M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e cinque quesiti scelti nel questionario.

PROBLEMA 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione *R*, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$.

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno all'asse *y*.
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di *k* per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di *R*.
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa *t*. Si determini $A(1)$.
5. Si determini il valore di *t* per il quale $A(t)$ è minima.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione *f* definita sull'intervallo $[0\,;+\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2} x^2 (3 - 2\log x) + 1 \quad se \quad x > 0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se *f* è *continua* e *derivabile* in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0\,;+\infty[$, un'unica radice reale.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta *r* tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia *n* un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di *n*, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente *r* e dalle due rette: $x = \dfrac{1}{n}$ e $x = 1$.
5. Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare *sen18°*, *sen36°*.
2. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di *0,4 litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).
3. Si dimostri che la curva $y = x\, sen\, x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $sen\, x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $sen\, x = -1$
4. Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.
5. Il numero *e* di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perché la derivata di e^x è e^x ?
6. Come si definisce $n!$ (*n* fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perchè?
7. Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, per quanti numeri reali *k* è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito.
8. I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. E' un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?
9. Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di:
$$sen^2(35°) + sen^2(55°)$$
ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.
10. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = arctg\, x - arctg\, \frac{x-1}{x+1}$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni *f* e *g* determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base *e*.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di *f* e *g* sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.
2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
3. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di *50* cm^2, margini superiore e inferiore di *4 cm* e margini laterali di *2 cm*. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?
4. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?
5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.
6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.
7. La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo $[0,1]$? Se si, trova il punto ξ che compare nella formula
$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$
8. La funzione $f(x) = tgx$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?
9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?
10. La funzione $f(x) = a\,\text{sen}\,x + b\cos x$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4\pi}{3}$ ed è $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$. Si trovino *a* e *b* e si dica quale è il periodo di $f(x)$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2007

Seconda prova scritta

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da *C*.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati *AC* e *BC* e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora è $AC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

PROBLEMA 2

Si consideri un cerchio *C* di raggio r.

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in *C* si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di *n* lati inscritto in *C*. Si dimostri che $S_n = \dfrac{n}{2} r^2 sen \dfrac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di *n* lati circoscritto a *C*.
3. Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

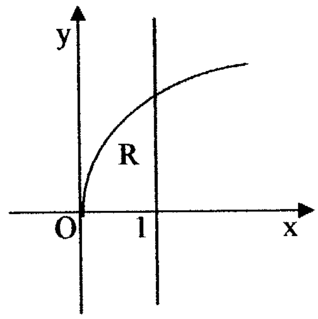
M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta x = 1 (in figura) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.



2. Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.
3. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:
$$x^3 - x^2 - k + 1 = 0$$
4. Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.
5. Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del *teorema del valor medio* (o *teorema di Lagrange*) sull'intervallo [-2, 2]. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.
6. Si sa che il prezzo p di un abito ha subìto una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?
7. Se $f(x)$ è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo [-2, 2], che dire del suo integrale esteso a tale intervallo?
Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione $3+ f(x)$?
8. Si risolva l'equazione: $4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}$
9. Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.
10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

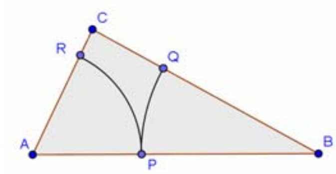
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa AB = a e l'angolo $C\hat{A}B = \frac{\pi}{3}$.

a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinché la costruzione sia realizzabile.



b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo PQCR e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di S(x).

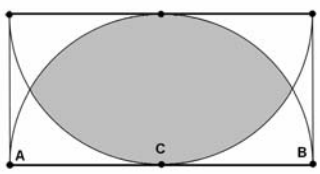
c) Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

d) Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.

PROBLEMA 2

Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro AB = 2 , si affrontino le seguenti questioni:

a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1



b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\hat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH.

Si calcoli il rapporto $f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$

d) Si studi *f(x)* e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si consideri la seguente proposizione: “ Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area”. Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
2. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $sen\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
3. Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?
4. Si esponga la regola del marchese *de L’Hôpital* (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è: $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^{2008}}{2^x}=0$
5. Si determini un polinomio *P(x)* di terzo grado tale che:
$$P(0)=P'(0)=0,\ P(1)=0 \quad e \quad \int_0^1 P(x)dx=\frac{1}{12}$$
6. Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ con $n>3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?
7. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell’equazione:
$$x^3 - 3x^2 + k = 0.$$
8. Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x=\pi$.
9. Sia $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}$; esiste $\lim_{x\mapsto 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.
10. Secondo il codice della strada il segnale di “salita ripida” (fig. a lato) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell’esempio è 10%.
Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l’uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l’Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

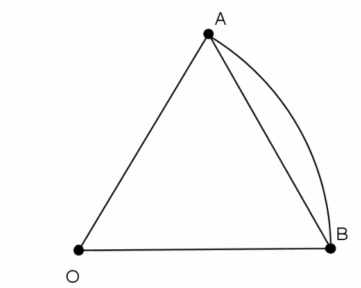
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare *AOB* di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).

1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda *AB* è espressa, in funzione di *x*, da $S(x) = \frac{1}{2} r^2 (x - \operatorname{sen} x)$ con $x \in [0,\ 2\pi]$.
2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).
3. Si fissi l'area del settore *AOB* pari a 100 m^2. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di *AOB* e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).



4. Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido *W* le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad *OB* sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di *W*.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = \log x$ (*logaritmo naturale*)

1. Sia *A* il punto d'intersezione con l'asse *y* della tangente a G_f in un suo punto *P*. Sia *B* il punto d'intersezione con l'asse *y* della parallela per *P* all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia *P*, il segmento *AB* ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a x$ con a reale positivo diverso da 1?
2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base a è $\delta = 45°$? E per quale valore di a è $\delta = 135°$?
3. Sia **D** la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di **D**.
4. Si calcoli il volume del solido generato da **D** nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$.

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

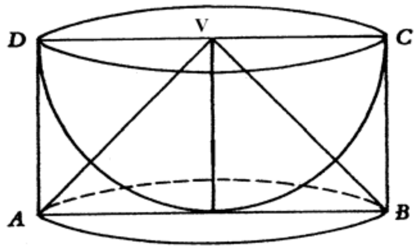
CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è $\operatorname{sen} x$ e il cui grafico passa per il punto (0, 2).
2. Sono dati gli insiemi $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ e $B = \{a,\ b,\ c\}$. Tra le possibili *applicazioni* (o *funzioni*) di A in B, ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?
3. Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?
4. *"Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni"*. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:
$$\frac{0}{1};\ \frac{0}{0};\ \frac{1}{0};\ 0^0$$
A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.
6. Si calcoli: $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.
7. Si dimostri l'identità $\displaystyle\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.
8. Si provi che l'equazione:
$$x^{2009} + 2009x + 1 = 0$$
ha una sola radice compresa fra –1 e 0.
9. Nei *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"*, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.
Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.



10. Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos 5x$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITA' E DELLA RICERCA

M557 - ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO
Indirizzo: SCIENTIFICO
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia *ABCD* un quadrato di lato 1, *P* un punto di *AB* e γ la circonferenza di centro *P* e raggio *AP*. Si prenda sul lato *BC* un punto *Q* in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per *C* e tangente esternamente a γ.

1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$
2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate *Oxy*, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|$, $x \in R$; quale è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0,\ 1)$? E nel punto $S(1,\ 0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo *ROS*, ove l'arco *R S* appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane *Oxy*, si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$).

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di b. Si illustri come varia G_b al variare di b.
2. Sia *P* un punto di G_b. La tangente a G_b in *P* e la parallela per *P* all'asse y intersecano l'asse *x* rispettivamente in A e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia *P*, il segmento *AB* ha lunghezza costante. Per quali valori di *b* la lunghezza di AB è uguale a 1?
3. Sia *r* la retta passante per *O* tangente a G_e (*e* = numero di *Nepero*). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta *r* forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y, da G_e e dalla retta d'equazione $y = e$.

QUESTIONARIO

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado *n*. Si dimostri che la sua derivata *n*-esima è $p^{(n)}(x) = n!\, a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n
2. Siano *ABC* un triangolo rettangolo in *A*, *r* la retta perpendicolare in *B* al piano del triangolo e *P* un punto di *r* distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli *PAB*, *PBC*, *PCA* sono triangoli rettangoli.
3. Sia γ il grafico di $f(x) = e^{3x} + 1$. Per quale valore di *x* la retta tangente a γ in $(x, f(x))$ ha pendenza uguale a 2?
4. Si calcoli:
$$\lim_{x\to\infty} 4xsen\frac{1}{x}$$
5. Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema $80cm$. Quale è la capacità in litri del serbatoio?
6. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{cosx}$
7. Per quale o quali valori di *k* la funzione
$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \leq 4 \\ kx^2 - 2x - 1, & x > 4 \end{cases}$$
è continua in $x = 4$?
8. Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di *n*?
9. Si provi che non esiste un triangolo ABC con AB=3, AC=2 e $A\hat{B}C = 45°$. Si provi altresì che se $AB = 3,\ AC = 2$ e $A\hat{B}C = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.
10. Si consideri la regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse *x* e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse *y* .

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \qquad \text{e} \qquad g(x) = sen\pi x$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy, si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g.
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente, si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo [– 6; 6] e se ne indichino le coordinate.
3. Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo [0; 2]. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita sull'insieme $\boldsymbol{R}$ dei numeri reali da

$$f(x) = (ax + b)\, e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

dove a e b sono due reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0) = 2$.

1. Si provi che $a = 1$ e $b = -1$.
2. Si studi su $\boldsymbol{R}$ la funzione $f(x) = (x - 1)\, e^{-\frac{x}{3}} + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy.
3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta $y = 3$.
4. Il profitto di una azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione g definita su $\boldsymbol{R}^+$ se per ciascun x_i, oggetto dell'osservazione, si ha: $|g(x_i) - y_i| \leq 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

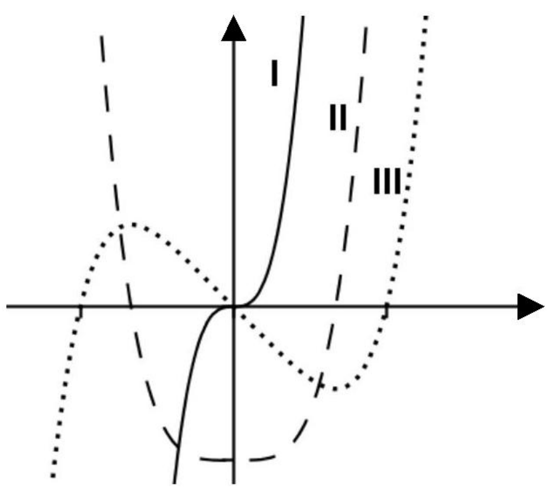
Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?
2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4; 0).
3. Sia R la regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y . Si calcoli il volume di W.
4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n.
5. Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = cos\ x$ e dall'asse x da $x = 1$ a $x = 2$ *radianti*.
6. Si calcoli

$$\lim_{x \to a} \frac{tgx - tga}{x - a}$$

7. Si provi che l'equazione: $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0.
8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perchè è così spesso citato?
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.
10. Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''.
Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?



	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da

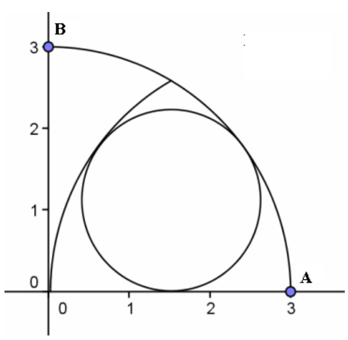
$$f(x) = \left|27x^3\right| \quad e \quad g(x) = sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$$

1. Qual è il periodo della funzione g? Si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy.
2. Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e a G_g nel punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s?
3. Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perchè, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.

PROBLEMA 2

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O e estremi A(3, 0) e B(0, 3) e l'arco L della parabola d'equazione $x^2 = 9 - 6y$ i cui estremi sono il punto A e il punto (0, 3/2).

1. Sia r la retta tangente in A a L. Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui r divide la regione R racchiusa tra L e l'arco AB.
2. La regione R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x, hanno, per ogni $0 \le x \le 3$, area $S(x) = e^{5-3x}$. Si determini il volume di W.
3. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse x.
4. Si provi che l'arco L è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse x. Infine, tra le circonferenze di cui L è il luogo dei centri si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3, come nella figura a lato.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?

$$\lim_{h\to 0}\frac{5\left(\frac{1}{2}+h\right)^4-5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}$$

2. Si illustri il significato di *asintoto* e si fornisca un esempio di funzione *f(x)* il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

3. La posizione di una particella è data da $s(t)=20\,(2e^{-\frac{t}{2}}+t-2)$. Qual è la sua accelerazione al tempo $t=4$?

4. Quale è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?

5. Siano dati nello spazio *n* punti $P_1, P_2, P_3, \ldots\ P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

6. Sia $f(x)=5senx\cos x+\cos^2 x-sen^2 x-\frac{5}{2}sen2x-\cos 2x-17$; si calcoli $f'(x)$.

7. E' dato un tetraedro regolare di spigolo *l* e altezza *h*. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da *l* e da *h*.

8. Qual è il valor medio di $f(x)=\frac{1}{x}$ da $x=1$ a $x=\mathrm{e}$?

9. Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad un retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

10. Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni *x* reale?

    A) $\cos(sen(x^2+1))$ B) $sen(\cos(x^2+1))$ C) $sen(\ln(x^2+1))$ D) $\cos(\ln(x^2+1))$

    Si giustifichi la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2013
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

La funzione f è definita da $f(x)=\int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt$ per tutti i numeri reali x appartenenti all'intervallo chiuso $[0,9]$.

1. Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$ ove f' indica la derivata di f.
2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico Σ di $f'(x)$ e da esso si deduca per quale o quali valori di x, $f(x)$ presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$.
3. Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0,2\pi]$.
4. Sia R la regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0 \le x \le 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x hanno, per ciascun x, area $A(x)=3\,sen\left(\frac{\pi}{4}x\right)$. Si calcoli il volume di W.

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da $f(x)=\frac{8}{4+x^2}$

1. Si studi f e se ne disegni il grafico Φ in un sistema di coordinate cartesiane Oxy. Si scrivano le equazioni delle tangenti a Φ nei punti $P(-2;1)$ e $Q(2;1)$ e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette OP e OQ. Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli.
2. Sia Γ la circonferenza di raggio 1 e centro $(0;1)$. Una retta t, per l'origine degli assi, taglia Γ oltre che in O in un punto A e taglia la retta d'equazione $y=2$ in un punto B. Si provi che, qualunque sia t, l'ascissa x di B e l'ordinata y di A sono le coordinate $(x;\mathrm{y})$ di un punto di Φ.
3. Si consideri la regione R compresa tra Φ e l'asse x sull'intervallo $[0,2]$. Si provi che R è equivalente al cerchio delimitato da Γ e si provi altresì che la regione compresa tra Φ e tutto l'asse x è equivalente a quattro volte il cerchio.
4. La regione R, ruotando attorno all'asse y, genera il solido W. Si scriva, spiegandone il perchè, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di W.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

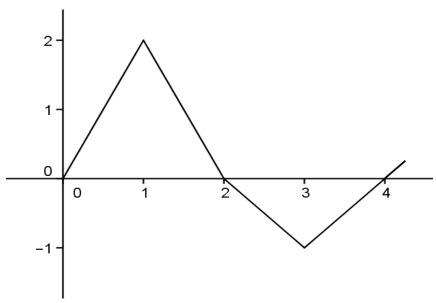
CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.
2. Si calcoli il dominio della funzione
$$f(x) = \sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}}}$$
3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2;-1)$ e $B(-6;-8)$. Si determini l'equazione della retta passante per *B* e avente distanza massima da *A*.
4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza *h* e i lati *a* e *b* delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di *a*, *b* e *h*, illustrando il ragionamento seguito.
5. In un libro si legge: "*Due valigie della stessa forma sembrano "quasi uguali", quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (oppure del 20% o del 25%) corrispondono aumenti di capacità (volume) di circa 33% (oppure 75% o 100% : raddoppio)*". È così? Si motivi esaurientemente la risposta.
6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima posizione?
7. Un foglio rettangolare, di dimensioni a e b, ha area $1\,m^2$ e forma tale che, tagliandolo a metà (parallelamente al lato minore) si ottengono due rettangoli simili a quello di partenza. Quali sono le misure di a e b?
8. La funzione f ha il grafico in figura. Se $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, per quale valore positivo di x, g ha un minimo? Si illustri il ragionamento seguito.



9. Si calcoli:
$$\lim_{x\to 0} 4\,\frac{senx\cos x - senx}{x^2}$$

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

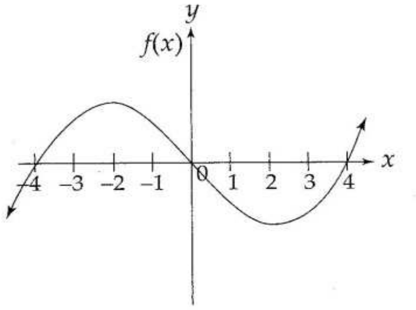
M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

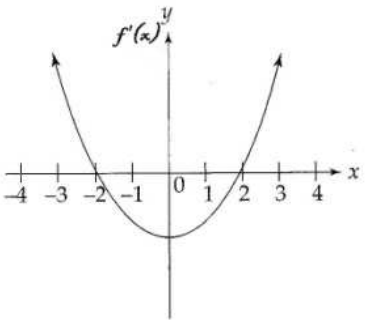
CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

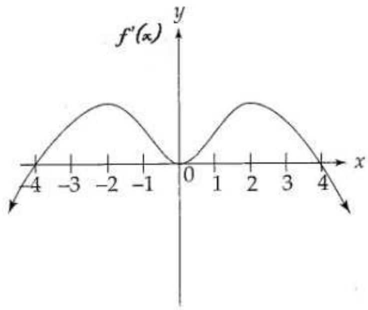
Tema di: MATEMATICA

10. Se la figura a lato rappresenta il grafico di $f(x)$, quale dei seguenti potrebbe essere il grafico di $f'(x)$? Si giustifichi la risposta.

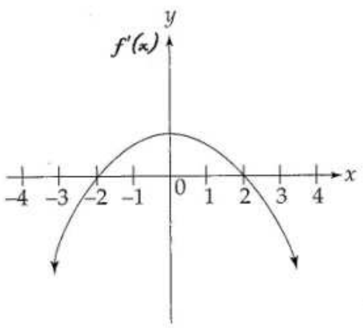




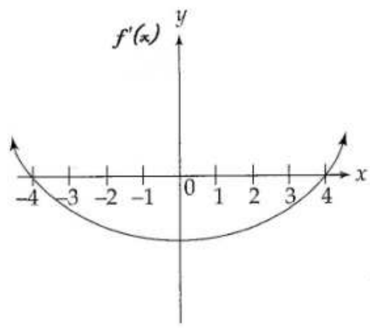
A)



C)



B)



D)

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2014
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

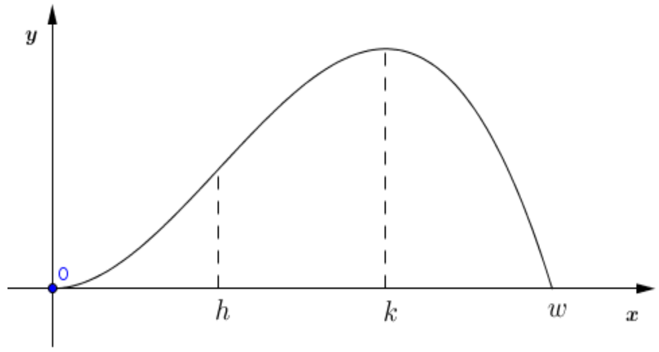
Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nella figura a lato è disegnato il grafico Γ di $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ con f funzione definita sull'intervallo $[0, w]$ e ivi continua e derivabile. Γ è tangente all'asse x nell'origine O del sistema di riferimento e presenta un flesso e un massimo rispettivamente per $x=h$ e $x=k$.



1) Si determinino $f(0)$ e $f(k)$; si dica se il grafico della funzione f presenta punti di massimo o di minimo e se ne tracci il possibile andamento.
2) Si supponga, anche nei punti successivi 3 e 4, che $g(x)$ sia, sull'intervallo considerato, esprimibile come funzione polinomiale di terzo grado. Si provi che, in tal caso, i numeri h e k dividono l'intervallo $[0, w]$ in tre parti uguali.
3) Si determini l'espressione di $g(x)$ nel caso $w=3$ e $g(1)=\frac{2}{3}$ e si scrivano le equazioni delle normali a Γ nei punti in cui esso è tagliato dalla retta $y=\frac{2}{3}$.
4) Si denoti con R la regione che Γ delimita con l'asse x e sia W il solido che essa descrive nella rotazione completa attorno all'asse y. Si spieghi perchè il volume di W si può ottenere calcolando:

$$\int_0^3 (2\pi x)\, g(x)\,dx$$

Supposte fissate in decimetri le unità di misura del sistema monometrico Oxy, si dia la capacità in litri di W.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

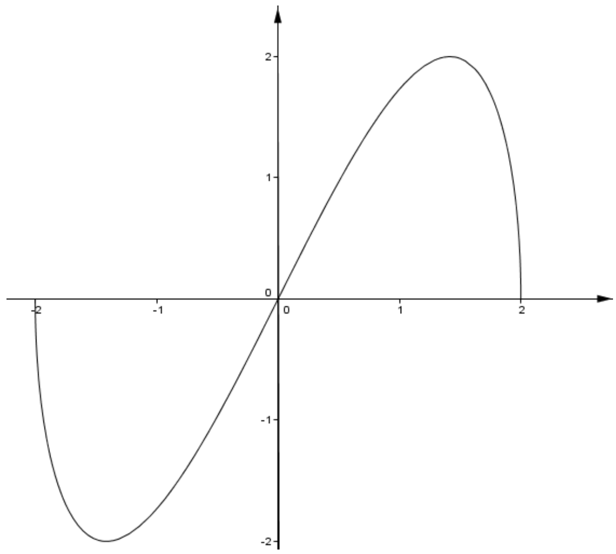
Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

PROBLEMA 2

A lato è disegnato il grafico Γ della funzione

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$



1. Si calcolino il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$.

2. Si dica se l'origine O è centro di simmetria per Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.

3. Si disegni la curva d'equazione $y^2 = x^2\left(4-x^2\right)$ e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.

4. Sia $h(x) = sen\left(f(x)\right)$ con $0 \le x \le 2$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte?

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

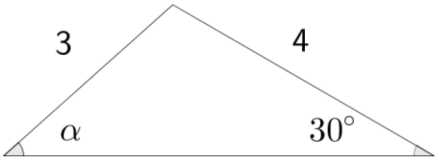
CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Nel triangolo disegnato a lato, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di α?



2. Si spieghi perchè non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni.
3. Nello sviluppo di $\left(2a^2 - 3b^3\right)^n$ compare il termine $-1080\,a^4b^9$. Qual è il valore di n?
4. Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x) = e^{1/x}$ e dall'asse x sull'intervallo $[-2, -1]$. In ogni punto di R di ascissa x, l'altezza del solido è data da $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Si calcoli il volume del solido.
5. Dei numeri 1,2,3.......6000, quanti non sono divisibili né per 2, né 3 né per 5?
6. Un'azienda commercializza il suo prodotto in lattine da 5 litri a forma di parallelepipedo a base quadrata. Le lattine hanno dimensioni tali da richiedere la minima quantità di latta per realizzarle. Quali sono le dimensioni, arrotondate ai mm, di una lattina?
7. Il valor medio della funzione $f(x) = x^3$ sull'intervallo chiuso $[0, k]$ è 9. Si determini k.
8. Del polinomio di quarto grado $P(x)$ si sa che assume il suo massimo valore 3 per $x = 2$ e $x = 3$ e, ancora, che $P(1) = 0$. Si calcoli $P(4)$.
9. Si determini il dominio della funzione:

$$f(x) = \sqrt{3 - \log_2(x+5)}$$

10. Si determinino i valori reali di x per cui:

$$\left(\frac{1}{5}\left(x^2 - 10x + 26\right)\right)^{x^2 - 6x + 1} = 1$$

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

<u>M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE</u>

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

1. individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.
2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$$

   Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:

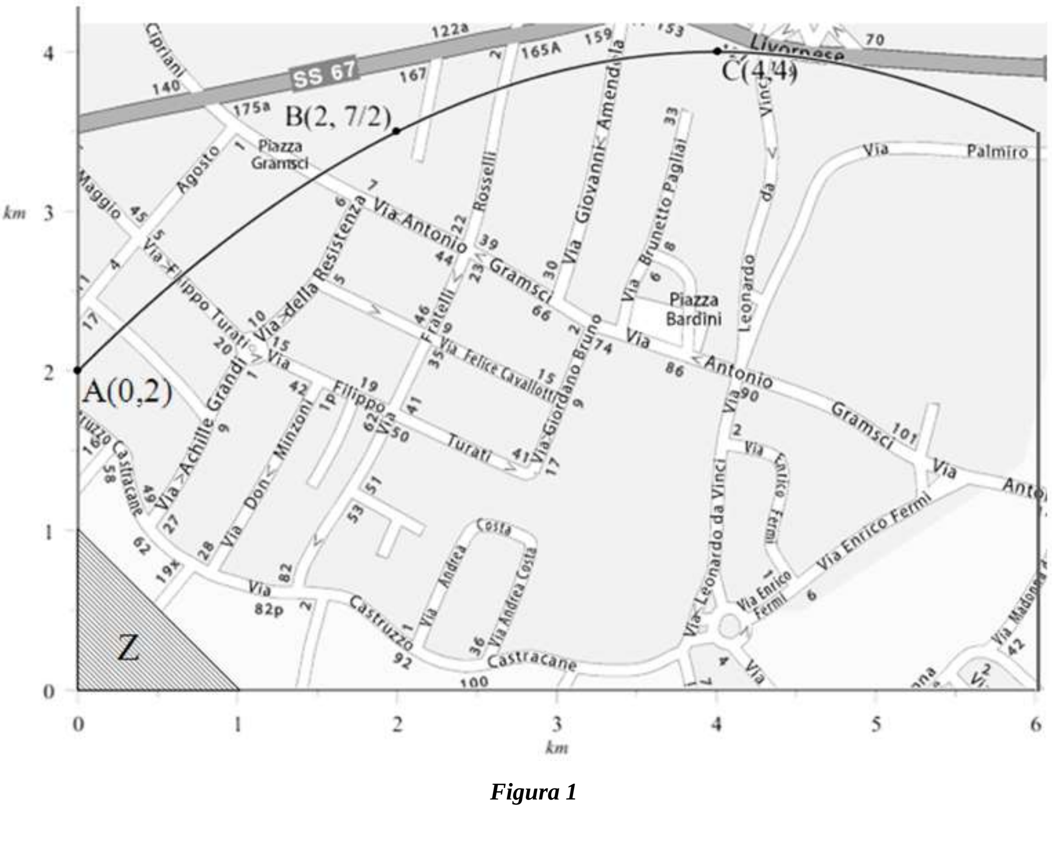


Figura 1

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A, B e C, dagli assi x e y, e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.

3. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A, B e C. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: "*nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio*"; verifica se effettivamente è così.

L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

4. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.

PROBLEMA 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura 2. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

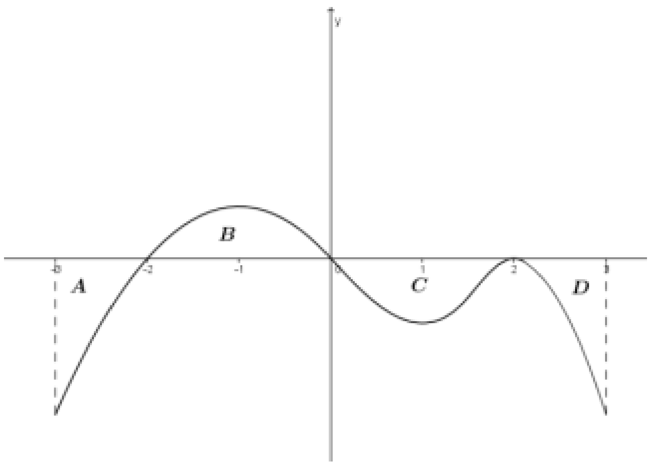


Figura 2

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.

2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.

4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

QUESTIONARIO

1. Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di *f* nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.

2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$

   dove *R* ed *r* sono i raggi e *h* l'altezza.

3. Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?

4. Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y = \frac{\ln(x)}{x}$ è soluzione?

$$y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$$

$$y' + x \cdot y'' = 1$$

$$x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$$

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$$

5. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

6. Sia *f* la funzione, definita per tutti gli *x* reali, da

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$

   determinare il minimo di *f*.

7. Detta *A(n)* l'area del poligono regolare di *n* lati inscritto in un cerchio *C* di raggio *r*, verificare che $A(n) = \frac{n}{2} r^2 sen \frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \to \infty$.

8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto *P* all'interno del triangolo, qual è la probabilità che *P* disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?

9. Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

   determinare il parametro *k* in modo che nell'intervallo $[0, 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

10. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \Re, x \ge 0)$ divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici *A* (1, 0), *B* (4, 0), *C* (4, 2) e *D* (1, 2). Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

A) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

B) Posto che lo spigolo della base ABC della piramide sia lungo 4 cm:

1. calcolare la misura dello spigolo della base MNP del prisma, complanare ad ABC;
2. supposto che gli spigoli AB ed MN siano paralleli, riferire il piano dei triangoli ABC ed MNP ad un sistema di assi cartesiani avente l'origine in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta AB e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
3. determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B, M e verificare che passa pure per N;
4. calcolare le aree delle parti in cui la parabola trovata divide i triangoli ABC ed MNP;
5. spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo MNP rispetto al triangolo ABC.

PROBLEMA 2.

È assegnata la funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, dove a è un parametro reale non nullo.

1. Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.
2. Una volta riferito il piano ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) ed indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a>0$, scrivere l'equazione della circonferenza g di diametro OA.
3. Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza g e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
4. Calcolare il valore $\bar{a}$ di a per il quale la circonferenza g e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.
5. Dopo aver controllato che il valore $\bar{a}$ sopraddetto è 4, indicare con $\bar{\gamma}$ e $\bar{G}$ la circonferenza e la curva corrispondenti a tale valore e calcolare le aree delle regioni piane in cui la curva $\bar{G}$ divide il cerchio delimitato da $\bar{\gamma}$.

QUESTIONARIO.

1. È dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi.
   Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle basi del trapezio.
2. Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D.
3. Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione: $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$.
   Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ oppure $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ (k intero qualsiasi);
   Gianna trova la seguente soluzione: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ (k intero qualsiasi).
   È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.
4. Si consideri la seguente equazione in x: $(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0$ dove k è un parametro reale diverso da 2.
   Indicate con x' ed x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x' + x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.
5. Il limite della funzione $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ per $x \to 0$:
   [A] è uguale ad 1;
   [B] è uguale a $+\infty$;
   [C] non esiste;
   [D] è uguale ad e;
   [E] è uguale ad $\frac{1}{e}$,
   essendo "e" la base dei logaritmi naturali.
   Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.
6. Fornire un esempio di funzione reale di variabile reale $f(x)$ avente le seguenti caratteristiche:
   $f(1) = 1,\ f'(1) = 0,\ f''(1) < 0$.
7. In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette r ed s di equazioni rispettivamente $2x+my=1$ e $mx-2y=2$, dove m è un parametro reale. Qual è l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto di intersezione delle due rette al variare di m?
8. È vero o falso che le due funzioni $\ln(x^2-4)$ e $\ln(x+2) - \ln(x-2)$ hanno lo stesso grafico? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.
9. Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio $(a+b)^{10}$, ordinati secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b, sono rispettivamente:
   $$a^{10},\ a^9b,\ a^8b^2,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ a^1b^9,\ b^{10}.$$
   Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.
10. Una classe è formata da 27 alunni: 15 femmine e 12 maschi. Si deve costituire una delegazione di 5 alunni, di cui 3 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Indirizzo: Scientifico

CORSO DI ORDINAMENTO

Sessione suppletiva 2006

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le due parabole p’ e p” di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2, \quad x = y^2 - 2y.$$

a) Fornirne la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l’altro, i loro punti comuni.
b) Indicato con V’ il vertice della parabola p’, con V” il vertice della parabola p” e con P il punto in cui p” interseca il semiasse positivo delle y, calcolare l’area della regione finita di piano delimitata dall’arco V’V” della parabola p’, dall’arco V”P della parabola p” e dal segmento V’P.
c) Calcolare l’ampiezza dell’angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l’uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.
d) Nel segmento parabolico, delimitato dalla retta di equazione y=4 e dalla parabola p’, inscrivere il rettangolo avente due lati paralleli all’asse y ed area massima.
e) Stabilire se il rettangolo trovato ha anche il massimo perimetro.

PROBLEMA 2.

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x + k}{x^2},$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a) Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno ed un solo flesso.
b) Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta di equazione $x+27y-9=0$.
c) Disegnare l’andamento di γ, dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l’equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell’ulteriore punto che t ha in comune con γ.
d) Determinare l’equazione della circonferenza c, tangente alla curva γ nel punto A ed avente il centro sull’asse y.
e) Calcolare l’area della minore delle regioni in cui l’asse x divide il cerchio delimitato da c.

QUESTIONARIO.

1. Si considerino il rettangolo ABCD e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta AD, il vertice nel punto medio del lato AB e passante per i punti C e D. In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume V' e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta CD genera un solido di volume V". Determinare il rapporto V'/V".

2. Il numero delle soluzioni dell'equazione sen2x cos x =2 nell'intervallo reale [0, 2π] è:

[A] 0; [B] 2; [C] 3; [D] 5.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

3. Il limite della funzione $f(x) = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, per $x \to 0$:

[A] non esiste; [B] è 0; [C] è un valore finito diverso da 0; [D] è +∞.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4. Trovare, col procedimento preferito ma con esauriente spiegazione, la derivata, rispetto ad x, della funzione f(x)=tg(x).

5. Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce di un tetraedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al "primo".

6. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ e stabilire se la funzione è derivabile in tale dominio.

7. Considerata la funzione reale di variabile reale f(x), affermare che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ significa che per ogni numero reale M, esiste un numero reale N tale che, per ogni x, se x>N allora f(x)>M.

È vero o è falso? Accompagnare la risposta con un'interpretazione grafica.

8. È assegnato un triangolo equilatero di lato lungo L. Si costruisce un secondo triangolo, avente per vertici i punti medi dei lati del primo e, così proseguendo, un n-esimo triangolo avente per vertici i punti medi dei lati del triangolo (n–1)-esimo. Calcolare il limite cui tende la somma delle aree degli n triangoli quando n tende ad ∞.

9. Si consideri la seguente uguaglianza: $\ln(2x+1)^4 = 4\ln(2x+1)$. È vero o falso che vale per ogni x reale? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

10. Cinque ragazzi sono contrassegnati con i numeri da 1 a 5. Altrettante sedie, disposte attorno ad un tavolo, sono contrassegnate con gli stessi numeri. La sedia "1", posta a capotavola, è riservata al ragazzo "1", che è il caposquadra, mentre gli altri ragazzi si dispongono sulle sedie rimanenti in maniera del tutto casuale. Calcolare in quanti modi i ragazzi si possono mettere seduti attorno al tavolo.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

Sessione suppletiva 2007 50021.2.1/1
Seconda prova scritta

Ministero della Pubblica Istruzione

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) si consideri il punto A(2,0).

1. Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:

$$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 8,$$

   controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.
2. Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.
3. Si scriva l'equazione della parabola cubica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento OB e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si determinino le coordinate del punto A, in cui la curva C incontra la curva C' rappresentativa dell'equazione $y = e^x$.
3. Si scrivano l'equazione della tangente alla curva C nell'origine e l'equazione della tangente alla curva C' nel punto A.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse x e dalla retta di equazione x=log3.

Sessione suppletiva 2007 50021.2.1/1
Seconda prova scritta

Ministero della Pubblica Istruzione

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{x^2 \cos x}{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}$, quando x tende a 0.
2. Si determini il campo di esistenza della funzione y=arcsen(tgx), con $0 \le x \le 2\pi$.
3. Si calcoli il valore medio della funzione $y=\operatorname{tg}^2 x$, nell'intervallo $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$.
4. Si provi che per la funzione $f(x)= x^3 - 8$, nell'intervallo $0 \le x \le 2$, sono verificate le condizioni di validità del teorema di Lagrange e si trovi che il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.
5. Fra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.
6. Si consideri la seguente proposizione: "Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti distinti è una retta". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
7. Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

   Si dica se essa è continua e derivabile nel punto di ascissa 0.
8. Si determini l'area della regione piana limitata nella curva di equazione $y=e^x$, dalla curva di equazione $y=x^3$ e dalle rette x=0 e x=1.
9. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x+2}$.
10. Si risolva la disequazione $\dbinom{x}{3} > \dfrac{15}{2}\dbinom{x}{2}$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Indirizzo: ________________

CORSO DI ORDINAMENTO
Sessione suppletiva 2008

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Dato un quadrante AOB di cerchio, di centro O e raggio 2, si consideri sull'arco AB un punto P.

1. Si esprima in funzione di $t = tg\frac{x}{2}$ $(con \quad x = B\hat{O}P)$ l'area del quadrilatero OMPN, essendo M ed N i punti medi dei raggi OA e OB.
2. Si studi la funzione f(t) così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.
3. Si dica per quale valore di x l'area del quadrilatero assume valore massimo.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ e l'asse x.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$y = \operatorname{sen}x(2\cos x + 1).$$

1. Tra le sue primitive si individui quella il cui diagramma γ passa per il punto P(π,0).
2. Si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$ e si dimostri che essa è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.
3. Si scrivano le equazioni della retta tangenti alla curva nei suoi due punti A e B di ascisse $\pi/2$ e $3\pi/2$ e si determini il loro punto d'intersezione C.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva e le due suddette tangenti.

QUESTIONARIO

1. Si determini la distanza delle due rette parallele:
$$3x+y-3\sqrt{10}=0, \qquad 6x+2y+5\sqrt{10}=0\,.$$
2. Un trapezio rettangolo è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio r in modo che la base maggiore contenga il diametro. Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo acuto del trapezio, affinché il solido da esso generato in una rotazione completa attorno alla base maggiore abbia volume minimo.
3. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:
$$f(x)=-x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\,.$$
4. Si calcoli il limite della funzione:
$$\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x},$$
quando x tende a 0.
5. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ nell'intervallo $0 \le x \le 1$.
6. Si sechi il solido di una sfera con un piano, in modo che il circolo massimo sia medio proporzionale fra le superficie appianate delle calotte nelle quali rimane divisa la sfera.
7. La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y=e^{x/2}(x+1)$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \le x \le 1$ è la base di un solido S le cui sezioni sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.
8. Si stabilisca per quali valori del parametro reale k esiste una piramide triangolare regolare tale che k sia il rapporto fra il suo apotema e lo spigolo di base.
9. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x)=(x^2+1)^{senx}$$
nel punto P di ascissa $x = \pi/2$.
10. Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, si dica che cosa rappresenta l'insieme dei punti $P(1+t^2,\ 1+t^2)$, ottenuto al variare di t nei reali.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Indirizzo M: ordinamento + liceo della comunicazione

CORSO DI ORDINAMENTO

Sessione suppletiva 2009

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

I due segmenti adiacenti OA, AB sono uguali ed hanno una lunghezza data *a*. Nel medesimo semipiano rispetto alla retta OB si descrivano due semicirconferenze di diametri rispettivi OA ed OB, e per il punto O si conduca la semiretta tangente comune, sulla quale si prenda il segmento OC = *a*. Con origine O, si conduca una semiretta, che forma con OB un angolo α e interseca in P e Q le semicirconferenze.

1. Si calcoli il rapporto:

$$(1) \qquad \frac{\overline{CP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QC}^2}{2a^2}$$

e lo si esprima in funzione di $x = \tan(\alpha)$, controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione f(x) e se ne tracci il grafico γ.

3. Si dica per quale valore di α si hanno rispettivamente il massimo e il minimo del rapporto (1).

4. Si determini l'area della superficie piana, finita, delimitata dall'asse delle ordinate, dalla curva γ e dal suo asintoto.

PROBLEMA 2

Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x(2 - \ln x) & \text{per } x > 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

1. Questa funzione è continua nel punto di ascissa 0 ? E' derivabile in tale punto ?

2. Si studi la funzione f(x) e se ne tracci il grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

3. Si calcoli l'espressione, in funzione di $t(t > 0)$, dell'integrale

$$I(t) = \int_t^{e^2} x(2 - \ln x)dx$$

4. Si faccia vedere che I(t) tende verso un limite finito quando t tende a 0. Cosa rappresenta questo limite nel grafico precedente ?

QUESTIONARIO

1. Una piramide, avente area di base B e altezza h, viene secata con un piano parallelo alla base. Si calcoli a quale distanza dal vertice si deve condurre tale piano, affinché il prisma che ha per basi la sezione di cui sopra e la sua proiezione ortogonale sul piano di base della piramide abbia volume massimo.

2. Si calcoli il limite della funzione $\frac{\ln^2 x + x - 1}{x^2 - x + \sin^2(x-1)}$ quando x tende a 1.

3. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, dall'asse x e dalle rette $x = 1, x = \sqrt{3}$.

4. Dato un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio, se sui suoi cateti presi come diametri ed esternamente si costruiscono due semicerchi, da questi e dal dato semicerchio sono determinati due menischi, detti lunule d'Ippocrate. Si dimostri che la loro somma ha la stessa area del triangolo.

5. Si determini il luogo γ dei punti di intersezione delle due rette di equazioni:

$$\lambda x - y - (\lambda + 2) = 0\,,$$
$$(1 - \lambda)\, x + y + 2 = 0,$$

descritto al variare di λ, parametro reale qualunque. Si disegni la curva γ.

6. Sono dati un angolo α di π^2 radianti e un angolo β di 539 gradi. Si verifichi che sono entrambi maggiori di un angolo giro e minori di due angoli giro. Si dica quale dei due è il maggiore. Si dica inoltre se è più grande il seno di α o il seno di β.

7. Il comandante di una nave decide di raggiungere il porto B partendo dal punto A e seguendo un percorso rettilineo. A causa di un errore, però, la nave inizia la sua navigazione lungo una rotta leggermente diversa da quella prevista. Dopo 5 ore ci si accorge dello sbaglio e il comandante ordina di virare di un angolo di 23° in modo da dirigere ora esattamente verso il porto B, che viene raggiunto dopo 3 ore. Se l'imbarcazione ha mantenuto sempre una velocità costante, quanto tempo si è perso a causa dell'errore?

8. Data la parabola $x = -ay^2 + 3y$ (con a > 0), si determini per quale valore di a l'area della parte finita di piano compresa tra il suo grafico e l'asse y è uguale a 72.

9. Si dimostri che un numero di quattro cifre tutte uguali è divisibile per 101.

10. Si enunci il teorema di Rolle e si mostri, con opportuni esempi, che se una qualsiasi delle tre condizioni previste non è soddisfatta, il teorema non è valido.

___________ –

Durata massima della prova: 6 ore.
E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

suppletiva 2010
Corso di Ordinamento

PROBLEMA 1

Data una circonferenza di centro O e raggio unitario, si prendano su di essa tre punti A, B, C, tali che AB = BC.

1. Si calcoli, in funzione dell'angolo AÔB = x , la quantità:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2$$

   controllando che risulti:

$$f(x) = -4\cos^2 x - 4\cos x + 8$$

2. Si studi la funzione f(x) e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$
3. Si verifichi che la curva γ è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = \pi$
4. Si calcoli il valore medio della funzione f(x) nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

PROBLEMA 2

Sia data la funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1. Si determini il dominio di *f(x)* e si dica se la funzione è continua e derivabile in ogni punto di esso.

2. Si studi la funzione *f(x)* e se ne tracci il grafico γ.

3. Si calcoli l'area della parte di piano R racchiusa dal grafico γ e dal semiasse positivo delle ascisse.

4. La regione R genera, nella rotazione attorno all'asse delle ascisse, un solido S. In S si inscriva un cono circolare retto con vertice nell'origine. Si determinino raggio e altezza del cono, affinchè il suo volume sia massimo.

suppletiva 2010
Corso di Ordinamento

QUESTIONARIO

1. In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto.

2. Considerata la funzione $f(x)=\dfrac{3^{3x}-a^x}{6^x-5^x}$, dove a è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che $\lim_{x\to 0} f(x)=2$.

3. Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza $2r$, e una sfera di raggio r. A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale ß, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

4. Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x)=ax^2+bx+c$ vale la relazione $f'(x_1)+f'(x_2)=0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

5. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, nell'intervallo $1 \le x \le 2$.

6. Si determinino a e b in modo tale che il grafico della funzione $y=a^{x+b}$ passi per i punti del piano xy di coordinate (1,4) e (3,8).

7. Un tetraedro ed un ottaedro regolari hanno gli spigoli della stessa lunghezza *l*. Si dimostri che il volume dell'ottaedro è il quadruplo di quello del tetraedro.

8. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche x = 2t e $y=\dfrac{2}{t^2+1}$ nel suo punto di coordinate (2,1).

9. Si dimostri che se una funzione f(x) è derivabile nel punto x_0, ivi è anche continua; si porti un esempio di funzione continua in un punto e ivi non derivabile.

10. Si dimostri che la differenza dei quadrati di due lati di un triangolo è uguale alla differenza dei quadrati delle rispettive proiezioni dei lati stessi sul terzo lato del triangolo.

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Data una semicirconferenza di diametro $AB = 2$, si prenda su di essa un punto P e sia M la proiezione di P sulla retta perpendicolare in B ad AB.

1. Si esprima la somma $AP + PM$ in funzione di $x = P\hat{A}B$.
2. Si studi la funzione $f(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$, mettendo in evidenza poi la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si dimostri che γ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.
4. Si calcoli l'area della regione piana, limitata dalla curva γ, dagli assi cartesiani e dalla retta di equazione $x = \dfrac{\pi}{3}$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si scrivano l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e quella della retta ad essa parallela, passante per il punto di γ avente ascissa $\sqrt{3}$; si calcoli l'area del parallelogramma formato da queste due rette, dall'asse x e dall'asintoto orizzontale destro.
3. Si calcoli l'area della regione A_k, delimitata dalla curva γ, dall'asse y, dall'asintoto orizzontale destro e dalla retta $x = k$ con $k > 0$. Si calcoli poi il limite di A_k quando $k \to +\infty$.
4. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva γ, dalla tangente inflessionale e dalla retta $x = 1$.

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di 30°. Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a 20°, con che velocità si stanno spostando gli uccelli?

2. La funzione:

$$f(x) = \frac{1}{(e^{1/x} - 1)^2}$$

   non è definita nel punto $x = 0$, che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della $f(x)$ per x tendente a zero da sinistra e per x tendente a zero da destra.

3. La retta di equazione $x = 8$ seca la parabola di equazione $x = y^2 - 4y + 3$ nei punti A e B. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base AB si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di 180° intorno all'asse della parabola.

4. Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$f(x) = (3\cos x + sen^2 x - 3)^{\cos x}$$

   Che cosa succederebbe se l'esponente fosse $sen x$?

5. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$, nell'intervallo $0 \le x \le 1$.

6. Si dica se l'equazione:

$$2 sen x + 2\cos x = 3 + 2^x$$

   ha soluzione.

7. Si domanda quale rapporto bisogna stabilire tra lo spigolo dell'ottaedro regolare e lo spigolo del cubo affinché i due solidi abbiano volumi uguali.

8. Si dimostri che la seguente proposizione è vera: "Se il grafico di una funzione razionale intera $f(x)$ è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, allora il grafico della sua derivata $f'(x)$ è simmetrico rispetto all'origine".

9. Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{e^{x^3} - 1}{x sen^2 x}$ quando x tende a 0.

10. Data una circonferenza di centro O, si conducano negli estremi A e B di un suo diametro AB le tangenti e siano C e D i punti d'intersezione di esse con una terza tangente alla circonferenza.
    Si dimostri che l'angolo $C\hat{O}D$ è retto.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione suppletiva 2012 $$$$$.2.1/1
Seconda prova scritta *$$$$$21112*
$$$$$21112
$$$$$21112
$$$$$21112

Ministero dell'Istruzione, dell' Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1, in modo che la base maggiore contenga il diametro.

1. Si calcoli, in funzione dell'ampiezza x del suo angolo acuto, il volume del solido generato dal trapezio in una rotazione di 180° intorno alla congiungente dei punti medi delle basi, controllando che risulta:

$$V(x) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\cos^2 x - 3\cos x + 3}{sen^2 x}$$

2. Si studi la funzione $f(x) = 3V(x)/\pi$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 < x < 2\pi$, mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.

3. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di ascissa $x = \pi/2$ e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con l'asse x e con la retta di equazione $x = \pi$.

4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazione $x = \pi/4$ e $x = \pi/2$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = x\sqrt{2-x}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*.

2. Si risolva la disequazione:

$$x\sqrt{2-x} < 1$$

3. Si scriva l'equazione della tangente alla curva γ nel punto di intersezione con l'asse y e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo φ che essa forma con la direzione positiva dell'asse x.

4. La regione finita di piano delimitata dalla curva γ e dall'asse x nel I quadrante è la base di un solido S, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.

Ministero dell'Istruzione, dell' Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si divida il segmento $AB = a$ in due parti *AC e CB*, in modo che, costruito su *AC* il quadrato *ACDE* e su *CB* il triangolo equilatero *CBF*, sia minima l'area del pentagono *ABFDE.*
2. Data la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} senx \cdot \log(sen2x), & per \quad 0 < x < \pi/2, \\ 0 & , per \quad x = 0, \end{cases}$$
si provi che è continua, ma non derivabile, nel punto *x* = 0.
3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x) = (x+2)^{\log(e+2x)}$$
nel punto P (0, 2).
4. La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = 1 + tgx$ e dall'asse *x* nell'intervallo $0 \le x \le \pi/4$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse *x*, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.
5. Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello, un capo tuareg vede la cima di una grande palma e dirige direttamente verso di essa. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di 4°; venti minuti più tardi l'angolo di elevazione misura 9°. Quanti minuti sono ancora necessari al tuareg per raggiungere l'albero?
6. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:
$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - x$$
7. Un ottaedro regolare di alluminio (densità $\rho = 2,7\ g/cm^3$), avente lo spigolo l = 5 cm, presenta all'interno una cavità di forma cubica. Sapendo che la massa dell'ottaedro è m = 155 g, si calcoli la lunghezza dello spigolo della cavità.
8. Quante diagonali ha un poligono convesso di n lati?
9. Si calcoli il valore medio della funzione:
$$y = \frac{1}{x^2}$$
nell'intervallo $a \le x \le b$, con $0 < a < b$, e si dimostri che esso è uguale alla media geometrica tra i due valori che la funzione assume nei due estremi dell'intervallo.
10. Data la funzione:
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$$
si verifichi che esiste un solo punto ξ interno all'intervallo chiuso [-1,0], tale che la tangente al diagramma in questo punto è parallela alla corda congiungente i due punti estremi del diagramma.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione suppletiva 2013
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

ABC è un triangolo equilatero di lato a. Dal vertice A, e internamente al triangolo, si conduca una semiretta r che formi l'angolo α con il lato AB. Si denotino con B' e C', rispettivamente, le proiezioni ortogonali su r dei vertici B e C.

1. Si calcoli il rapporto:

$$\frac{\overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2}{a^2}$$

e lo si esprima in funzione di $x = tg\alpha$, controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}{4(x^2 + 1)}.$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.
3. Si determinino le coordinate del punto in cui la curva γ incontra il suo asintoto e si scriva l'equazione della tangente ad essa in tale punto.
4. Si determini l'area della superficie piana, appartenente al II quadrante, delimitata dall'asse y, dalla curva γ e dal suo asintoto.

PROBLEMA 2

Del trapezio ABCD si hanno le seguenti informazioni: la base maggiore AB e la base minore DC misurano rispettivamente $4m$ e $1m$, l'altezza del trapezio misura $3m$ e la tangente dell'angolo $B\hat{A}D$ è uguale a $3/2$.

1. Si calcolino le aree dei quattro triangoli in cui il trapezio è diviso da una sua diagonale e dai segmenti che uniscono il punto medio di questa con gli estremi dell'altra diagonale.
2. Si determinino, con l'aiuto di una calcolatrice, le misure, in gradi e primi sessagesimali, degli angoli del trapezio.
3. Riferito il piano del trapezio ad un conveniente sistema di assi cartesiani, si trovi l'equazione della parabola Γ avente l'asse perpendicolare alle basi del trapezio e passante per i punti B, C, D.
4. Si determinino le aree delle due regioni in cui il trapezio è diviso da Γ.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. E' dato il settore circolare AOB, di centro O, raggio r e ampiezza $\pi/3$. Si inscriva in esso il rettangolo PQMN, con M ed N sul raggio OB, Q sull'arco AB e P su OA. Si determini l'angolo $Q\hat{O}B = x$, affinché il perimetro del rettangolo sia massimo.
2. Quali sono i poliedri regolari? Perchè sono detti anche *solidi platonici?*
3. Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione:
$$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$
nel punto P di ordinata $y = 2$.
4. Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x) = \ln x$ e dall'asse x sull'intervallo $[1, e]$. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura dell'altezza del solido è data da $h(x) = x$. Quale sarà il volume del solido?
5. Un aereo civile viaggia in volo orizzontale con velocità costante lungo una rotta che lo porta a sorvolare Venezia. Da uno squarcio nelle nuvole il comandante vede le luci della città con un angolo di depressione di 7°. Tre minuti più tardi ricompaiono nuovamente le luci, questa volta però l'angolo di depressione misurato è di 13°. Quanti minuti saranno ancora necessari perché l'aereo venga a trovarsi esattamente sopra la città?
6. Si consideri la curva d'equazione $f(x)= \sqrt[3]{x^3 - x}$. La curva ha asintoti? In caso affermativo, se ne determinino le equazioni.
7. Un cubo di legno di pioppo (densità ρ_1 = 0,385 g/cm^3) ed un tetraedro regolare di cristallo (ρ_2 = 3,33 g/cm^3) hanno entrambi lo spigolo $l = 5cm$. Quale dei due ha la massa maggiore?
8. Tommaso ha costruito un modello di tetraedro regolare e vuole colorare le 4 facce, ognuna con un colore diverso. In quanti modi può farlo se ha a disposizione 10 colori? E se invece si fosse trattato di un cubo?
9. Si calcoli il valore medio della funzione:
$$f(x) = \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$
nell'intervallo $1 \le x \le 4$.
10. Si controlli se la funzione $f(x) = tgx + senx + 7$, nell'intervallo chiuso $[0, \pi]$, verifica le ipotesi del teorema di Rolle e, in caso affermativo, si calcoli l'ascissa dei punti ove si annulla la derivata prima.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione suppletiva 2014
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sono dati un quarto di cerchio AOB e la tangente t ad esso in A. Dal punto O si mandi una semiretta che intersechi l'arco AB e la tangente t, rispettivamente, in M ed N.

1. Posto $A\hat{O}M = a$, si calcoli il rapporto:

$$\frac{MN}{MA}$$

e lo si esprima in funzione di $x = sen\frac{\alpha}{2}$, controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{x}{1-2x^2}$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.
3. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso; si scriva poi l'equazione della circonferenza con il centro nel suddetto punto di flesso e tangente agli asintoti verticali di γ.
4. Si determini l'area della regione di piano limitata dalla curva γ dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = \frac{1}{3}$ e $x = \frac{1}{2}$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x\log^2 x}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di ascissa $x = e$ e si calcoli l'area del trapezio T che essa forma con l'asse x, con l'asintoto verticale e con la retta di equazione $x = e$.
3. Si calcoli l'area della regione S_k delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = e$ e $x = k$ $(k > e)$.
4. Si faccia vedere che S_k tende verso un limite finito quando k tende a $+\infty$ e si confronti tale limite col valore numerico dell'area del trapezio T, arrotondato alla quarta cifra decimale.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si determini il dominio della funzione $f(x)=\sqrt{e^{2x}-3e^{x}+2}$.
2. La funzione:
$$f(x)=sen\sqrt[3]{x},$$
è evidentemente continua nel punto $x=0$. Si dimostri che nello stesso punto non è derivabile.
3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x)=\frac{x^2}{3}\left(2+sen^2\frac{1}{x}\right)$$
nel punto P di ascissa $x=\frac{1}{\pi}$.
4. Data la parte finita di piano compresa tra le rette $x+y-1=0$ e $x-1=0$ ed il grafico della funzione $y=e^{x}$, si determini la sua area ed il volume del solido ottenuto facendola ruotare di un giro completo attorno all'asse x.
5. Un osservatore posto sulla riva di un lago a 236 m sopra il livello dell'acqua, vede un aereo sotto un angolo di elevazione α di 42,4° e la sua immagine riflessa sull'acqua sotto un angolo di depressione β di 46,5°. Si trovi l'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore.
6. Si trovino gli eventuali flessi della curva:
$$f(x)=x\left[(\log 3x)^2-2\log 3x+2\right].$$
7. Una scatola di forma cilindrica ha raggio r e altezza h. Se si aumenta del 5% ciascuna sua dimensione, di quanto aumenterà, in termini percentuali, il suo volume?
8. Si calcoli il limite della funzione $\frac{senx+\cos x-\sqrt{2}}{\log sen2x}$, quando x tende a $\frac{\pi}{4}$.
9. Si calcoli il valore medio della funzione:
$$y=\cos^5 x,$$
nell'intervallo $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.
10. Un certo numero formato da tre cifre è uguale a 56 volte la somma delle cifre che lo compongono. La cifra delle unità è uguale a quella delle decine aumentata di 4, mentre, scambiando la cifra delle unità con quella delle centinaia, si ottiene un valore che è uguale a quello originario diminuito di 99. Si determini il numero di partenza.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione suppletiva 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sei stato incaricato di progettare una pista da ballo all'esterno di un locale in costruzione in una zona balneare. Il progetto prevede, oltre alla pista, delle zone verdi e una tettoia che consenta l'uso della pista anche in caso di pioggia.

La pista da ballo viene rappresentata, in un sistema di riferimento cartesiano *Oxy* in cui l'unità di misura corrisponde a 1 metro, all'interno del rettangolo avente come vertici i punti di coordinate (-4, 0), (4, 0), (-4, 25) e (4, 25); nella scelta della sagoma della pista va rispettato il vincolo urbanistico che stabilisce che essa non può occupare più del 60% della superficie di tale rettangolo.

Un tuo collaboratore predispone due soluzioni: la prima è rappresentata dalla parte di piano compresa tra l'asse x e la curva di equazione, $y = -\frac{25}{16}x^2 + 25$, $x \in [-4, 4]$, la seconda dalla parte di piano compresa tra l'asse x, la curva di equazione $y = \frac{100}{4+x^2}$ e le rette $x = -2\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$.

1. Studia le due soluzioni, e traccia il grafico di entrambe nel riferimento cartesiano *Oxy*. Individua in particolare le caratteristiche delle due funzioni che sono più rilevanti nella fase di costruzione della pista: eventuali punti di massimo e di minimo, di flesso, angolosi.

Il proprietario del locale sceglie la seconda soluzione, che ritiene più elegante, ma ti chiede di realizzare due aiuole nelle porzioni di terreno comprese tra le due curve che gli hai proposto.

2. Determina l'area della soluzione scelta e verifica che essa rispetti i vincoli urbanistici, in modo da poter poi procedere all'acquisto del materiale necessario per la costruzione della pista.

Poiché lo scavo effettuato ai lati della pista ha reso il terreno scosceso, hai fatto eseguire delle misure e hai verificato che sia per $x \in \left[-2\sqrt{3}, 0\right]$ che per $x \in \left[0, 2\sqrt{3}\right]$ la profondità dello scavo stesso varia con la legge lineare rappresentata dalla funzione $f(x) = |x| + 1$; è dunque necessario acquistare del terreno per riempire lo scavo e realizzare le aiuole richieste.

3. Calcola quanti metri cubi di terreno vegetale sono necessari per riempire l'aiuola delimitata dalle suddette curve nell'intervallo $\left[-2\sqrt{3}, 0\right]$.

Per realizzare la tettoia, è necessario usare un piano leggermente inclinato, per favorire il deflusso della pioggia. Nel sistema di riferimento cartesiano *Oxyz*, tale piano deve passare per i punti (-4, 0, 5), (4, 0, 5) e (0, 25, 4), in modo che la quota vari gradualmente dai 5 metri in corrispondenza dell'inizio della pista, ai 4 metri in corrispondenza della fine della pista stessa.

4. Determina l'equazione del piano prescelto.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

PROBLEMA 2

La rotazione intorno all'asse x dei grafici della famiglia di funzioni:

$$f_k(x) = \frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x} \quad con \;\; x \in \Re, \qquad 0 \le x \le k^2, \qquad k \in \Re, \qquad k > 0$$

genera dei solidi di rotazione di forma aerodinamica.

1. In un riferimento cartesiano *Oxy*, traccia i grafici delle funzioni $f_k(x)$, per $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ e determina il valore di k per il quale il volume del solido di rotazione assume il valore $\frac{64\pi}{192}$;
2. calcola il diametro massimo dei solidi di rotazione in funzione di k, e determina il valore dell'angolo formato dalla tangente al grafico di f_k con l'asse x per $x = 0$;
3. assumendo che la distribuzione della massa sia omogenea, il baricentro del corpo di rotazione si trova sull'asse x, per ragioni di simmetria. Determina l'ascissa x_s del baricentro in funzione del parametro k, sapendo che vale:

$$x_s = \frac{\pi \int_a^b x[f_k(x)]^2 dx}{V}$$

dove gli estremi di integrazione *a* e *b* vanno scelti opportunamente, e *V* indica il volume del solido di rotazione;

4. all'interno del solido di rotazione generato da f_k, per $k = 3$, si vorrebbe collocare un cilindro di raggio 0,5 e di altezza 6. Verifica se ciò è possibile, motivando la tua risposta.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Data la funzione integrale $\int_1^x ln(t)\, dt$, determinare per quali valori di x il suo grafico incontra la retta di equazione $y = 2x + 1$.
2. Data la famiglia di funzioni $y = -x^3 + 6kx + 33$ trovare la funzione tangente nel punto di ascissa 3 ad una retta parallela alla bisettrice del primo quadrante. Determinare l'equazione di detta tangente.
3. Vengono lanciati due dadi. Dei due punteggi, viene considerato il maggiore; se sono uguali, viene considerato il punteggio comune dei due dadi. Detto X il punteggio registrato, riportare in una tabella la distribuzione di probabilità di X e mostrare che $p(X = 3) = \frac{5}{36}$. Calcolare inoltre la media e la varianza di X.
4. In un sistema di riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$ sono dati i punti A (−3, 4, 0) e C (−2, 1, 2). I tre punti O, A e C giacciono su un piano E. Determinare l'equazione che descrive il piano E.
5. Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $x = 2$ della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y^2 = 8x$ e dalla retta stessa.
6. Preso un punto C su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, sia M il punto medio dell'arco BC. Determinare il valore massimo che può assumere l'area del quadrilatero $ABMC$.
7. Una fabbrica produce mediamente il 3% di prodotti difettosi. Determinare la probabilità che in un campione di 100 prodotti ve ne siano 2 difettosi, usando:
   - la distribuzione binomiale;
   - la distribuzione di Poisson.
8. Provare che la funzione $y = e^x - tgx$ ha infiniti zeri, mentre la funzione $y = e^x - arctgx$ non ne ha alcuno.
9. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x \cdot e^x$, adoperando la definizione di derivata.
10. Sia la derivata seconda di una funzione reale $f(x)$ data da $f''(x) = 3x - 6$. Determinare l'espressione di $f(x)$, sapendo che il grafico della funzione passa per il punto P (2, −7) e che l'angolo formato dalla tangente al grafico di $f(x)$ con l'asse y nel punto di ascissa x = 0 vale 45°.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.