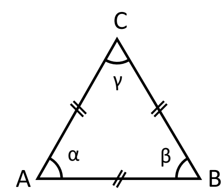
- **Teorema del triangolo isoscele**
  Un triangolo è isoscele se e solo se i suoi due angoli alla base sono congruenti.

	<u>Hp</u>	<u>Th</u>
(⇒)	$AC \cong BC$	$\alpha \cong \beta$
(⇐)	$\alpha \cong \beta$	$AC \cong BC$

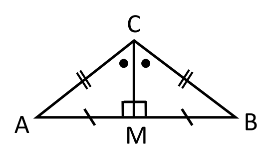


- **Teorema del triangolo equilatero**
  Un triangolo è equilatero se e solo se i suoi tre angoli sono congruenti.

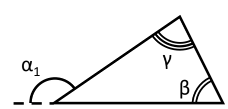
	<u>Hp</u>	<u>Th</u>
(⇒)	$AB \cong BC \cong CA$	$\alpha \cong \beta \cong \gamma$
(⇐)	$\alpha \cong \beta \cong \gamma$	$AB \cong BC \cong CA$



- **Teorema dell'altezza, mediana e bisettrice di un triangolo isoscele**
  In un triangolo isoscele l'altezza, la mediana e la bisettrice coincidono.

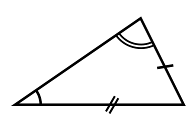


- **Primo teorema dell'angolo esterno di un triangolo**
  In un triangolo ogni angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti ad esso.



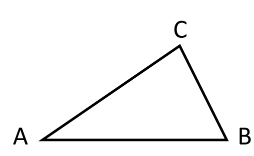
  - **Primo corollario**
    In un triangolo la somma di due angoli è minore di un angolo piatto.
  - **Secondo corollario**
    In un triangolo non vi può essere più di un angolo retto o ottuso.

- **Teorema del lato e dell'angolo maggiore**
  In un triangolo, al lato maggiore è opposto l'angolo maggiore, e viceversa.



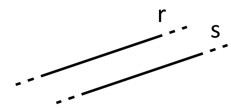
- **Disuguaglianza triangolare**
  In un triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due.
  In un triangolo, ciascun lato è maggiore della differenza degli altri due.

AB < BC + CA	AB > CA - BC
BC < CA + AB	BC > AB - CA
CA < AB + BC	CA > AB - BC



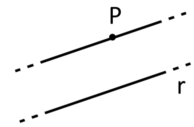
- **Rette parallele (definizione)**

  Due rette si dicono *parallele* se non hanno nessun punto in comune, oppure se coincidono.



  - **Postulato dell'esistenza e unicità della parallela (5° postulato di Euclide)**

    Dati una retta r e un punto P esterno ad essa, esiste un'unica retta parallela ad r e passante per P.

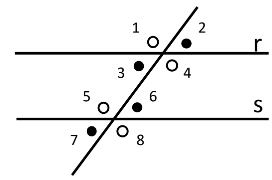


- **Teorema delle rette parallele tagliate da una trasversale**

  Due rette parallele tagliate da una trasversale individuano:
  - coppie di angoli alterni (interni ed esterni) congruenti;
  - coppie di angoli corrispondenti congruenti;
  - coppie di angoli coniugati (interni ed esterni) supplementari.

  Viceversa, se due rette tagliate da una trasversale formano almeno una delle seguenti:
  - coppie di angoli alterni (interni ed esterni) congruenti;
  - coppie di angoli corrispondenti congruenti;
  - coppie di angoli coniugati (interni ed esterni) supplementari;

  allora sono parallele.



alterni interni $\left[\begin{array}{l} 3 \cong 6 \\ 4 \cong 5 \end{array}\right.$ (*)

alterni esterni $\left[\begin{array}{l} 1 \cong 8 \\ 2 \cong 7 \end{array}\right.$

corrispondenti $\left[\begin{array}{l} 1 \cong 5 \\ 2 \cong 6 \\ 3 \cong 7 \\ 4 \cong 8 \end{array}\right.$

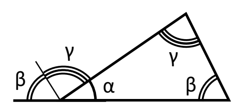
coniugati interni $\left[\begin{array}{l} 3+5 \cong \pi \\ 4+6 \cong \pi \end{array}\right.$

coniugati esterni $\left[\begin{array}{l} 1+7 \cong \pi \\ 2+8 \cong \pi \end{array}\right.$

	Hp	Th
(⇒)	$r \,//\, s$	Vedi (*)
(⇐)	Almeno una di (*)	$r \,//\, s$

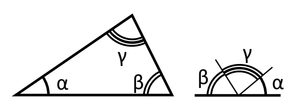
- **Secondo teorema dell'angolo esterno di un triangolo**

  In un triangolo ogni angolo esterno è congruente alla somma degli angoli interni non adiacenti ad esso.



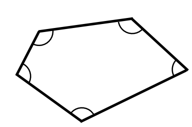
  - **Primo corollario**

    In un triangolo la somma degli angoli interni è un angolo piatto.



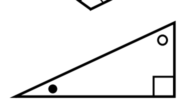
  - **Secondo corollario**

    In un poligono di n lati la somma degli angoli interni è $(n-2)\,\pi$.



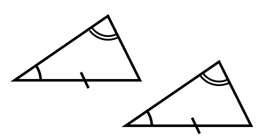
  - **Terzo corollario**

    In un triangolo gli angoli acuti sono complementari.



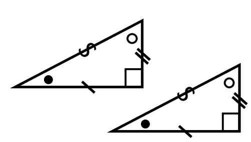
- **Secondo criterio di congruenza dei triangoli (ALA generalizzato)**

  Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti un lato e due angoli (qualunque), allora sono congruenti.



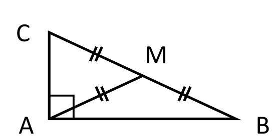
- **Criterio di congruenza dei triangoli rettangoli**

  Se due triangoli rettangoli hanno ordinatamente congruenti (oltre all'angolo retto) almeno un lato ed un altro elemento (altro angolo o altro lato), allora sono congruenti.



- **Teorema della mediana del triangolo rettangolo**

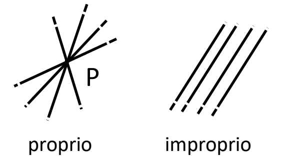
  In un triangolo rettangolo, la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.



- **Fascio di rette proprio (definizione)**

  Un *fascio di rette proprio* è l'insieme di tutte le rette che passano per un dato punto P.

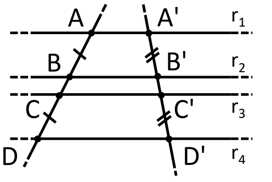
  Un *fascio di rette improprio* è l'insieme di tutte le rette parallele ad una data.



- **Corrispondenza di Talete**

  Dato un fascio di rette improprio tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti individuati sulla prima trasversale corrispondono segmenti congruenti sulla seconda trasversale.

  Viceversa, date due trasversali tagliate da rette che individuano segmenti su di esse, se a segmenti congruenti sulla prima trasversale corrispondono segmenti congruenti sulla seconda trasversale, allora le rette sono parallele.

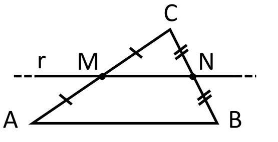


	Hp	Th
(⇒)	$r_1 \,//\, r_2 \,//\, r_3 \,//\, r_4$ $AB \cong CD$	$A'B' \cong C'D'$
(⇐)	$AB \cong CD$ $A'B' \cong C'D'$	$r_1 \,//\, r_2 \,//\, r_3 \,//\, r_4$

- **Teorema della parallela ad un lato di un triangolo**

  Se in un triangolo si traccia la parallela ad un lato, passante per il punto medio di un secondo lato, allora questa interseca il terzo lato nel suo punto medio.

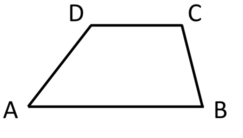
  Viceversa, se in un triangolo si traccia la retta congiungente i punti medi di due lati, allora questa è parallela al terzo lato.



	Hp	Th
(⇒)	$r \,//\, AB$ $AM \cong MC$	$BN \cong NC$
(⇐)	$AM \cong MC$ $BN \cong NC$	$r \,//\, AB$

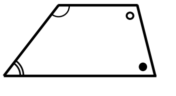
- **Trapezio (definizione)**

  Si dice *trapezio* un quadrilatero avente due soli lati paralleli, detti *basi*. Gli altri due lati si dicono *lati obliqui*.



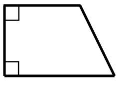
  - **Proprietà degli angoli di un trapezio**

    In un trapezio, gli angoli adiacenti ai lati obliqui sono supplementari.



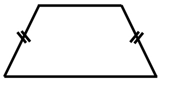
  - **Trapezio rettangolo (definizione)**

    Un trapezio si dice *rettangolo* se un lato obliquo è perpendicolare alle basi.



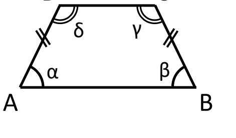
  - **Trapezio isoscele (definizione)**

    Un trapezio si dice isoscele se i suoi lati obliqui sono congruenti.



- **Teorema del trapezio isoscele**

  Un trapezio è isoscele se e solo se gli angoli adiacenti alle basi sono congruenti.



	Hp	Th
(⇒)	$AD \cong BC$	$\alpha \cong \beta$ (o $\gamma \cong \delta$)
(⇐)	$\alpha \cong \beta$ (o $\gamma \cong \delta$)	$AD \cong BC$

- **Parallelogrammi e loro classificazione (definizione)**

  Vedi la pagina seguente.

CLASSIFICAZIONE DEI QUADRILATERI

PARALLELOGRAMMI

Si dice *parallelogramma* un quadrilatero avente i lati opposti paralleli.

Proprietà

Un parallelogramma ha:

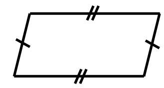
1. I lati opposti paralleli (DEF)
2. I lati opposti congruenti
3. Gli angoli opposti congruenti
4. Gli angoli adiacenti supplementari
5. Le diagonali che si dimezzano scambievolmente

Caratterizzazioni

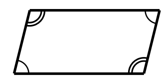
Un quadrilatero è un parallelogramma se ha almeno una delle seguenti proprietà:

1. Due coppie di lati opposti paralleli (DEF)

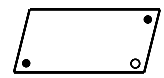
2. Due coppie di lati opposti congruenti



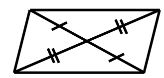
3. Due coppie di angoli opposti congruenti



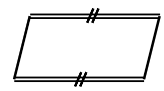
4. Gli angoli adiacenti ad un angolo supplementari



5. Le diagonali che si dimezzano scambievolmente



6. Una coppia di lati opposti congruenti e paralleli



RETTANGOLI

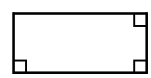
Si dice *rettangolo* un parallelogramma avente i quattro angoli congruenti (e quindi retti).

Un rettangolo ha, oltre a tutte le proprietà dei parallelogrammi:

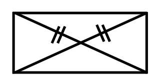
1. Gli angoli retti (DEF)
2. Le diagonali congruenti

Un parallelogramma è un rettangolo se ha almeno una delle seguenti proprietà:

1. Almeno tre angoli retti (DEF)



2. Le diagonali congruenti

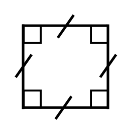


QUADRATI

Si dice *quadrato* un parallelogramma che è sia rettangolo che rombo.

Un quadrato ha tutte le proprietà di parallelogrammi, rettangoli e rombi.

Un quadrilatero è un quadrato se è sia rettangolo che rombo.



ROMBI

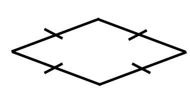
Si dice *rombo* un parallelogramma avente i quattro lati congruenti.

Un rombo ha, oltre a tutte le proprietà dei parallelogrammi:

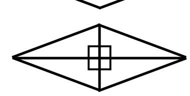
1. I lati congruenti (DEF)
2. Le diagonali perpendicolari
3. Le diagonali bisettrici degli angoli

Un parallelogramma è un rombo se ha almeno una delle seguenti proprietà:

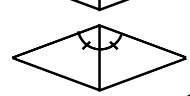
1. Tutti i lati congruenti (DEF)



2. Le diagonali perpendicolari



3. Almeno una diagonale bisettrice di un angolo

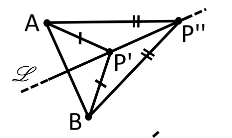


• Luogo geometrico (definizione)

Un *luogo geometrico* è l'insieme di tutti e soli i punti del piano che godono di una certa proprietà, detta proprietà caratteristica del luogo.

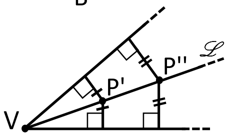
○ Asse di un segmento come luogo geometrico

L'asse di un segmento è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento.



○ Bisettrice di un angolo come luogo geometrico

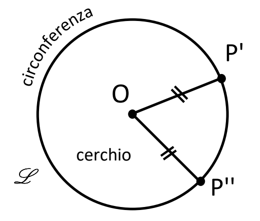
La bisettrice di un angolo è il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo.



• Circonferenza e cerchio (definizione)

Si dice *circonferenza* il luogo dei punti che hanno distanza assegnata da un punto, detto centro.

Si dice *cerchio* la figura formata dai punti della circonferenza e da quelli interni alla circonferenza stessa.

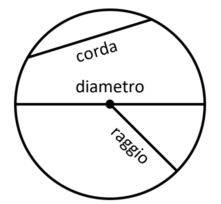


○ Raggio, corda, diametro e cerchio (definizione)

Si dice *raggio* un segmento che ha per estremi il centro e un punto della circonferenza.

Si dice *corda* un segmento che ha per estremi due punti della circonferenza.

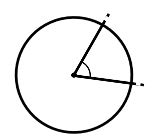
Si dice *diametro* una corda passante per il centro.



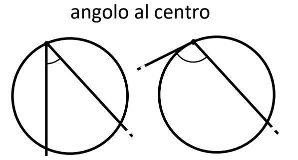
○ Angolo al centro e alla circonferenza (definizione)

Si dice *angolo al centro* un angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza.

Si dice *angolo alla circonferenza* un angolo convesso che ha il vertice sulla circonferenza e i due lati secanti la circonferenza, oppure un lato secante e l'altro tangente.



angolo al centro

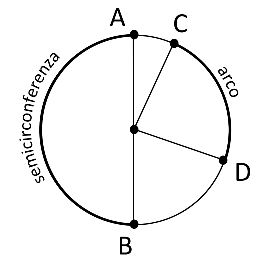


angoli alla circonferenza

○ Arco e semicirconferenza (definizione)

Si dice *arco* una parte di circonferenza compresa tra due punti, detti estremi. Si dice che la corda con gli stessi estremi *sottende* quest'arco, e che il relativo angolo al centro *insiste* sull'arco.

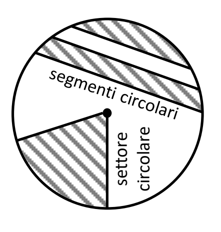
Si dice *semicirconferenza* un arco che ha estremi su un diametro.



○ Settore circolare e segmento circolare (definizione)

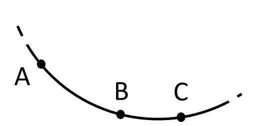
Si dice *settore circolare* la parte di cerchio compresa tra un arco e i raggi che hanno un estremo negli estremi dell'arco.

Si dice *segmento circolare* la parte di cerchio compresa tra una corda e la circonferenza (segmento circolare ad una base), o tra due corde parallele e la circonferenza (segmento circolare a due basi).



○ Teorema senza nome

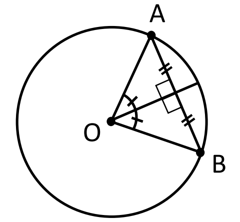
Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza.



- **Proprietà della corda**

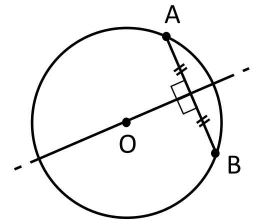
  In una circonferenza, sono equivalenti le seguenti proprietà:

  - il raggio è perpendicolare alla corda AB;
  - il raggio passa per il punto medio di AB;
  - il raggio è bisettrice dell'angolo al centro $\widehat{AOB}$.



- **Teorema dell'asse di una corda**

  In una circonferenza, l'asse di una corda passa per il centro.



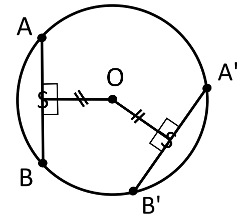
- **Confronto tra corde**

  In una circonferenza (o in circonferenze congruenti), se due corde hanno la stessa distanza dal centro allora sono congruenti.

  Se le due corde non hanno la stessa distanza dal centro allora non sono congruenti, e alla corda con distanza minore corrisponde la lunghezza maggiore.

  Viceversa, se due corde sono congruenti allora hanno la stessa distanza dal centro.

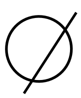
  Se le due corde non sono congruenti allora non hanno la stessa distanza dal centro e alla corda minore corrisponde la distanza maggiore.

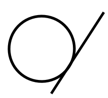


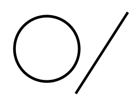
- **Posizioni reciproche di una circonferenza e di una retta (definizione)**

  Una retta si dice:

  - *secante* ad una circonferenza se ha due punti in comune con essa;
  - *tangente* ad una circonferenza se ha un punto in comune con essa;
  - *esterna* ad una circonferenza se non ha punti in comune con essa.

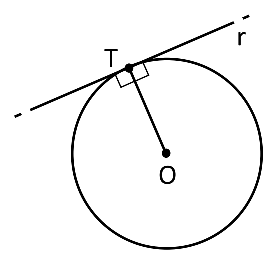

secante


tangente


esterna

- **Teorema della retta tangente ad una circonferenza**

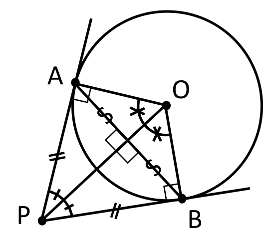
  Una retta è tangente ad una circonferenza in un punto T se e solo se il raggio che ha per estremo T è perpendicolare alla retta.



- **Teorema delle rette tangenti ad una circonferenza condotte da un punto esterno**

  Se da un punto P esterno ad una circonferenza si conducono le due rette tangenti ad essa, allora:

  - i segmenti di tangente PA e PB sono congruenti;
  - il segmento PO è bisettrice degli angoli APB e AOB;
  - il segmento PO è asse della corda AB.

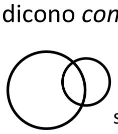


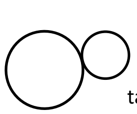
- **Posizioni reciproche di due circonferenze (definizione)**

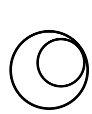
  Due circonferenze si dicono:

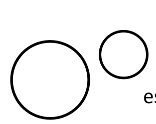
  - *secanti* se hanno due punti in comune;
  - *tangenti (internamente o esternamente)* se hanno un punto in comune;
  - *esterne* o *una interna all'altra* se non hanno punti in comune;

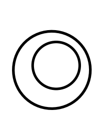
  In particolare, due circonferenze una interna all'altra che hanno lo stesso centro si dicono *concentriche*.


secanti


tangenti esternamente

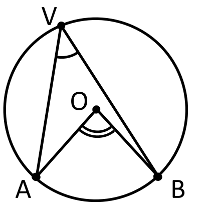

tangenti internamente


esterne


una interna all'altra

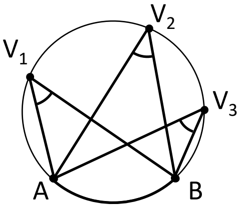
- **Teorema dell'angolo al centro**

  Un angolo al centro è il doppio del corrispondente angolo alla circonferenza (ovvero l'angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco).



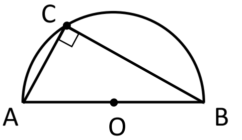
  - **Primo corollario**

    In una circonferenza (o in circonferenze congruenti) angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco (o su archi congruenti) sono congruenti.



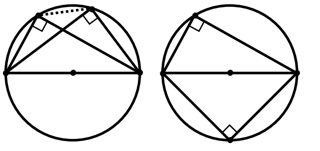
  - **Secondo corollario**

    Un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo.



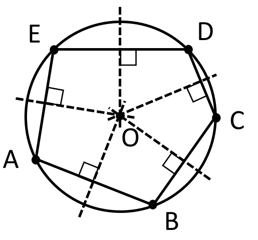
  - **Terzo corollario**

    Due triangoli rettangoli con l'ipotenusa in comune individuano un quadrilatero inscritto in una circonferenza.



- **Poligono inscritto in una circonferenza (definizione)**

  Un poligono si dice inscritto in una circonferenza se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza.



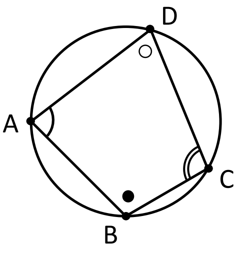
  - **Criterio di inscrittibilità di un poligono**

    Un poligono è inscrittibile in una circonferenza se e solo se gli assi di tutti i suoi lati si incontrano in un punto, che è il centro della circonferenza.

  - **Criterio di inscrittibilità di un quadrilatero**

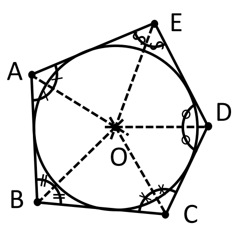
    Un quadrilatero è inscrittibile in una circonferenza se e solo se i suoi angoli opposti sono supplementari.

    $ABCD$ è inscrittibile $\Leftrightarrow$ $\hat{A}+\hat{C}\cong\hat{B}+\hat{D}$



- **Poligono circoscritto ad una circonferenza (definizione)**

  Un poligono si dice circoscritto ad una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.



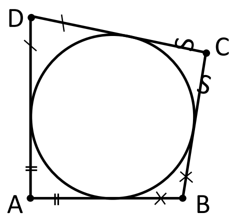
  - **Criterio di circoscrittibilità di un poligono**

    Un poligono è circoscrittibile ad una circonferenza se e solo se le bisettrici di tutti i suoi angoli interni si incontrano in un punto, che è il centro della circonferenza.

  - **Criterio di circoscrittibilità di un quadrilatero**

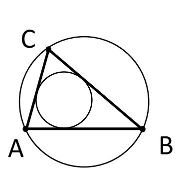
    Un quadrilatero è circoscrittibile ad una circonferenza se e solo le somme dei suoi lati opposti sono congruenti.

    $ABCD$ è circoscrittibile $\Leftrightarrow$ $AB+CD\cong BC+DA$

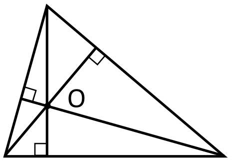


- **Teorema senza nome**

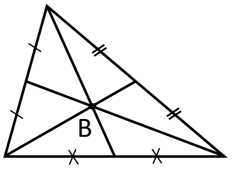
  Un triangolo è sempre inscrittibile e circoscrittibile ad una circonferenza.



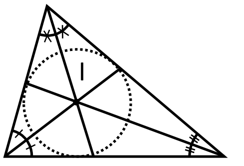
• **Punti notevoli del triangolo**



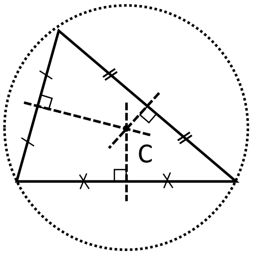
Le altezze relative ai lati di un triangolo si incontrano in un punto, detto *ortocentro*.



Le mediane relative ai lati di un triangolo si incontrano in un punto, detto *baricentro*.



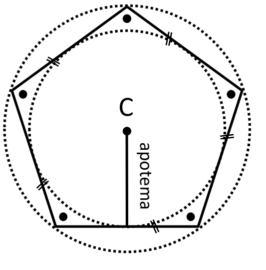
Le bisettrici degli angoli di un triangolo si incontrano in un punto, detto *incentro* (che è centro della circonferenza inscritta).



Gli assi dei lati di un triangolo si incontrano in un punto, detto *circocentro* (che è centro della circonferenza circoscritta).

• **Poligono regolare (definizione)**

Un poligono si dice *regolare* se ha tutti i lati e tutti gli angoli congruenti.



○ **Teorema senza nome**

Un poligono regolare è sempre inscrittibile ad una circonferenza e circoscrittibile ad una circonferenza concentrica alla prima.

○ **Centro e apotema di un poligono regolare (definizione)**

Si dice *centro di un poligono regolare* il centro delle circonferenze inscritta e circoscritta al poligono.

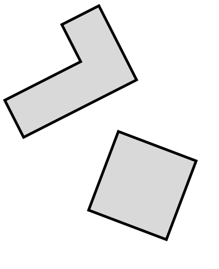
Si dice *apotema di un poligono regolare* il raggio della circonferenza inscritta nel poligono.

• **Superficie piana (definizione)**

Una superficie piana è una figura costituita da una regione di piano limitata da una linea chiusa, oppure da una regione di piano compresa tra due o più linee che non si intersecano.

• **Equivalenza (definizione)**

Due superfici piane si dicono *equivalenti* se hanno la stessa estensione (l'estensione di una superficie piana è un concetto primitivo).



○ **Postulato sulle proprietà dell'equivalenza**

La relazione di congruenza gode delle seguenti proprietà.

Proprietà riflessiva. Ogni superficie è equivalente a se stessa.

$$S_1 \doteq S_1$$

Proprietà simmetrica. Se una superficie S_1 è equivalente ad una superficie S_2, allora la superficie S_2 è equivalente alla superficie S_1.

$$S_1 \doteq S_2 \;\Rightarrow\; S_2 \doteq S_1$$

Proprietà transitiva. Se una superficie S_1 è equivalente ad una superficie S_2, e la superficie S_2 è equivalente ad una superficie S_3, allora S_1 è equivalente a S_3.

$$S_1 \doteq S_2 \text{ e } S_2 \doteq S_3 \Rightarrow S_1 \doteq S_3$$

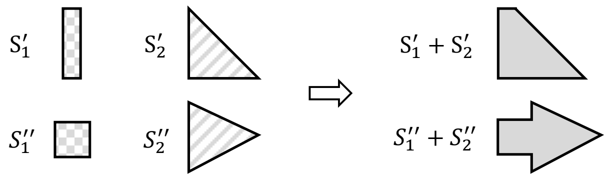
- **Teorema senza nome**

  Se due superfici sono congruenti, allora sono anche equivalenti.

- **Postulato della somma (e differenza) di superfici equivalenti**

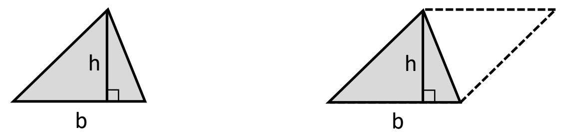
  Sommando (o sottraendo) superfici rispettivamente equivalenti, si ottengono superfici a loro volta equivalenti.

$$\begin{matrix} S_1' \doteq S_1'' \\ S_2' \doteq S_2'' \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad S_1' + S_2' \doteq S_1'' + S_2''$$

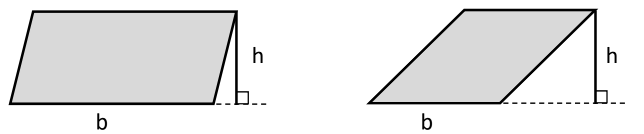


- **Principali equivalenze tra poligoni**

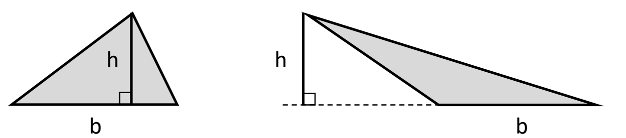
  Un triangolo è equivalente alla metà di un parallelogramma che ha la base e l'altezza congruenti alle sue.



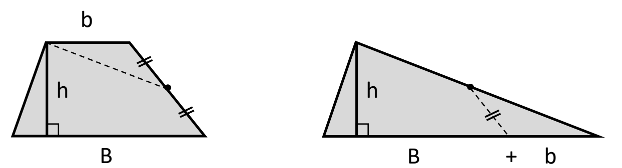
  Un parallelogramma è equivalente ad ogni altro parallelogramma (o rettangolo) che ha la base e l'altezza congruenti alle sue.



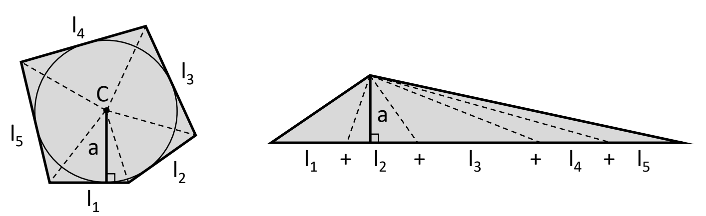
  Un triangolo è equivalente ad ogni altro triangolo che ha la base e l'altezza congruenti alle sue.



  Un trapezio è equivalente al triangolo che ha la base congruente alla somma delle sue basi, e l'altezza congruente alla sua altezza.



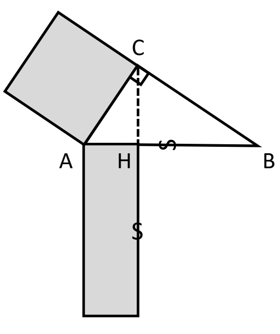
  Un poligono circoscrittibile ad una circonferenza è equivalente al triangolo che ha la base congruente alla somma dei lati del poligono, e l'altezza congruente all'apotema (raggio della circonferenza).



- **Primo Teorema di Euclide**

  In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.

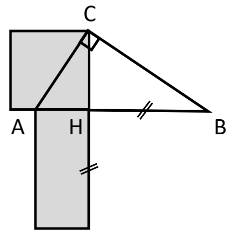
$$q(AC) \doteq r(AH, AB)$$



- **Secondo Teorema di Euclide**

  In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

$$q(CH) \doteq r(AH, HB)$$

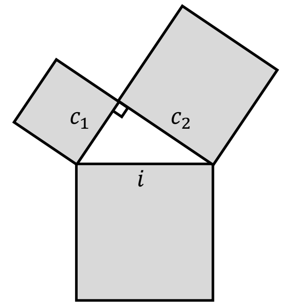


- **Teorema di Pitagora**

  In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

  Viceversa, se in un triangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti, allora il triangolo è rettangolo.

$$q(c_1) + q(c_2) \doteq q(i)$$



- **Lunghezza di un segmento, ampiezza di un angolo, area di una superficie (definizione)**

  Data la relazione di congruenza tra segmenti, si dice *lunghezza di un segmento* la classe di equivalenza a cui quel segmento appartiene.

  Data la relazione di congruenza tra angoli, si dice *ampiezza di un angolo* la classe di equivalenza a cui quell'angolo appartiene.

  Data la relazione di equivalenza tra superfici, si dice *area di una superficie* la classe di equivalenza a cui quella superficie appartiene.

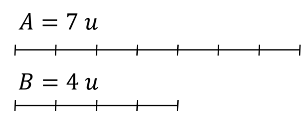
  Tali classi (siano esse lunghezze, ampiezze o aree) in generale prendono il nome di *grandezze geometriche*, e due grandezze della stesso tipo si dicono *omogenee*.

- **Grandezze commensurabili e incommensurabili (definizione)**

  Due grandezze A e B si dicono *commensurabili* se esiste una grandezza u (ad esse omogenea) che sia loro sottomultiplo comune, ovvero se esiste un numero razionale m/n tale che:

$$A = \frac{m}{n}\, B$$

  Le due grandezze si dicono *incommensurabili* altrimenti.



$$A = \frac{7}{4}\, B$$

- **Grandezze in proporzione (definizione)**

  Quattro grandezze omogenee A, B, C e D (di cui le prime due omogenee tra loro e le seconde due omogenee tra loro) si dicono *in proporzione* se:

$$A : B = C : D$$

- **Proprietà delle proporzioni**

  Data la proporzione numerica $A : B = C : D$ si ha che:

  - Proprietà fondamentale: il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

$$A \cdot D = B \cdot C$$

  - Proprietà dell'invertire: scambiando ogni antecedente con il suo conseguente si ottiene ancora una proporzione.

$$B : A = D : C$$

  - Proprietà del permutare: scambiando tra loro i medi (o gli estremi) si ottiene ancora una proporzione.

$$A : C = B : D \qquad \text{oppure} \qquad D : B = C : A$$

  - Proprietà del comporre:

$$(A + B) : A = (C + D) : C \qquad \text{oppure} \qquad (A + B) : B = (C + D) : D$$

  - Proprietà dello scomporre:

$$(A - B) : A = (C - D) : C \qquad \text{oppure} \qquad (A - B) : B = (C - D) : D$$