Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano Oxy sono date le curve λ e *r* d'equazioni:

$$\lambda:\ x^2 = 4(x-y) \quad \text{e} \quad r:\ 4y = x+6 .$$

1. Si provi che λ e *r* non hanno punti comuni.
2. Si trovi il punto $P \in \lambda$ che ha distanza minima da *r*.
3. Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta *s*, simmetrica di *r* rispetto all'asse x.
4. Si determini il valore di *c* per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione S del I quadrante compresa tra λ e l'asse x.
5. Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione *f* definita sull'intervallo $[0\,;+\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}x^2(3-2\log x)+1 \quad se \quad x>0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se *f* è *continua* e *derivabile* in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0\,;+\infty[$, un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta *r* tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia *n* un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di *n*, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente *r* e dalle due rette: $x = \dfrac{1}{n}$ e $x = 1$.
5. Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare *sen18°, sen36°*.
2. Si dia una definizione di retta tangente ad una curva. Successivamente, si dimostri che la curva $y = x\, sen\, x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $sen\, x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $sen\, x = -1$.
3. Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali $\sigma\ e\ \varphi$ la cui composizione $\sigma \circ \varphi$ dia luogo alla traslazione di equazione:
$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$
Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso $\varphi \circ \sigma$.
4. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di *0,4 litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di latta necessaria per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).
5. Come si definisce e quale è l'importanza del numero *e* di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]? Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.
6. Le rette *r* e *s* d'equazioni rispettive $y = 1 + 2x$ e $y = 2x - 4$ si corrispondono in una omotetia σ di centro l'origine O. Si determini σ.
7. Come si definisce *n!* (*n fattoriale*) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?
8. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = e^t + 2$ e $y = e^{-t} + 3$ nel suo punto di coordinate (3, 4).
9. Quale è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?
10. Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni *f* e *g* determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base *e*.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di *f* e *g* sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = -e^2$, l'area che è compresa fra i grafici di f e g (con $x > 0$) nella striscia di piano determinata dalle rette d'equazioni $y = -1$ e $y = -2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64ª casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.
2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
3. In un piano sono dati una retta r e due punti A e B ad essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine r. Si trovi il più breve cammino che congiunga A con B toccando r.
4. Si dimostri che l'equazione $\operatorname{sen} x = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta.
5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.
6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.
7. *Bruno de Finetti* (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: "*che cos'è la probabilità?*" era solito rispondere: "*la probabilità non esiste!*". Quale significato puoi attribuire a tale risposta? E' possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?
8. Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità $\geq 0{,}99$ di colpirlo almeno una volta?
9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?
10. Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

calcola un'approssimazione di π utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia a un numero reale maggiore di zero e sia g la funzione definita, per ogni $x \in R$, da: $g(x) = a^x + a^{-x}$.

1. Si dimostri che, se $a \neq 1$, g è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.
2. Posto $a = e$, si disegni il grafico della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$ e si disegni altresì il grafico della funzione $\dfrac{1}{f(x)}$.
3. Si calcoli $\int_0^t \dfrac{1}{f(x)}dx$; successivamente, se ne trovi il limite per $t \to \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato.
4. Verificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è $\dfrac{\pi}{4}$, si illustri una procedura numerica che consenta di approssimare tale valore.

PROBLEMA 2

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora è $AC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.
2. La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asse x, con $1 \leq x \leq e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}.
3. Si dimostri che l'insieme delle *omotetie* con centro O fissato è un *gruppo*.
4. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ, σ, σ^2 e come tali parametri influenzino il grafico di *f(x)*.

5. Si consideri il teorema: «*la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto*» e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria *non-euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con il disegno.
6. Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.
7. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto (1, 2).
8. A *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: «Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare».
9. Si dimostri che l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.
10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera *S* e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta *r* passante per il centro di *S*, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2008

Seconda prova scritta

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO INTERNAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si considerino i triangoli ABC con A(1, 0), B(3, 0) e C variabile sulla retta d'equazione y=2x.

1. Si provi che i punti (1, 2) e $\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$ corrispondono alle due sole posizioni di C per cui è $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$
2. Si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto, al variare di C, dall'ortocentro del triangolo ABC. Si tracci γ.
3. Si calcoli l'area Ω della parte di piano delimitata da γ e dalle tangenti a γ nei punti A e B.
4. Verificato che è $\Omega = \frac{3}{2}(\ln 3 - 1)$ si illustri una procedura numerica per il calcolo approssimato di $\ln 3$.

PROBLEMA 2

Siano *f* e *g* le funzioni definite, per ogni x reale, da $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$

1. Si traccino i grafici di *f* e di *g* e si indichi con A la loro intersezione di ascissa negativa.
2. Si calcoli, con uno dei metodi di approssimazione numerica studiati, l'ascissa di A con due cifre decimali esatte.
3. Quanti e quali sono gli zeri della funzione $h(x) = 2^x - x^2$? Si tracci il grafico di *h.*
4. Si calcoli l'area racchiusa tra il grafico di *h* e l'asse x sull'intervallo [2, 4].

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO INTERNAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.
2. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $sen \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$
3. Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.
4. Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è: $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0$
5. Nel piano riferito a coordinate cartesiane (x, y) si dica qual è l'insieme dei punti per i quali risulta: $y^2 - x^3 > 0$
6. I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9 e 12 cm. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.
7. Perché è *geometria "non" euclidea*? Che cosa e come viene negato della geometria euclidea? Si illustri la questione con gli esempi che si ritengono più adeguati.
8. Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.
9. In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?
10. Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di $y = e^{-2x}$? Quale quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

dove n è un intero positivo e $x \in R$

1. Si verifichi che la derivata di $f(x)$ è: $f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}$
2. Si dica se la funzione f ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando n è dispari, $f(x) \leq 1$ per ogni x reale.
3. Si studi la funzione g ottenuta da f quando $n = 2$ e se ne disegni il grafico.
4. Si calcoli $\int_0^2 g(x)dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica.

PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la funzione $f: R \to R$ definita da $f(x) = x^3 + kx$, con k parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo o nullo).
2. Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta d'equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.
3. Sia **D** la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g. Si calcoli l'area di **D**.
4. La regione **D** è la base di un solido **W** le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di **W**.

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

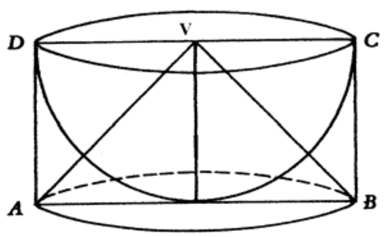
CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

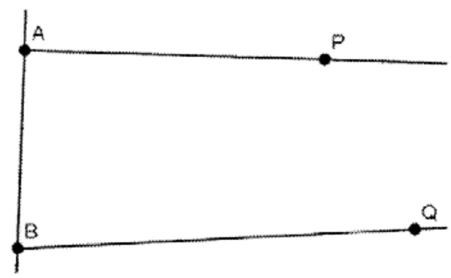
QUESTIONARIO

1. Siano: $0 < a < b$ e $x \in [-b, b]$. Si provi che: $\int_{-b}^{b} |x-a| \, dx = a^2 + b^2$.
2. Sono dati gli insiemi $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ e $B = \{a,\ b,\ c\}$. Tra le possibili *funzioni* (o *applicazioni*) di A in B, ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?
3. Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 *mm*) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati)
4. *"Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni"*. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:
$$\frac{0}{1};\ \frac{0}{0};\ \frac{1}{0};\ 0^0$$
A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.
6. Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $senx = 0$, con punto iniziale $x_0 = 3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?
7. Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$
8. Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?
9. Nei *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"*, Galileo Galilei descrive la



costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.
Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.

10. "*Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta AB e gli angoli $P\hat{A}B$ e $Q\hat{B}A$ hanno somma minore di 180°, allora le semirette AP e BQ, prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q, si devono intersecare*". Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.



Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

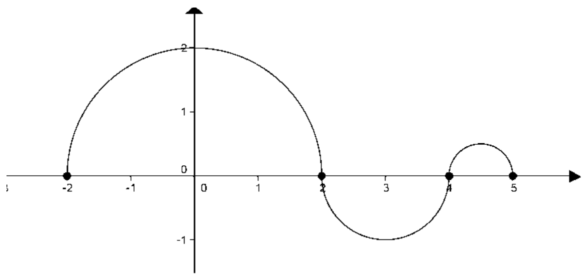
Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nella figura che segue è riportato il grafico di $g(x)$ per $-2 \le x \le 5$ essendo g la derivata di una funzione f. Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in (0, 0), (3, 0), ($\frac{9}{2}$, 0) e raggi rispettivi $2, 1, \frac{1}{2}$.



a) Si scriva un'espressione analitica di *g(x)*. Vi sono punti in cui *g(x)* non è derivabile? Se sì, quali sono? E perchè?

b) Per quali valori di x, $-2 < x < 5$, la funzione f presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.

c) Se $f(x) = \int_{-2}^{x} g(t)\,dt$, si determini $f(4)$ e $f(1)$.

d) Si determinino i punti in cui la funzione f ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di $f(x)$? Qual è l'andamento qualitativo di $f(x)$?

PROBLEMA 2

Nel piano riferito ad un sistema *Oxy* di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni: $y^2 = 2x$ e $x^2 = y$.

a) Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con *A* il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine *O*.

b) L'ascissa di A è $\sqrt[3]{2}$; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di 10^{-2}.

c) Sia **D** la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi *O* e *A*. Si determini la retta *r*, parallela all'asse *x*, che stacca su **D** il segmento di lunghezza massima.

d) Si consideri il solido **W** ottenuto dalla rotazione di **D** intorno all'asse *x*. Se si taglia **W** con piani ortogonali all'asse *x*, quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di **W**.

Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x) = n!\, a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n.
2. Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli.
3. Sia r la retta d'equazione $y = ax$ tangente al grafico di $y = e^x$. Quale è la misura in gradi e primi sessagesimali dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli con la precisione di due cifre decimali lo zero della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$. Come si può essere certi che esiste un unico zero?
5. Sia G il grafico di una funzione $x \to f(x)$ con $x \in R$. Si illustri in che modo è possibile stabilire se G è simmetrico rispetto alla retta $x = k$.
6. Si trovi l'equazione cartesiana del luogo geometrico descritto dal punto P di coordinate $(3\cos t, 2\operatorname{sen} t)$ al variare di t, $0 \le t \le 2\pi$.
7. Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenti la risposta.
8. Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?
9. Si provi che non esiste un triangolo ABC con $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\hat{B}C = 45°$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\hat{B}C = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.
10. Si consideri la regione R delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$.

    L'integrale $\int_0^4 2\pi x\left(\sqrt{x}\right) dx$ fornisce il volume del solido:

    a) generato da R nella rotazione intorno all'asse x;
    b) generato da R nella rotazione intorno all'asse y;
    c) di base R le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi di raggio $\sqrt{x}$;
    d) nessuno di questi.

    Si motivi esaurientemente la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2011
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita sull'insieme $\boldsymbol{R}$ dei numeri reali da $f(x) = x + ln4 + \frac{2}{e^x + 1}$ e sia Γ la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento Oxy.

1. Si determini il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$. Si calcoli $f(x) + f(-x)$ e si spieghi perchè dal risultato si può dedurre che il punto $A(0;\ 1 + ln4)$ è centro di simmetria di Γ.
2. Si provi che, per tutti i reali m, l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola soluzione in $\boldsymbol{R}$. Sia α la soluzione dell'equazione $f(x) = 3$; per quale valore di m il numero $-\alpha$ è soluzione dell'equazione $f(x) = m$?
3. Si provi che, per tutti gli x reali, è: $f(x) = x + 2 + ln4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$. Si provi altresì che la retta r di equazione $y = x + ln4$ e la retta s di equazione $y = x + 2 + ln4$ sono asintoti di Γ e che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s.
4. Posto $I(\beta) = \int_0^\beta \left[f(x) - x - ln4\right]dx$, si calcoli: $\lim_{\beta \to +\infty} I(\beta)$. Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto?

PROBLEMA 2

Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \qquad \text{e} \qquad g(x) = sen\frac{\pi}{2}x$$

1. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy. Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-10;\ 10]$ e se ne indichino le coordinate.
2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo $[0;\ 4]$. Si calcoli l'area di R.
3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y = -15$ e $y = -5$, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}).
4. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 5 - x$. Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

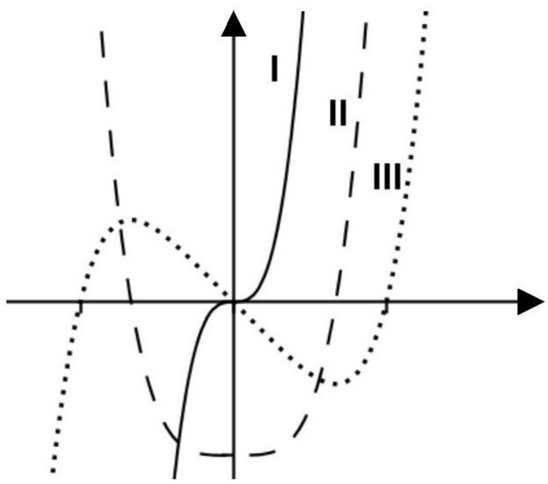
CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo ad una sua amica che la *geometria euclidea* non è più vera perchè per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di *geometria non euclidea*. Silvia ha ragione? Si motivi la risposta.
2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4; 0).
3. Sia R la regione delimitata, per $x \in [0, \pi]$, dalla curva $y = sen\, x$ e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W.
4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n.
5. In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme N dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: «....se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?
6. Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?
7. Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?
8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perchè è citato così spesso?
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.
10. Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''.
Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?



	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

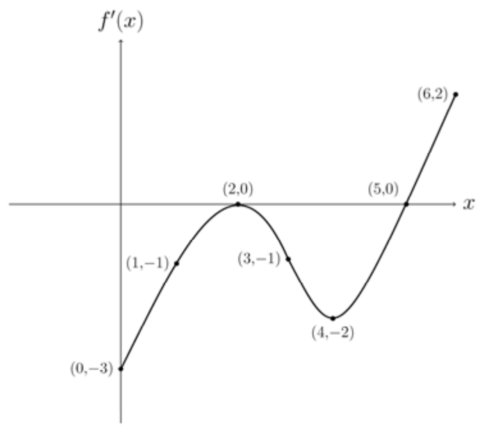
Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Della funzione *f*, definita per $0 \le x \le 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per $x = 2$ e $x = 4$. Si sa anche che $f(0) = 9$, $f(3) = 6$ e $f(5) = 3$.



1. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di *f* motivando le risposte in modo esauriente.
2. Per quale valore di *x* la funzione *f* presenta il suo minimo assoluto? Sapendo che $\int_0^6 f'(t)dt = -5$ per quale valore di *x* la funzione *f* presenta il suo massimo assoluto?
3. Sulla base delle informazioni note, quale andamento potrebbe avere il grafico di *f* ?
4. Sia *g* la funzione definita da $g(x) = x\,f(x)$. Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di *f* e di *g* nei rispettivi punti di ascissa $x = 3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano.

PROBLEMA 2

Siano *f* e *g* le funzioni definite da $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$.

1. Fissato un riferimento cartesiano *Oxy*, si disegnino i grafici di *f* e di *g* e si calcoli l'area della regione R che essi delimitano tra $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$.
2. La regione R, ruotando attorno all'asse *x*, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse *y*, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.
3. Fissato $x_0 > 0$, si considerino le rette *r* e *s* tangenti ai grafici di *f* e di *g* nei rispettivi punti di ascissa x_0. Si dimostri che esiste un solo x_0 per il quale *r* e *s* sono parallele. Di tale valore x_0 si calcoli un'approssimazione arrotondata ai centesimi.
4. Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. Per quali valori di *x* la funzione $h(x)$ presenta, nell'intervallo chiuso $\frac{1}{2} \le x \le 1$, il minimo e il massimo assoluti? Si illustri il ragionamento seguito.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si calcoli

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2}$$

2. Una moneta da 1 euro (il suo diametro è 23,25 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle esagonali (regolari) di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati degli esagoni)?

3. Sia $f(x) = 3^x$. Per quale valore di x, approssimato a meno di 10^{-3}, la pendenza della retta tangente alla curva nel punto $(x, f(x))$ è uguale a 1?

4. L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta.

5. Siano dati nello spazio n punti P_1, P_2, P_3, ... P_n. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

6. Si dimostri che la curva di equazione $y = x^3 + ax + b$ ha uno ed un solo punto di flesso rispetto a cui è simmetrica.

7. E' dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h.

8. Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A?

9. Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad un retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

10. Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2013
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

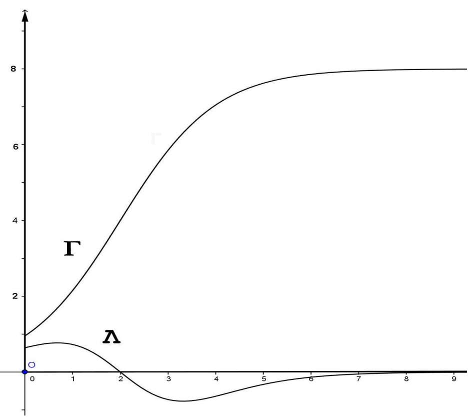
Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Una funzione $f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0,+\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici Γ e Λ di $f(x)$ e della sua derivata seconda $f''(x)$. La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate $(2;4)$, passa per $(0;0)$, mentre le rette $y=8$ e $y=0$ sono asintoti orizzontali per Γ e Λ, rispettivamente.



1) Si dimostri che la funzione $f'(x)$, ovvero la derivata prima di $f(x)$, ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni x del dominio è: $f''(x) \le f'(x) \le f(x)$, qual è un possibile andamento di $f'(x)$?
2) Si supponga che $f(x)$ costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che Γ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?
3) Se Γ è il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{a}{1+e^{b-x}}$, si provi che $a=8$ e $b=2$.
4) Nell'ipotesi del punto 3), si calcoli l'area della regione di piano delimitata da Λ e dall'asse x sull'intervallo $[0,2]$.

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita per tutti gli x positivi da $f(x)=x^3 \ln x$.

1. Si studi f e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici *Oxy*; accertato che γ presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale.
2. Sia P il punto in cui γ interseca l'asse *x*. Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine e tangente a γ in P.
3. Sia R la regione delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo aperto a sinistra $]0,1]$. Si calcoli l'area di R, illustrando il ragionamento seguito, e la si esprima in mm^2 avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 *decimetro*.
4. Si disegni la curva simmetrica di γ rispetto all'asse y e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di γ rispetto alla retta $y=-1$.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.
2. Se la funzione $f(x)-f(2x)$ ha derivata 5 in $x=1$ e derivata 7 in $x=2$, qual è la derivata di $f(x)-f(4x)$ in $x=1$?
3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2;-1)$ e $B(-6;-8)$. Si determini l'equazione della retta passante per *B* e avente distanza massima da *A*.
4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza *h* e i lati *a* e *b* delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di *a*, *b* e *h*, illustrando il ragionamento seguito.
5. In un libro si legge: *"se per la dilatazione corrispondente a un certo aumento della temperatura un corpo si allunga (in tutte le direzioni) di una certa percentuale (p.es. 0,38%), esso si accresce in volume in proporzione tripla (cioè dell'1,14%), mentre la sua superficie si accresce in proporzione doppia (cioè di 0,76%)"*. È così? Si motivi esaurientemente la risposta.
6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7!=5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la 5036-esima posizione e quale quello che occupa la 1441-esima posizione?
7. In un gruppo di 10 persone il 60% ha occhi azzurri. Dal gruppo si selezionano a caso due persone. Quale è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri?
8. Si mostri, senza utilizzare il teorema di *l'Hôpital*, che:
$$\lim_{x\to\pi}\frac{e^{senx}-e^{sen\pi}}{x-\pi}=-1$$
9. Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.
10. Si stabilisca per quali valori $k\in R$ l'equazione $x^2(3-x)=k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo $[0,3]$. Posto $k=3$, si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

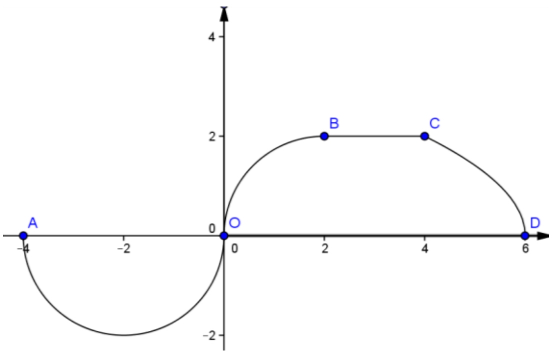
Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

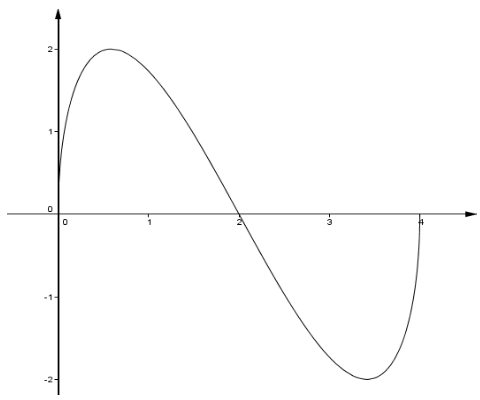
Sia $g(x)$ una funzione continua sull'intervallo chiuso $[-4, 6]$. Il grafico di $g(x)$, disegnato a lato, passa per i punti A$(-4;0)$, O$(0;0)$, B$(2;2)$, C$(4;2)$, D$(6;0)$ e consiste della semicirconferenza di diametro AO, dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi O e B, del segmento BC e dell'arco CD di una parabola avente per asse di simmetria l'asse x.



1. Si dica, giustificando la risposta, se $g(x)$ è derivabile nei punti A, O, B, C, D.
2. Posto $f(x)=\int_{-4}^{x} g(t)\,dt$, si calcolino: $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$.
3. Per quali valori di $x \in [-4, 6]$, $f(x)$ è positiva, negativa o nulla? E per quali x è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda $f''(x)$?
4. La funzione $f(x)$ presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di $f(x)$?

PROBLEMA 2

Sia $f(x)=(2-x)\sqrt{4x-x^2}$



1. A lato è disegnato il grafico Γ di $f(x)$. Si dimostri che $(2;0)$ è centro di simmetria di Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in esso a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.
2. Si dimostri che, qualunque sia t, $0<t<2$, le rette tangenti a Γ nei suoi punti di ascisse $2+t$ e $2-t$ sono parallele. Esistono rette tangenti a Γ che siano parallele alla retta $21x+10y+31=0$? E che siano parallele alla retta $23x+12y+35=0$?
3. Si calcoli l'area della regione compresa tra Γ e l'asse x.
4. Sia $h(x)=sen(f(x))$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x)=k$ ha 4 soluzioni distinte? Qual è il valore di $\int_{0}^{4} h(x)\,dx$?

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

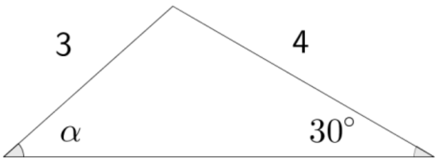
CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Nel triangolo disegnato a lato, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di α?



2. Si spieghi perchè non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni.
3. Venti palline sono poste in un'urna. Cinque sono rosse, cinque verdi, cinque gialle e cinque bianche. Dall'urna si estraggono a caso, senza reimbussolamento, tre palline. Si valutino le seguenti probabilità:
   - esattamente una pallina è rossa
   - le tre palline sono di colori differenti.
4. Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x)=e^{1/x}$ e dall'asse x sull'intervallo $[-2,-1]$. In ogni punto di R di ascissa x, l'altezza del solido è data da $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$. Si calcoli il volume del solido.
5. In un contesto di geometria non euclidea si illustri un esempio di triangolo i cui angoli non hanno somma 180°.
6. Si calcolino l'altezza e il raggio del massimo cilindro circolare retto inscritto in una sfera di raggio $\sqrt{3}$.
7. Se $f'(x)=\ln x - x + 2$, per quale dei seguenti valori approssimati di x, f ha un minimo relativo?

   (A) 5,146 (B) 3,146 (C) 1,000 (D) 0,159 (E) 0
8. La "*zara*" è un gioco d'azzardo di origine araba che conobbe particolare fortuna in Italia in epoca medievale – ne parla anche Dante nella *Divina Commedia* – e si giocava con tre dadi. Si confronti la probabilità di ottenere in un lancio la somma 9 con quella di ottenere la somma 10.
9. Le lettere N, Z, Q, R denotano, rispettivamente, gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali mentre il simbolo $\aleph_0$ (*aleph-zero*) indica la cardinalità di N. Gli insiemi Z, Q e R hanno anch'essi cardinalità $\aleph_0$? Si motivi la risposta.
10. Si stabilisca per quali valori reali di a e b, si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+bx}-2}{x}=1$$

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

A) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

B) Posto che lo spigolo della base ABC della piramide sia lungo 4 cm:

1. calcolare la misura dello spigolo della base MNP del prisma, complanare ad ABC;
2. supposto che gli spigoli AB ed MN siano paralleli, riferire il piano dei triangoli ABC ed MNP ad un sistema di assi cartesiani avente l'origine in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta AB e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
3. determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B, M e verificare che passa pure per N;
4. dopo aver spiegato perché la trasformazione che muta il triangolo ABC nel triangolo MNP è una similitudine, trovarne le equazioni;
5. spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo MNP rispetto al triangolo ABC.

PROBLEMA 2.

È assegnata la funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, dove a è un parametro reale non nullo.

1. Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.
2. Una volta riferito il piano ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) ed indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a>0$, scrivere l'equazione della circonferenza g di diametro OA.
3. Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza g e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
4. Calcolare il valore $\bar{a}$ di a per il quale la circonferenza g e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.
5. Verificare che esiste un valore a' di a per il quale la funzione $f_{a'}(x)$ si può considerare la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua e determinare la funzione di distribuzione di tale variabile.

QUESTIONARIO.

1. È dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi.
   Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle basi del trapezio.
2. Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D.
3. Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione: $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$.
   Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ oppure $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ (k intero qualsiasi);
   Gianna trova la seguente soluzione: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ (k intero qualsiasi).
   È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no?
   Fornire una risposta esauriente.
4. Si consideri la seguente equazione in x: $(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0$ dove k è un parametro reale diverso da 2.
   Indicate con x' ed x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x'+x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.
5. Il limite della funzione $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ per $x \to 0$:
   [A] è uguale ad 1;
   [B] è uguale a $+\infty$;
   [C] non esiste;
   [D] è uguale ad e;
   [E] è uguale ad $\frac{1}{e}$,
   essendo “e” la base dei logaritmi naturali.
   Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.
6. Dimostrare che, se la derivata di una funzione reale di variabile reale $f(x)$ è nulla per ogni x di un dato intervallo J, allora $f(x)$ è costante in J.
7. Spiegare in maniera esauriente perché una funzione reale di variabile reale integrabile in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ non necessariamente ammette primitiva in $[a, b]$.
8. In un'urna ci sono due palline bianche, in una seconda urna ci sono due palline nere e in una terza urna ci sono una pallina bianca e una pallina nera. Scegli a caso un'urna ed estrai, sempre a caso, una delle due palline in essa contenute: è bianca. Saresti disposto a scommettere alla pari che la pallina rimasta nell'urna che hai scelto sia essa pure bianca?
9. Si consideri il seguente sistema nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a \end{cases}$$

dove a è un parametro reale.
Il sistema è:
[A] determinato per ogni valore di a;
[B] indeterminato per un valore di a ed impossibile per un valore di a;
[C] indeterminato per nessun valore di a, ma impossibile per un valore di a;
[D] impossibile per nessun valore di a, ma indeterminato per un valore di a.
Un sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

10. Si consideri la trasformazione geometrica di equazioni:
    $x' = 2x + my - 1$
    $y' = mx - 2y - 2$
    dove m è un parametro reale.
    Trovare l'equazione del luogo geometrico dei suoi punti uniti.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Indirizzo: ________________

CORSO SPERIMENTALE

Sessione suppletiva 2006

Tema di ______________________

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le due parabole p' e p" di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2, \quad x = y^2 - 2y.$$

a) Fornirne la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.
b) Indicato con V' il vertice della parabola p', con V" il vertice della parabola p" e con P il punto in cui p" interseca il semiasse positivo delle y, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco V'V" della parabola p', dall'arco V"P della parabola p" e dal segmento V'P.
c) Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.
d) Le due parabole p' e p" sono congruenti: farlo vedere, dimostrando che esiste almeno un'isometria che trasforma una di esse nell'altra e trovando le equazioni di tale isometria.
e) Stabilire se l'isometria trovata ammette elementi uniti.

PROBLEMA 2.

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x + k}{x^2},$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a) Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno ed un solo flesso.
b) Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta r di equazione $x+27y-9=0$.
c) Disegnare l'andamento di γ, dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto B che t ha in comune con γ.
d) Trovare l'equazione della circonferenza di diametro AB.
e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva γ, dalla retta r e dall'asse x.

QUESTIONARIO

1. Si considerino il rettangolo ABCD e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta AD, il vertice nel punto medio del lato AB e passante per i punti C e D. In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume V' e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta CD genera un solido di volume V". Determinare il rapporto V'/V".

2. Il numero delle soluzioni dell'equazione sen2x cos x =2 nell'intervallo reale $[0, 2\pi]$ è:

[A] 0; [B] 2; [C] 3; [D] 5.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

3. Il limite della funzione $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, per $x \to 0$:

[A] non esiste; [B] è $+\infty$; [C] è 0; [D] è un valore finito diverso da 0.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4. Dimostrare che la funzione $f(x)=x^a$, dove a è un qualsiasi numero reale non nullo, è derivabile in ogni punto del suo dominio.

5. Il seguente teorema esprime la condizione d'integrabilità di Mengoli-Cauchy:

Se una funzione reale di variabile reale, definita in un intervallo chiuso e limitato [a,b], è ivi continua, allora ivi è anche integrabile.

Enunciare la proposizione inversa e spiegare in maniera esauriente perché tale proposizione non è un teorema.

6. Dire se è corretto o no, affermare che si ha:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$$

dove c è una costante arbitraria e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

7. Calcolare l'ampiezza dell'angolo formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al "primo".

8. Dimostrare che ogni similitudine trasforma una parabola in una parabola.

9. Un'urna contiene 150 palline, che possono essere di vetro o di plastica, bianche o nere. Per la precisione: 62 palline sono bianche, 38 sono di vetro nero e 40 sono di plastica bianca. Calcolare la probabilità che, estratta a caso una pallina, NON sia di plastica nera.

10. In ciascuna di tre buste uguali vi sono due cartoncini: in una busta essi sono bianchi, in un'altra sono neri, nella terza sono uno bianco e l'altro nero. Si estrae a caso una busta e, da essa, un cartoncino. Qual è la probabilità che il cartoncino rimasto in questa busta sia dello stesso colore di quello estratto?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

Sessione suppletiva 2007 50021.2.1/1
Seconda prova scritta

Ministero della Pubblica Istruzione

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione integrale:

$$f(x) = \int_0^x (e^{3t} + 2e^{2t} - 3e^t)dt$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si scriva l'equazione della normale alla curva C nel punto di ascissa log2.
3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione x=log3.
4. Tenuto conto che: $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx$

   si calcoli un valore approssimato di log2, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

PROBLEMA 2

Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) si consideri il punto A(2,0).

1. Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:

   $$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 8,$$

   controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.
2. Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.
3. Si scriva l'equazione della parabola cubica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento OB e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.

Sessione suppletiva 2007 50021.2.1/1
Seconda prova scritta

Ministero della Pubblica Istruzione

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse delle x della regione finita di piano delimitata dalla curva $y = 2/x$ e dalla retta di equazione $y = -x + 3$.
2. Si calcoli il valore medio della funzione $y = \operatorname{sen}^3 x$, nell'intervallo $0 \le x \le \pi$.
3. Data la funzione $y = x^3 + kx^2 - kx + 3$, nell'intervallo chiuso $[1,2]$, si determini il valore di k per il quale sia ad essa applicabile il teorema di Rolle e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.
4. Si consideri la seguente proposizione: "In ogni triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati eguali è costante". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
5. Si dimostri che l'equazione $e^x - x^3 = 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
6. Si scelga a caso un punto P all'interno di un cerchio. Si determini la probabilità che esso sia più vicino al centro che alla circonferenza del cerchio.
7. Servendosi in maniera opportuna del principio di Cavalieri nel piano, si dimostri che l'area di un'ellisse di semiassi a, b è $S = \pi ab$.
8. Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x(1 - \cos x)}$, quando x tende a 0.
9. Si verifichi che la curva di equazione $y = x^3 + 3x^2 - 1$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.
10. Si risolva la disequazione $5\binom{x}{3} \le \binom{x+2}{3}$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Indirizzo: Piano Nazionale Informatica

CORSO SPERIMENTALE

Sessione suppletiva 2008

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a cinque quesiti scelti nel questionario.

PROBLEMA 1

Siano dati un cerchio di raggio r ed una sua corda AB uguale al lato del quadrato in esso inscritto.

1. Detto P un generico punto della circonferenza, giacente sull'arco maggiore di estremi A e B, si consideri il rapporto:
$$\frac{\overline{PA}^2+\overline{PB}^2}{\overline{AB}^2}$$
e lo si esprima in funzione di $x = tgP\hat{A}B$.
2. Si studi la funzione f(x) così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.
3. Detto C il punto d'intersezione della curva γ con il suo asintoto orizzontale, si scriva l'equazione della tangente a γ in C.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ, la suddetta tangente e la retta di equazione x = k, essendo k l'ascissa del punto di massimo relativo.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:
$$y = a\ sen^2x + b\ senx + c$$

1. Si determinino a, b, c, in modo che il suo grafico γ passi per A(0,2), per B(π/6,0) ed abbia in B tangente parallela alla retta $3\sqrt{3}x+2y-5=0$.
2. Si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.
3. Si calcoli il valore dell'area di ciascuna delle due parti di piano compresa fra la retta y=2 e la curva stessa.
4. Tra tutte le primitive della funzione data, si determini quella il cui grafico passa per P(0,6) e si scriva l'equazione della retta ad esso tangente in detto punto.

PNI

QUESTIONARIO

1. Si determinino le costanti a e b in modo tale che la funzione :
$$f(x) = \begin{cases} ax+b & per\ \ x \le 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & per\ x > 0 \end{cases}$$
risulti continua e derivabile nel punto x=0.

2. Un meteorite cade sulla Terra; qual è la probabilità che il punto d'incontro si trovi fra l'equatore e il tropico del Cancro (latitudine λ = 23° 27' nord)?
3. Si determini il numero reale positivo λ in modo che la curva rappresentativa della funzione $g(x) = e^{-\lambda x}$ divida in parti equiestese la regione delimitata dalla curva rappresentativa della funzione $f(x) = e^{\lambda x}$, dall'asse x e dalle rette x = 0 e x = 1.
4. Si determini la probabilità che, lanciando 8 volte una moneta non truccata, si ottenga 4 volte testa.
5. Si dimostri che l'equazione $(3-x)e^x - 3 = 0$ per x>0 ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
6. Si dimostri che il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera di raggio r è medio proporzionale fra il volume del cono equilatero inscritto e il volume della sfera.
7. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \arccos\sqrt{1-x^2}$ nell'intervallo $0 \le x \le 1$
8. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani sono assegnati i punti A(0,1), B(0,4). Si determini sul semiasse positivo delle ascisse un punto C dal quale il segmento AB è visto con un angolo di massima ampiezza.
9. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x) = \int_1^{\sqrt{\log x}} \frac{e^t}{t^2} dt .$$
nel punto P di ascissa x = e.
10. Tenuto conto che:
$$\frac{\pi}{6} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
si calcoli un'approssimazione di π, utilizzando uno dei metodi d'integrazione numerica studiati.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Indirizzo Y: P.N.I. + scientifico autonomia + scientifico e scientifico-tecnologico Brocca + Proteo.

CORSO SPERIMENTALE

Sessione suppletiva 2009

Tema di ________________

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \ln\sqrt{x^2+1} & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ \text{arctg sen}x & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

1. Si provi che essa è continua, ma non derivabile, nel punto x = 0.
2. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy). Per quel che riguarda le ascisse positive, ci si limiterà all'intervallo 0 ≤ x ≤ 2π.
3. Si calcoli l'area della superficie piana, situata nel II quadrante, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalla retta di equazione x = -1.
4. Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana, delimitata dall'asse delle x e dall'arco di γ i cui estremi hanno ascisse 0 e π.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = 2 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

1. Si determinino le costanti a e b in modo che risulti:

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx = \frac{10}{3} - 6ln\frac{5}{3}$$

2. Si studi la funzione così ottenuta e se ne tracci il grafico γ.
3. Si conduca la tangente a γ nel punto di ascissa x = 0 e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con i due asintoti.
4. La retta y = k incontri γ in due punti di ascissa x_1 e x_2 . Si esprimano, in funzione di k, la somma e il prodotto di tali ascisse. Si dimostri che la quantità
$$S = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1}$$
è indipendente dal valore di k e se ne calcoli il valore.

QUESTIONARIO

1. Nel gioco del lotto, qual è la probabilità dell'estrazione di un numero assegnato? Quante estrazioni occorre effettuare perché si possa aspettare, con una probabilità p = 1/2 assegnata, di vederlo uscire almeno una volta?
2. Sul diametro MN di un cerchio, si considerino due punti P e Q, e su MP, MQ, NP, NQ come diametri si descrivano quattro semicerchi, i primi due posti in una stessa parte rispetto alla retta MN, gli altri due posti nell'altra parte. Si dimostri che il perimetro del quadrilatero curvilineo (pelecoide) così ottenuto, ha la stessa lunghezza della circonferenza data.
3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \frac{e^{t^2}}{|t| + 1}\, dt$$
nel punto P di ascissa x = π/2.
4. Siano dati una sfera di raggio *r*, il cubo in essa inscritto e il cono circolare retto inscritto nel cubo. Si scelga a caso un punto all'interno della sfera: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al cono.
5. Nell' omotetia di centro O(0,0) e rapporto k = -4, si determini l'equazione della circonferenza corrispondente alla $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. Si confrontino fra di loro i centri e i raggi delle due circonferenze.
6. Dati due punti A e B distanti tra loro 5 cm, si dica qual è il luogo dei punti C dello spazio tali che il triangolo ABC sia rettangolo in A ed abbia area uguale a $1\ cm^2$.

7. Si discuta il seguente sistema lineare omogeneo in relazione al parametro reale λ e si determinino in ogni caso le eventuali soluzioni:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ (\lambda - 1)x + \lambda y + 4z = 0 \\ \lambda x + 5y + (2\lambda + 1)z = 0. \end{cases}$$
8. Le lunghezze dei lati di un triangolo sono numeri interi consecutivi e l'angolo di maggior ampiezza è il doppio di quello di ampiezza minore. Si calcolino la lunghezza del lato minore e il coseno dell'angolo minore.
9. Si consideri un cerchio di centro O e raggio *r* e sia A un punto della circonferenza. Sia inoltre OB un raggio mobile che forma l'angolo 2x con OA. Facendo ruotare la figura attorno ad OA, il segmento AB genera la superficie laterale di un cono. Come deve essere scelta in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo perché quest'area sia massima?
10. Un turista, che osserva un lago scozzese dalla cima di un fiordo alto 100 metri, vede spuntare la testa di un mostro acquatico in un punto per il quale misura un angolo di depressione di 18,45°. Il mostro, che nuota in linea retta allontanandosi dall'osservatore, si immerge, per riemergere cinque minuti più tardi in un punto per cui l'angolo di depressione vale 14,05°. Con che velocità, in metri all'ora, sta nuotando il mostro?

Durata massima della prova: 6 ore.

E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

E' data una circonferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2$. Sul prolungamento del diametro AB, dalla parte di B, si prenda un punto P e da esso si conduca una tangente alla circonferenza.

1. Detti T il punto di tangenza e Q il punto di intersezione di questa tangente con la tangente in A alla circonferenza, si calcoli il rapporto:

$$\frac{\overline{TQ}^2 + \overline{TP}^2}{\overline{AP}^2},$$

espresso in funzione di $x = \overline{BP}$, controllando che risulta :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x}.$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione *f(x)* e se ne tracci il grafico γ.
3. Si calcolino i numeri a, b, c in modo che risulti:

$$(1) \qquad \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x + 2}.$$

4. Tenendo presente la scomposizione (1), si calcoli l'area della regione piana, limitata da γ, dal suo asintoto orizzontale e dalla retta d'equazione $x = 2$.

PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, si denoti con Γ_a il grafico della funzione

$$f_a(x) = (x - a)\, e^{2 - \frac{x}{a}}$$

dove a è un parametro reale positivo ed e è il numero di *Nepero*.

1. Si dimostri che, al variare di a, le curve Γ_a tagliano l'asse delle x secondo lo stesso angolo α. Si determini l'ampiezza di α in gradi e primi sessagesimali.
2. Si dimostri che la tangente a Γ_a nel punto di flesso, descrive, al variare di *a,* un fascio di rette parallele. Si determini l'equazione di tale fascio.
3. Posto $a = 1$, si studi $f_1(x)$ e si tracci Γ_1.
4. Si calcoli l'area $S(k)$ della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ_1, dall'asse x e dalla retta $x = k$, con $k > 1$. Cosa si può dire di $S(k)$ quando $k \to +\infty$?

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto.
2. Considerata la funzione $f(x) = \dfrac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$, dove a è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$.
3. Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza $2r$, e una sfera di raggio r. A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale ß, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?
4. Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.
5. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, nell'intervallo $1 \le x \le 2$.
6. Si determini il punto della parabola $4y = x^2$ più vicino al punto di coordinate (6, -3).
7. Si consideri l'equazione

   $$x^3 - 3x^2 + 6x - 6 = 0.$$

   Si dimostri che essa ammette una soluzione reale x_0 tale che $1 < x_0 < 2$. Avvalendosi di un qualsiasi procedimento iterativo si determini x_0 a meno di 1/100.
8. Nel piano cartesiano Oxy è dato il cerchio C con centro nell'origine e raggio $r = 3$; siano $P(0, 3)$ e $Q(2, \sqrt{5})$ punti di C. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x del quadrilatero mistilineo $PORQ$ (con R proiezione di Q sull'asse x).
9. Siano dati un ottaedro regolare di spigolo l e la sfera in esso inscritta; si scelga a caso un punto all'interno dell'ottaedro. Si determini la probabilità che tale punto risulti interno alla sfera.
10. Un'urna contiene 20 palline, che possono essere rosse o azzurre. Quante sono quelle azzurre, se, estraendo 2 palline senza riporre la prima estratta, la probabilità di estrarre almeno una pallina azzurra è 27/38 ?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Suppletiva 2011

ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO

Indirizzo P.N.I. + scientifico autonomia + scientifico e scientifico – tecnologico Brocca + Proteo.

CORSO SPERIMENTALE

Sessione suppletiva 2011

Tema di ___________________

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

E' dato un quadrato ABCD di lato $AB = a$

Da A si conduca una semiretta, che incontra il lato BC in E e il prolungamento del lato DC in F.

1. Si calcoli il rapporto:

$$\frac{BE + DF}{AB},$$

espresso in funzione di $x = B\hat{A}E$, controllando che risulta :

$$f(x) = tgx + cotgx.$$

2. Si studi la funzione f(x) e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.
3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ e dalla retta di equazione $y = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.
4. La regione finita di piano delimitata dalla curva γ e dall'asse x nell'intervallo $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ è la base di un solido S, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = (3 - x)\sqrt{x+3}.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si scriva l'equazione della tangente *t* alla curva γ nel punto di intersezione con l'asse y e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con gli assi cartesiani.
3. Si calcoli il volume del cono S generato da una rotazione completa attorno all'asse x del succitato triangolo e il volume del solido S' generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano, situata nel I quadrante, limitata dalla curva γ e dagli assi cartesiani.
4. Si scelga a caso un punto all'interno del cono S. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno al solido S'.

Suppletiva 2011

QUESTIONARIO

1. Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di 30°. Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a 20°, con che velocità si stanno spostando gli uccelli?

2. La funzione:

$$f(x) = \frac{1}{(e^{1/x} - 1)^2},$$

non è definita nel punto x = 0, che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della f(x) per x tendente a zero da sinistra e per x tendente a zero da destra.

3. La retta di equazione x = 8 seca la parabola di equazione $x = y^2 - 4y + 3$ nei punti A e B. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base AB si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di 180° intorno all'asse della parabola.
4. Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$f(x) = (3\cos x + sen^2 x - 3)^{\cos x}.$$

Che cosa succederebbe se l'esponente fosse *senx*?

5. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$, nell'intervallo 0 ≤ x ≤ 1 .
6. Si determini un numero positivo N tale che, per x > N, la funzione $f(x) = 2^{0,3x}$ è sempre maggiore della funzione $g(x) = x^{30}$.
7. Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{2} - 1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx,$$

si calcoli un'approssimazione di $\frac{\pi}{2}$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

8. La regione del I quadrante delimitata dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e dagli assi cartesiani è la base di un solido F le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di F.
9. Un bersaglio è costituito da tre cerchi concentrici, i cui raggi misurano rispettivamente 5, 3 e 1. Un arciere ha probabilità ½ di colpire il bersaglio. Qual è la probabilità che lo colpisca in un punto appartenente al cerchio di raggio 3 ma non a quello di raggio 1 ?
10. Sia P un punto fissato su una circonferenza; quale è la probabilità che prendendo su questa due punti a caso A e B, l'angolo $A\hat{P}B$ sia acuto? Si illustri il ragionamento seguito.

Durata massima della prova: 6 ore.

E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'Istruzione, dell' Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1, in modo che la base maggiore contenga il diametro.

1. Si calcoli, in funzione dell'ampiezza x del suo angolo acuto, l'area della superficie del trapezio, controllando che risulta:
$$S(x) = \frac{2 - \cos x}{sen x}$$
2. Si studi la funzione S(x) e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 < x < 2\pi$ mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si scelga a caso un punto all'interno del trapezio e si determini la probabilità p(x) che tale punto risulti interno al semicerchio inscritto. Si studi la funzione p(x) e si tracci il suo grafico ω nell'intervallo $0 \le x \le \pi/2$.
4. Si calcoli il valore medio della funzione p(x) nell'intervallo $0 \le x \le \pi/2$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = arctg x - \frac{x}{1 + x^2}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*.
2. Si verifichi che i tre punti di flesso di γ sono allineati e si scriva l'equazione della retta alla quale essi appartengono.
3. Si scrivano le equazioni delle tangenti inflessionali, si dimostri che due di esse sono parallele e si calcoli la loro distanza.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazione $x = 1$ e $x = \sqrt{3}$.

$$$$$21135
$$$$$21135
$$$$$21135

Ministero dell'Istruzione, dell' Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si divida il segmento $AB = a$ in due parti *AC e CB,* in modo che, costruito su *AC* il quadrato *ACDE* e su *CB* il triangolo equilatero *CBF*, sia minima l'area del pentagono *ABFDE.*
2. Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} senx \cdot \log(sen2x), & per \quad 0 < x < \pi/2, \\ 0 & , per\ x = 0, \end{cases}$$

si provi che è continua, ma non derivabile, nel punto $x = 0$.

3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = (x+2)^{\log(e+2x)}$$

nel punto P (0, 2).

4. La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = 1 + tgx$ e dall'asse *x* nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi/4$ è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse *x*, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.
5. Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello, un capo tuareg vede la cima di una grande palma e dirige direttamente verso di essa. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di 4°; venti minuti più tardi l'angolo di elevazione misura 9°. Quanti minuti sono ancora necessari al tuareg per raggiungere l'albero?
6. Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = \dfrac{ax^2+4}{bx+2}$ perché la curva rappresentativa ammetta asintoto di equazione $y = x + 2$.
7. Tenuto conto che:

$$\log 2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+senx}dx$$

si calcoli un'approssimazione di log2, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

8. Sia C la curva d'equazione $y = x^2 - 2x + 4$, e sia G la curva simmetrica di C rispetto all'asse y. Qual è l'equazione di G?
9. Si determini la probabilità che nel lancio di due dadi si presenti come somma un numero dispari. Lanciando 5 volte i due dadi, qual è la probabilità di ottenere come somma un numero dispari almeno due volte?
10. Si scelga a caso un punto all'interno di un parallelogramma, avente i lati lunghi rispettivamente 8m e 6m e gli angoli acuti di 30°. Si determini la probabilità che la sua distanza da ogni vertice sia maggiore di 2m.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siamo trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

E' dato un angolo retto $X\hat{O}Y$ e sulla sua bisettrice un punto P, tale che $P\hat{A}O = 2 \cdot P\hat{B}O$, essendo A e B punti, rispettivamente, di OX e di OY.

1. Posto $P\hat{B}O = \alpha$, si calcoli il rapporto: $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ e lo si esprima in funzione di $x = tg\alpha$, controllando che risulta:
$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{2(x+1)}$$
2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.
3. Si considerino i punti C e D in cui l'asintoto obliquo di γ incontra rispettivamente l'asse y e l'asse x. Se E è il punto medio del segmento CO, si mostri che la retta DE è tangente a γ nel punto di ascissa 1.
4. Si scelga a caso un punto all'interno del triangolo COD. La probabilità che tale punto risulti interno alla regione σ delimitata, nel primo quadrante, da γ e dagli assi medesimi è maggiore o minore del 50%? Si illustri il ragionamento seguito.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = x - 2arctgx.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. La curva γ incontra l'asse x, oltre che nell'origine, in altri due punti aventi ascisse opposte. Detta ξ l'ascissa positiva, si dimostri che 1<ξ<π e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
3. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel suo punto di flesso, si verifichi che essa risulta perpendicolare ad entrambi gli asintoti e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con uno degli asintoti e l'asse x.
4. Si calcoli l'area della regione di piano, delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo chiuso $[-1, 0]$.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. E' dato il settore circolare AOB, di centro O, raggio r e ampiezza $\pi/3$. Si inscriva in esso il rettangolo PQMN, con M ed N sul raggio OB, Q sull'arco e P su OA. Si determini l'angolo $Q\hat{O}B = x$, affinché il perimetro del rettangolo sia massimo.
2. Quali sono i poliedri regolari? Perchè sono detti anche solidi platonici?
3. Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione:

$$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$

   nel punto P di ordinata $y = 2$.
4. Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x) = \log x$ e dall'asse x sull'intervallo $[1, e]$. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura dell'altezza del solido è data da $h(x) = x$. Quale sarà il volume del solido?
5. Un aereo civile viaggia in volo orizzontale con velocità costante lungo una rotta che lo porta a sorvolare Venezia. Da uno squarcio nelle nuvole il comandante vede le luci della città con un angolo di depressione di 7°. Tre minuti più tardi ricompaiono nuovamente le luci, questa volta però l'angolo di depressione misurato è di 13°. Quanti minuti saranno ancora necessari perché l'aereo venga a trovarsi esattamente sopra la città?
6. Un cono di nichel (densità ρ_1 = 8,91 g/cm^3) ha il raggio di base di 15 cm e l'altezza di 20 cm. Da questo cono se ne taglia via un altro, avente l'altezza di 5 cm, che viene sostituito da un cilindro di alluminio (densità ρ_2 = 2,70 g/cm^3), che ha la stessa altezza del cono piccolo e la base uguale alla base minore del tronco di cono residuo. Si dica se la massa m_2 del solido così ottenuto è maggiore o minore di quella m_1 del cono di partenza.
7. Tenuto conto che:

$$\ln 3 = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx,$$

   si calcoli un'approssimazione di $\ln 3$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

8. Si consideri l'equazione:

$$4x^3 - 14x^2 + 20x - 5 = 0$$

Si dimostri che essa per $0 < x < 1$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

9. Lanciando due dadi, qual è la probabilità che esca per somma un numero primo? Quante volte occorre lanciarli perché si possa aspettare, con una probabilità p = 80% assegnata di veder apparire almeno una volta un numero primo?

10. Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 16$, si calcoli la lunghezza dell'arco compreso tra i punti $A(2\sqrt{3};\, 2)$ *e* $B(2;\, 2\sqrt{3})$. Si scelga poi a caso un punto sulla circonferenza: si determini la probabilità che tale punto giaccia sull'arco AB.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

La curva γ è rappresentata dalle seguenti equazioni parametriche:

$$x = \frac{t+1}{t}, \quad y = \frac{t^2+1}{t}$$

1. Se ne ricavi l'equazione cartesiana $y = f(x)$ e se ne costruisca il grafico.
2. Si scriva l'equazione della retta s che congiunge i punti estremanti relativi di γ e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo acuto Φ che tale retta forma con l'asintoto obliquo.
3. Si calcoli l'area della regione di piano Σ, delimitata da γ, dal suo asintoto obliquo e dalle rette $x = 2$ e $x = 4$.
4. Verificato che è $A(\Sigma) = \log 3$, si calcoli un'approssimazione di $\log 3$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si dimostri che l'equazione

   $$x^3 - 3x^2 + 6x - 6 = 0$$

   ha, sull'intervallo $1 < x < 2$, un'unica radice reale ξ e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

   Dopo aver constatato che ξ altro non è che l'ascissa del punto di flesso della curva γ, si calcoli il valore approssimato dell'ordinata.
3. Si scrivano le equazioni della tangente e della normale a γ nel punto di intersezione con l'asse x e si calcoli l'area del triangolo che esse formano con l'asse y.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 2$.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si determini il dominio della funzione $f(x)=\sqrt{e^{2x}-3e^{x}+2}$.

2. La funzione:

$$f(x)=sen\sqrt[3]{x},$$

è evidentemente continua nel punto $x=0$. Si dimostri che nello stesso punto non è derivabile.

3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x)=\frac{x^2}{3}\left(2+sen^2\frac{1}{x}\right)$$

nel punto P di ascissa $x=\frac{1}{\pi}$.

4. Data la parte finita di piano compresa tra le rette $x+y-1=0$ e $x-1=0$ ed il grafico della funzione $y=e^x$, si determini la sua area ed il volume del solido ottenuto facendola ruotare di un giro completo attorno all'asse x.

5. Un osservatore posto sulla riva di un lago a 236 m sopra il livello dell'acqua, vede un aereo sotto un angolo di elevazione α di 42,4° e la sua immagine riflessa sull'acqua sotto un angolo di depressione β di 46,5°. Si trovi l'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore.

6. Si disegni il grafico γ della funzione:

$$f(x) = \text{distanza di } x \text{ dal più prossimo intero.}$$

Si dica se $f(x)$ è una funzione periodica e si calcoli l'area della regione di piano delimitata da γ, dall'asse x e dalla retta $x=\frac{9}{10}$ nell'intervallo $\left[0,\frac{9}{10}\right]$.

7. Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana delimitata dalla curva γ di equazione

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ e dall'asse delle x nell'intervallo $-1\le x\le 1$.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

8. Si consideri l'equazione

$$\log|x| - e^{x} = 0 .$$

Si dimostri che essa ammette una soluzione reale appartenente all'intervallo $-2 \leq x \leq -1$ e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

9. Un mazzo di "tarocchi" è costituito da 78 carte: 22 carte figurate, dette "Arcani maggiori", 14 carte di bastoni, 14 di coppe, 14 di spade e 14 di denari. Estraendo a caso da tale mazzo, l'una dopo l'altra con reinserimento, 4 carte, qual è la probabilità che almeno una di esse sia un "Arcano maggiore"?

10. Nel poscritto al suo racconto *"Il Mistero di Marie Rogêt"*, Edgar Allan Poe sostiene che, "avendo un giocatore di dadi fatto doppio sei per due volte consecutive, vi è una ragione sufficiente per scommettere che gli stessi sei non usciranno ad un terzo tentativo". Ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.