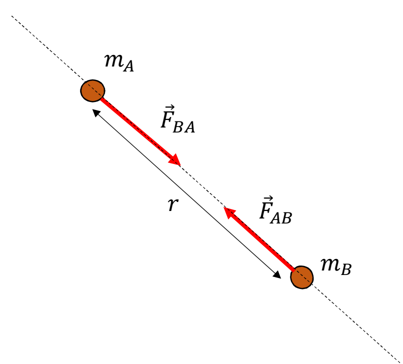
LA GRAVITAZIONE

Legge di Gravitazione Universale

Definizione (forza di attrazione gravitazionale)

Due corpi puntiformi di massa m_A e m_B si attraggono vicendevolmente con una forza $\vec{F}_{AB}$ (forza che il corpo A esercita sul corpo B), o $\vec{F}_{BA}$ (forza che il corpo B esercita sul corpo A), detta *forza di attrazione gravitazionale*, avente le seguenti caratteristiche:



$\vec{F}_{AB}$:
- Direzione: retta congiungente A e B
- Verso: da B ad A
- Intensità: $F_{AB} = G\,\dfrac{m_A\, m_B}{r^2}$

Dove G è una costante detta *costante di gravitazione universale*:

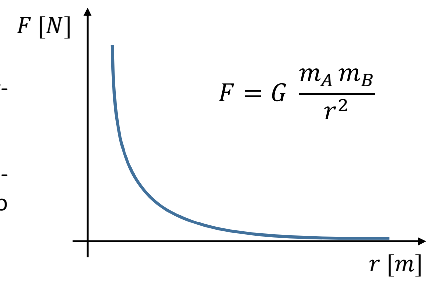
$$G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$$

Legge di Gravitazione Universale

Nota Bene 1

L'intensità della forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

L'intensità diminuisce velocemente: raddoppiando la distanza l'intensità diventa un quarto di quella iniziale.



Nota Bene 2

In concordanza con il Terzo Principio della Dinamica, $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$.

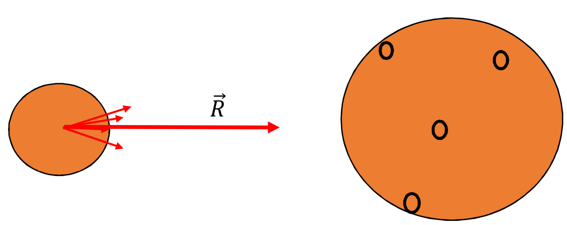
Nota Bene 3

La massa che compare nella formula si dice massa gravitazionale, e teoricamente è considerata distinta dalla massa inerziale. Tuttavia sperimentalmente si è concluso che le due masse hanno lo stesso valore.

Legge di Gravitazione Universale

Nota Bene 4

In caso di corpi non puntiformi (corpi estesi), la forza con cui il primo corpo è attratto dal secondo è la risultante di tutte le forze con cui il primo corpo è attratto da tutte le parti (così piccole da essere considerate puntiformi) del secondo corpo.

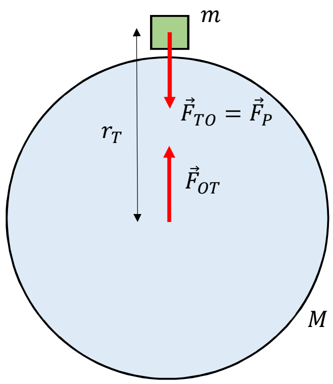


Nella maggior parte dei casi, le distanze tra i corpi considerati sono così grandi rispetto alle dimensioni dei corpi stessi, che questi possono essere considerati puntiformi.

Legge di Gravitazione Universale

Nota Bene 5

La forza peso non è altro che la forza di attrazione gravitazionale che la Terra esercita sull'oggetto preso in considerazione, quando esso si trova sulla superficie terrestre.



$M = 5{,}974 \cdot 10^{24}\ kg$

$g = 9{,}8\ m/s^2$

$$\vec{F}_{TO} = G\,\frac{M\,m}{r_T^2} = m\,g$$

$G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

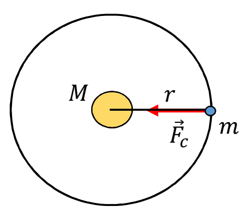
$r_T = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$

$G\,\dfrac{M}{r_T^2} = g$ (questa relazione ha permesso il calcolo della massa terrestre)

Legge di Gravitazione Universale

Nota Bene 6

La forza di gravitazione universale ammette l'esistenza di orbite planetarie circolari (o, più in generale, ellittiche).



Infatti se il Sole si trovasse al centro dell'orbita, la forza di gravitazione universale che agisce sul pianeta sarebbe costante in intensità e diretta sempre verso il centro dell'orbita: fungerebbe così da <u>forza centripeta</u>, necessaria perché il pianeta si mantenga in moto circolare uniforme.

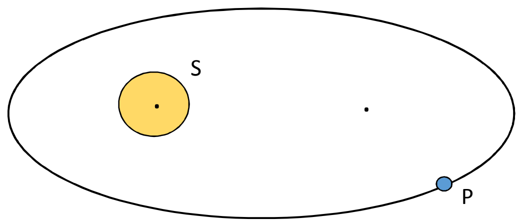
Nota Bene 7

La forza di gravitazione universale è una *forza centrale* (ovvero agisce sempre verso un punto, detto centro, che in questo caso è il centro dell'orbita).

Leggi di Keplero

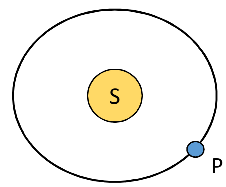
Prima Legge

Le orbite dei pianeti attorno alla stella sono ellissi, e la stella occupa uno dei due fuochi.



Nota Bene

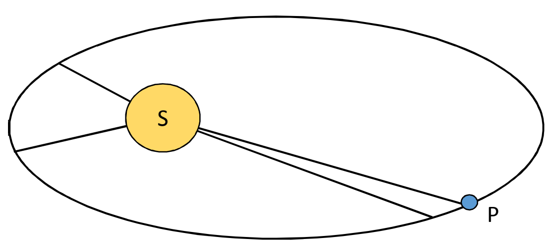
Nel caso dei pianeti del Sistema Solare, l'eccentricità delle orbite è molto bassa, tanto che le potremo approssimare con circonferenze.



Leggi di Keplero

Seconda Legge

Il raggio vettore di un pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.



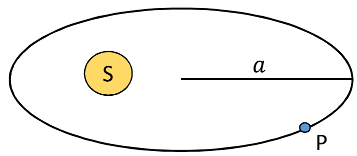
Nota Bene

La velocità tangenziale del pianeta sarà dunque minima al perielio (punto più vicino al Sole) e massima all'afelio (punto più lontano).

Leggi di Keplero

Terza Legge

Per tutti i pianeti che orbitano intorno alla stessa stella, è costante il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore a dell'orbita e il quadrato del periodo di rivoluzione T.



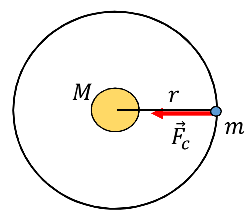
$$\frac{a^3}{T^2} = cost$$

Nota Bene

Dimostriamolo nel caso di orbita circolare ($a = r$):

$$F_c = m\, a_c \Rightarrow G\,\frac{M\,m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow G\,\frac{M}{r} = v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G\,\frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \Rightarrow G\,\frac{M}{r} = \frac{(2\pi)^2 r^2}{T^2} \Rightarrow \frac{GM}{(2\pi)^2} = \frac{r^3}{T^2}$$

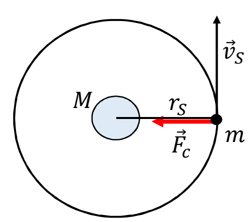


Esempio 1: i satelliti

Teorema (velocità dei satelliti)

Un satellite, in orbita attorno alla Terra ad una distanza r_S dal centro della Terra, mantiene una velocità (detta velocità orbitale) pari a:

$$v_S = \sqrt{\frac{G\,M}{r_S}}$$



Dimostrazione

$$F_c = m\, a_c$$

$$G\,\frac{M\,m}{{r_S}^2} = m\frac{{v_S}^2}{r_S}$$

$$G\,\frac{M}{r_S} = {v_S}^2$$

$$v_S = \sqrt{\frac{G\,M}{r_S}}$$

Nota Bene

Questa è la velocità che mantengono *tutti* i satelliti in orbita alla distanza r_S.

In particolare, tale velocità non dipende dalla massa del satellite.

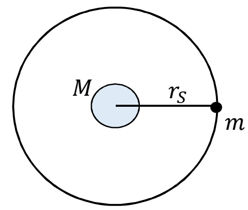
Esempio 2: i satelliti geostazionari

Un satellite si dice *geostazionario* se si trova sempre sulla verticale dello stesso punto della superficie terrestre, durante il moto di rotazione della Terra.

Teorema (orbita dei satelliti geostazionari)

Tutti i satelliti geostazionari si trovano alla stessa distanza dal centro della Terra, pari a:

$$r_S = \sqrt[3]{\frac{G\,M\,T^2}{(2\pi)^2}}$$



Dimostrazione

La velocità ang. ω del satellite dev'essere uguale alla velocità ang. ω_T della Terra.

$$\omega = \omega_T$$

$$\frac{v_S}{r_S} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\sqrt{\frac{G\,M}{r_S}}\frac{1}{r_S} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{G\,M}{r_S}\frac{1}{{r_S}^2} = \frac{(2\pi)^2}{T^2}$$

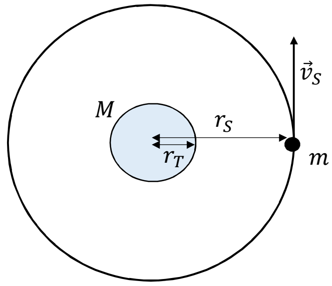
$$\frac{G\,M}{{r_S}^3} = \frac{(2\pi)^2}{T^2}$$

$$\frac{{r_S}^3}{G\,M} = \frac{T^2}{(2\pi)^2}$$

$${r_S}^3 = \frac{G\,M\,T^2}{(2\pi)^2}$$

$$r_S = \sqrt[3]{\frac{G\,M\,T^2}{(2\pi)^2}}$$

Esempio 2: i satelliti geostazionari



La distanza del satellite geostazionario dal centro della Terra è pari a:

$$r_S = \sqrt[3]{\frac{G\,M\,T^2}{(2\pi)^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6{,}674\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}974\cdot 10^{24}\cdot (60\cdot 60\cdot 24\,)^2}{(2\pi)^2}} =$$

$$\approx 4{,}22\cdot 10^7\ m$$

Ovvero, il satellite si trova

$$r_S - r_T = 4{,}22\cdot 10^7 - 6{,}37\cdot 10^6 = 42{,}2\cdot 10^6 - 6{,}37\cdot 10^6 = 35{,}83\cdot 10^6 = 3{,}58\cdot 10^7\ m$$

sopra la superficie terrestre.

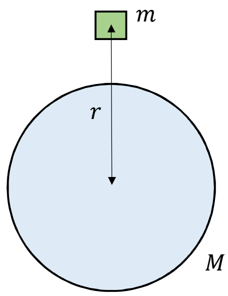
La velocità del satellite è pari a:

$$v_S = \sqrt{\frac{G\,M}{r_S}} = \sqrt{\frac{6{,}674\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}974\cdot 10^{24}}{4{,}22\cdot 10^7}} \approx 3100\ m/s$$

Energia potenziale gravitazionale

La forza di gravitazione universale è una forza conservativa.

Come per tutte le forze conservative, ad essa è associata un'energia potenziale, detta energia potenziale gravitazionale.



Definizione (energia potenziale gravitazionale)

Un corpo di massa m a distanza r da un corpo di massa M possiede un'*energia potenziale gravitazionale* pari a:

$$E_{P_G} = -G\frac{m\,M}{r}$$

Nota Bene 1

Come al solito, l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva. Si conviene tuttavia di scegliere tale costante in modo che l'energia potenziale sia nulla quando il corpo si trova a distanza infinita dal pianeta.

Nota Bene 2

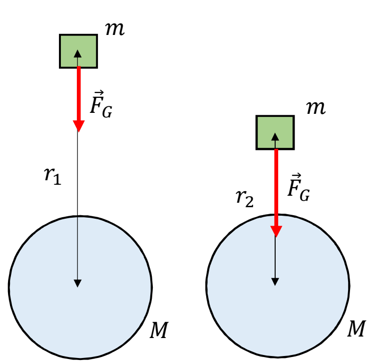
L'energia potenziale gravitazionale già nota ($E_{P_G} = mgh$) non è altro che l'energia potenziale gravitazionale appena definita (a meno di costanti), quando il corpo si trova nei pressi della superficie terrestre.

Teorema dell'Energia potenziale gravitazionale

Teorema dell'energia potenziale gravitazionale

Il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale che un corpo di massa M esercita su un corpo di massa m che si sposta da un punto A ad un punto B [non dipende dalla traiettoria percorsa dal corpo ed] è pari all'opposto della variazione di energia potenziale gravitazionale di quel corpo:

$$L_{AB} = -\Delta E_{P_G}$$



Nota Bene 1

Il lavoro è positivo se il corpo si avvicina al pianeta (negativo nel caso opposto).

$$L = -\Delta E_{P_G} = E_{P_{G1}} - E_{P_{G2}} =$$

$$= -G\frac{m\,M}{r_A} - \left(-G\frac{m\,M}{r_B}\right) =$$

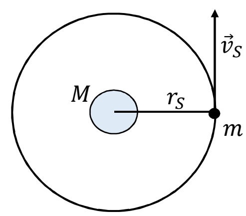
$$= -G\underbrace{\frac{m\,M}{r_A}}_{\text{piccola}} + G\underbrace{\frac{m\,M}{r_B}}_{\text{grande}} > 0$$

Esempio 3: energia meccanica di un satellite

Teorema (energia meccanica dei satelliti)

L'energia meccanica di un satellite di massa m in orbita ad una distanza r_S dal centro della Terra è pari a:

$$E = -\frac{1}{2}\, G\, \frac{m\, M}{r_S}$$



Dimostrazione

$$E = E_C + E_{PG} =$$

$$= \frac{1}{2}\, m\, {v_S}^2 - G\, \frac{m\, M}{r_S} =$$

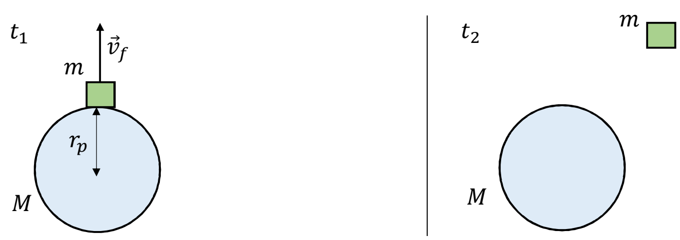
$$= \frac{1}{2}\, m \left(\sqrt{\frac{G\, M}{r_S}}\right)^2 - G\, \frac{m\, M}{r_S} =$$

$$= \frac{1}{2}\, m\, \frac{G\, M}{r_S} - G\, \frac{m\, M}{r_S} =$$

$$= G\, \frac{m\, M}{r_S}\left(\frac{1}{2} - 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\, G\, \frac{m\, M}{r_S}$$

Velocità di fuga



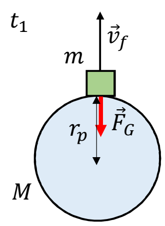
Si dice *velocità di fuga* v_f la minima velocità che deve avere un corpo al momento del lancio per allontanarsi indefinitamente dalla superficie di un pianeta.

Teorema (velocità di fuga)

La velocità di fuga v_f di un satellite che si vuole allontanare da un pianeta di massa M e raggio r_p è pari a:

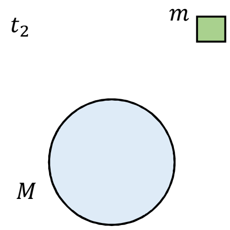
$$v_f = \sqrt{\frac{2\, G\, M}{r_p}}$$

Velocità di fuga



$$E_{C_1} = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$E_{PG_1} = -G\frac{m\,M}{r_p}$$



$$E_{C_2} = 0$$

$$E_{PG_2} = 0$$

Dimostrazione

Sul corpo agiscono solo forze conservative (forza gravitazionale $\vec{F}_G$).

Per il teorema di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{C_1} + E_{PG_1} = E_{C_2} + E_{PG_2}$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - G\frac{m\,M}{r_p} = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = G\frac{m\,M}{r_p}$$

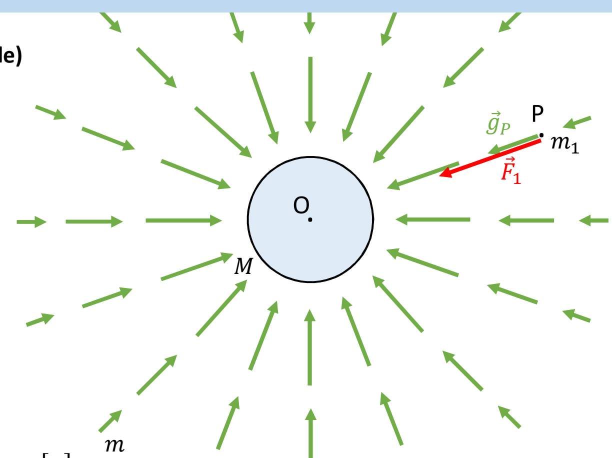
$$v_f^2 = G\frac{2M}{r_p}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r_p}}$$

Il campo gravitazionale

Definizione (campo gravitazionale)

La presenza del corpo di massa M modifica lo spazio circostante: crea un *campo gravitazionale*, ovvero un insieme di vettori (uno in ogni punto dello spazio) con le seguenti caratteristiche:



$\vec{g}_P$
- Direzione: retta congiungente P e O
- Verso: da P ad O
- Intensità: $g = G\,\frac{M}{r_P^2}$

$$[g] = \frac{m}{s^2}$$

Ora, posizionando una massa m_1 in un punto dello spazio, questa subisce una forza pari al prodotto di m_1 per il campo in quel punto:

$$\vec{F}_1 = \vec{g}_P \cdot m_1$$

$\vec{g}_P$ è una proprietà dello spazio

$\vec{F}_1$ dipende dal corpo m_1