SECONDA PROVA - PROBLEMI

- (2001o.p1) Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x e y:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a},$$

dove a è un parametro reale positivo.

1. Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione $x + y = 4$.
3. Scrivere l'equazione della circonferenza k cha ha il centro nel punto di coordinate (1,1) e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.
4. Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t.
5. Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza k.

- (2001o.p2) Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato BC tali che

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}.$$

Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE.

1. Dimostrare che il quadrilatero DENM è la quarta parte del triangolo ABC.
2. Ammesso che l'area del quadrilatero DENM sia $\frac{45}{2}a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $\widehat{ABC}$ sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB} = 13a, \overline{BC} = 15a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.
3. Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto, ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N e C.
4. Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

- (2001s.p1) Si consideri la funzione reale f_m di variabile reale x tale che

$$f_m = \frac{x^2}{|x - 2m| + m},$$

dove m è un parametro reale non nullo.

1. Trovare gli insiemi di definizione di continuità e di derivabilità della funzione.
2. Indicare con C_1 la curva rappresentativa della funzione $f_1(x)$ corrispondente ad $m = 1$, studiarla e disegnarla in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, dopo aver determinato, in particolare, le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto A di ascissa 2.
3. Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_1 e dalla retta parallela all'asse delle ascisse condotta per il punto A.

- (2001s.p2) Una piramide retta, di vertice V, ha per base il triangolo ABC, rettangolo in A, la cui area è $24a^2$, dove a è una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5}$ e che il piano della faccia VAB della piramide forma col piano della base ABC un angolo ϕ tale che $\sin(\phi) = \frac{12}{13}$.

1. Calcolare l'altezza della piramide.
2. Controllato che essa è $\frac{24}{5}a$, calcolare la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB.
3. Condotto, parallelamente alla base ABC, un piano α che sechi la piramide e considerato il prisma retto avente una base coincidente con il triangolo sezione e per altezza la distanza di α dalla base ABC, calcolare per quale valore di tale distanza il prisma ha volume massimo.

4. Il prisma di volume massimo ha anche la massima area totale?

- (2002o.p1) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione $y = f(x)$, dove è
$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+2}$$
  1. Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y > 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$.
  2. Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1. (N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari).
  3. Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.
  4. Determinare in quali punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x.
  5. Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perchè esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} <\leq x \leq 0$.

- (2002o.p2) Si considerino le lunghezze seguenti:
$$a + 2x, \qquad a - x, \qquad 2a - x,$$
dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.
  1. Determinare per quali valori di x le lunghezze si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.
  2. Stabilire se, tra i triangoli non degeneri i cui lati hanno tali lunghezze, ne esiste uno di area massima o minima.
  3. Verificato che per $x = \frac{a}{4}$ le rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.
  4. Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto, in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC.

- (2002s.p1) Se il polinomio $f(x)$ si divide per $x^2 - 1$ si ottiene x come quoziente ed x come resto.
  1. Determinare $f(x)$.
  2. Studiare la funzione $y = \frac{f(x)}{x^2-1}$ e disegnarne il grafico G in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver trovato, in particolare, i suoi punti di massimo, minimo e flesso e i suoi asintoti.
  3. Trovare l'equazione della retta t tangente a G nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$.
  4. Determinare le coordinate dei punti comuni alla retta t e alla curva G.
  5. Dopo aver determinato i numeri a, b tali che sussista l'identità:
$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1},$$
calcolare una primitiva della funzione $\dfrac{f(x)}{x^2-1}$.

- (2002s.p2) Una piramide di vertice V, avente per base il trapezio ABCD, è tale che:
  - il trapezio di base è circoscritto ad un semicerchio avente come diametro il lato AB perpendicolare alle basi del trapezio;
  - lo spigolo VA è perpendicolare al piano di base della piramide;
  - la faccia VBC della piramide forma un angolo di 45° col piano della base.

1. Indicato con E il punto medio del segmento AB, dimostrare che il triangolo CED è rettangolo.
2. Sapendo che l'altezza della piramide è lunga $2a$, dove a è una lunghezza assegnata, e che $\overline{BC} = 2\overline{AD}$, calcolare l'area e il perimetro del trapezio ABCD.
3. Determinare quindi l'altezza del prisma retto avente volume massimo, inscritto nella piramide in modo che una sua base sia contenuta nella base ABCD della piramide.
4. Stabilire se tale prisma ha anche massima area laterale.

- (2003o.p1) Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C e D.

1. Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r.
2. Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertice i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto tra i volumi di T e T'.
3. Condotto il piano α, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E, e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB.
4. Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.
5. Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm^2.

- (2003o.p2) E' assegnata la funzione $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale.

1. Determinare il suo dominio di derivabilità.
2. Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.
3. Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.
4. Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$.

- (2003s.p1) Del triangolo ABC si hanno le seguenti informazioni:

$$\overline{AB} = 3cm, \qquad \overline{AC} = 2cm, \qquad \widehat{CAB} = 60°.$$

Si tracci la bisettrice di $\widehat{CAB}$ e se ne indichi con D l'intersezione con il lato BC.

1. Si calcoli la lunghezza del lato BC e delle parti in cui esso risulta diviso dal punto D.
2. Si determinino il coseno dell'angolo in B, la misura di AD e, disponendo di un calcolatore, le misure approssimate degli altri angoli interni di vertici B e C.
3. Si trovi sul lato AD, internamente ad esso, un punto P tale che la somma s dei quadrati delle sue distanze dai vertici A, B e C sia m^2, essendo m un parametro reale dato.
4. Si discuta tale ultima questione rispetto al parametro m.

- (2003s.p2) E' data una piramide retta a base quadrata.

1. Si sezione la piramide con un piano parallelo alla base e si indichino con a e b $(a > b)$ e h rispettivamente le misure degli spigoli delle basi e l'altezza del tronco che ne risulta. Si esprima in funzione di a, b e h il volume del tronco di piramide, illustrando il ragionamento seguito.
2. Si calcoli il volume massimo della piramide data sapendo che la sua superficie laterale è $\sqrt{3}$ dm^2.
3. Si calcoli il raggio della sfera circoscritta alla piramide massima trovata.
4. Si dia una approsimazione della capacità in litri di tale sfera.

- (2004o.p1) Sia f la funzione definita da $f(x) = 2x - 3x^3$.

1. Disegnate il grafico G di f.
2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y = c$ che interseca G in due punti distinti e le regioni finite di piano R e S che essa delimita con G. Precisamente: R delimitata dall'asse y, da G e dalla retta $y = c$ e S delimitata da G e dalla retta $y = c$.
3. Determinate c in modo che R ed S siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di G con la retta $y = c$.
4. Determinate la funzione g il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta $y = \frac{4}{9}$.

- (2004o.p2) ABC è un triangolo di ipotenusa BC.

  1. Dimostrate che la mediana relativa a BC è congruente alla metà di BC.
  2. Esprimete le misure dei cateti di ABC in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.
  3. Con $\overline{BC} = \sqrt{3}$ metri, determinate il cono K di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in litri di K.
  4. Determinate la misura approssimata, in radianti e in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono K.

- (2004s.p1) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva K di equazione:
$$y = \frac{2x(6-x)}{2+x}.$$

  1. Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.
  2. Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interni, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K.
  3. Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è 16.
  4. Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato sopra.
  5. Spiegare perchè la funzione non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

- (2004s.p2) Una piramide ha per base il quadrato ABCD di lato lungo 7 cm. Anche l'altezza VH della piramide è lunga 7 cm e il suo piede H è il punto medio del lato AB. Condurre per la retta AB il piano α che formi con il piano della base della piramide un angolo ϕ tale che $\cos(\phi) = \frac{3}{5}$ e indicare con EF la corda che il piano α intercetta sulla faccia VCD della piramide.

  1. Spiegare perchè il quadrilatero convesso ABEF è inscrivibile in una circonferenza γ.
  2. Tale quadrilatero è anche circoscrivibile ad una circonferenza?
  3. Calcolare i volumi delle due parti in cui la piramide data è divisa dal piano α.
  4. Dopo aver riferito il piano α ad un conveniente sistema di assi cartesiani Oxy, determinare l'equazione della circonferenza γ.

- (2005o.p1) Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione R, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ di equazione $y = 6 - x^2$.

  – Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y.
  – Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$.
  – Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di R.
  – Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa t. Si determini $A(t)$.
  – Si determini il valore di t per il quale $A(t)$ è massima.

- (2005o.p2) Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0; +\infty[$ da:
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
e sia C la sua curva rappresentata nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

- Si stabilisca se f è continua e derivabile in 0.
- Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0; +\infty[$, un'unica radice reale.
- Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
- Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette: $x = \frac{1}{n}$ e $x = 1$.
- Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

• (2005s.p1) Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

1. Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.
2. Posto che lo spigolo della base ABC della piramide sia lungo 4 cm:
   (a) Calcolare la misura dello spigolo della base MNP del prisma, complanare ad ABC;
   (b) Supposto che gli spigoli AM ed MN siano paralleli, riferire il piano dei triangoli ABC ed MNP ad un sistema di assi cartesiani avente l'origine in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta AB e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
   (c) Determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B, M e verificare che passa pure per N;
   (d) Calcolare le aree delle parti in cui la parabola trovata divide i triangoli ABC ed MNP;
   (e) Spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo MNP rispetto al triangolo ABC.

• (2005s.p2) E' assegnata la funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, dove a è un parametro reale non nullo.

1. Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perchè la funzione $f_a(x)$ è limitata.
2. Una volta riferito il piano ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) ed indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza g di diametro OA.
3. Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza g e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
4. Calcolare il valore di a per il quale la circonferenza g e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.

Dopo aver controllato che il valore a sopraddetto è 4, indicare con γ e G la circonferenza e la curva corrispondenti a tale valore e calcolare le aree delle regioni piane in cui la curva G divide il cerchio delimitato da γ.

• (2006o.p1) Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

- Qual è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinchè:

- la somma delle due aree sia minima?
- la somma delle due aree sia massima?

Un'aiuola, una volta realizzata, ha la forma di un parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

• (2006o.p2) Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = log(x)$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logarimto in base e.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $log(x) = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.

2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log(x) - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

- (2006s.p1) Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le due parabole di equazione p' e p'' di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2, \qquad x = y^2 - 2y.$$

1. Fornire la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.
2. Indicato con V' il vertice della parbola p', con V" il vertice della parabola p'' e con P il punto in cui p'' interseca il semiasse positivo delle y, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco V'V" della parabola p', dall'arco V"P della parabola p'' e dal segmento V'P.
3. Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.
4. Nel segmento parabolico, delimitato dalla retta di equazione $y = 4$ e dalla parabola p', inscrivere il rettangolo avente due lati paralleli all'asse y ed area massima.
5. Stabilire se il rettangolo trovato ha anche perimetro massimo.

- (2006s.p2) Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x+k}{x^2},$$

dove k è un parametro reale non nullo.

1. Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno e un solo flesso.
2. Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta di equazione $x + 27y - 9 = 0$.
3. Disegnare l'andamento di γ, dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto che t ha in comune con γ.
4. Determinare l'equazione della circonferenza C, tangente alla curva γ nel punto A ed avente il centro sull'asse y.
5. Calcolare l'area della minore delle regioni in cui l'asse x divide il cerchio delimitato da C.

- (2007o.p1) Si considerino i triangoli la cui base è $\overline{AB} = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $\widehat{CAB}$ si mantenga doppio dell'angolo $\widehat{ABC}$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $\widehat{ABC}$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $\widehat{ABC} = 36°$ allora $\overline{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

- (2007o.p2) Si consideri un cerchio C di raggio r.

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C. Si dimostri che $S_n = \frac{n}{2}r^2\ sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C.
3. Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

- (2007s.p1) Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) si consideri il punto A(2,0).
  1. Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:
  $$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 8,$$
  controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.
  2. Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.
  3. Si scriva l'equazione della parabola cubica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.
  4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento OB e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.
- (2007s.p2) Si consideri la funzione
  $$f(x) = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x.$$
  1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
  2. Si determinino le coordinate del punto A, in cui la curva C incontra la curva C' rappresentativa dell'equazione $y = e^x$.
  3. Si scrivano l'equazione della tangente alla curva C nell'origine e l'equazione della tangente alla curva C' nel punto A.
  4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = \log(3)$.
- (2008o.p1) Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $AB = a$ e l'angolo $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{3}$.
  1. Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinchè la costruzione sia realizzabile.
  2. Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo PQCR e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di $S(x)$.
  3. Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.
  4. Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.
- (2008o.p2) Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro $\overline{AB} = 2$, si affrontino le seguenti questioni:
  1. Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1.
  2. Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.
  3. Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $\widehat{PCB} = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH. Si calcoli il rapporto $f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$.
  4. Si studi $f(x)$ e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.
- (2008s.p1) Dato un quadrante AOB di cerchio, di centro O e raggio 2, si consideri sull'arco AB un punto P.
  1. Si esprima in funzione di $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (con $x = \widehat{BOP}$) l'area del quadrilatero OMPN, essendo M ed N i punti medi dei raggio OA e OB.

2. Si studi la funzione $f(t)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.
3. Si dica per quale valore di x l'area del quadrilatero assume valore massimo.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ e l'asse x.

- (2008s.p2) Si consideri la funzione $y = \sin(x)(2\cos(x) + 1)$.

1. Tra le sue primitive si individui quella il cui diagramma γ passa per il punto $P(\pi, 0)$.
2. Si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$ e si dimostri che essa è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.
3. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti alla curva nei suoi due punti A e B di ascisse $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$ e si determini il loro punto d'intersezione C.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva e le due suddette tangenti.

- (2009o.p1) E' assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in metri e radianti).

1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x, da $S(x) = \frac{1}{2}r^4(x - \sin(x))$ con $x \in [0, 2\pi]$.
2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).
3. Si fissi l'area del settore AOB pari a 100 m^2. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).
4. Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

- (2009o.p2) Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = \log(x)$ (logaritmo naturale).

1. Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a(x)$ con a reale positivo diverso da 1?
2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base a è $\delta = 45°$? E per quale valore di a è $\delta = 135°$?
3. Sia D la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta di equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di D.
4. Si calcoli il volume del solido generato da D nella rotazione completa attorno alla retta di equazione $x = -1$.

- (2009s.p1) I due segmenti adiacenti OA, AB sono uguali ed hanno una lunghezza data a. Nel medesimo semipiano rispetto alla retta OB si descrivano due semicirconferenze di diametri rispettivi OA ed OB, e per il punto O si conduca la semiretta tangente comune, sulla quale si prenda il segmento $\overline{OC} = a$. Con origine O, si conduca una semiretta, che forma con OB un angolo α e interseca in P e Q le semicirconferenze.

1. Si calcoli il rapporto:
$$\frac{\overline{CP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QC}^2}{2a^2}$$
e lo si esprima in funzione di $x = \tan\alpha$, controllando che risulta:
$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}.$$
2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.
3. Si dica per quale valore di α si hanno rispettivamente il massimo e il minimo del rapporto al punto 1.

4. Si determini l'area della superficie piana, finita, delimitata dall'asse delle ordinate, dalla curva γ e dal suo asintoto.

- (2009s.p2) Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x(2 - \ln(x)) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

1. Questa funzione è continua nel punto di ascissa 0? E' derivabile in tale punto?
2. Si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ, su un piano riferito ad un sistama di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
3. Si calcoli l'espressione, in funzione di t $(t > 0)$, dell'integrale

$$I(t) = \int_t^{e^2} x(2 - \ln(x))dx.$$

4. Si faccia vedere che $I(t)$ tende verso un limite finito quando t tende a 0. Cosa rappresenta questo limite nel grafico precedente?

- (2010o.p1) Sia ABCD un quadrato di lato 1, P un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP. Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ.

1. Se $\overline{AP} = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.
2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate Oxy, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, qual è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$, $x \in \mathbb{R}$; qule è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto R(0,1)? E nel punto S(1,0)? Cosa si puà dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS, ove l'arco RS appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

- (2010o.p2) Nel piano, riferito a coordinate cartesiane Oxy, si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ $(b > 0, b \neq 1)$.

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di b. Si illustri come varia G_b al variare di b.
2. Sia P un punto di G_b. La tangente a G_b in P e la parallela per P all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente in A e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Per quali valori di b la lunghezza di AB è uguale a 1?
3. Sia r la retta passante per O tangente a G_e (e = numero di Nepero). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y, da G_e e dalla retta d'equazione $y = e$.

- (2010s.p1) Data una circonferenza di centro O e raggio unitario, si prendano su di essa tre punti A, B e C tali che $\overline{AB} = \overline{BC}$.

1. Si calcoli, in funzione dell'angolo $\widehat{AOB} = x$, la quantità

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$$

controllando che risulti: $f(x) = -4\cos^2(x) - 4\cos(x) + 8$.

2. Si studi la funzione $f(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.
3. Si verifichi che la curva γ è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = \pi$.
4. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x)$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.

- (2010s.p2) Sia data la funzione $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$.

1. Si determini il dominio di $f(x)$ e si dica se la funzione è continua e derivabile in ogni punto di esso.
2. Si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.
3. Si calcoli l'area della parte di piano R racchiusa dal grafico γ e dal semiasse positivo delle ascisse.
4. La regione R genera, nella rotazione attorno all'asse delle ascisse, un solido S. In S si inscriva un cono circolare retto con vertice nell'origine. Si determinino raggio e altezza del cono, affinchè il suo volume sia massimo.

- (2011o.p1) Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sin(\pi x).$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy, si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g.
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente, si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-6; 6]$ e se ne indichino le coordinate.
3. Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo $[0; 2]$. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $h(x) = 3-x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

- (2011o.p2) Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da

$$f(x) = (ax + b)\, e^{-\frac{x}{3}} + 3,$$

dove a e b sono due reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0) = 2$.

1. Si provi che $a = 1$ e $b = -1$.
2. Si studi su $\mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (x-1)\, e^{-\frac{x}{3}} + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy.
3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta $y = 3$.
4. Il profitto di un'azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione g definita su $\mathbb{R}^+$ se per ciascun x_i oggetto dell'osservazione si ha: $|g(x_i) - y_i| \leq 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

- (2011s.p1) Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2$, si prenda su di essa un punto P e sia M la proiezione di P sulla retta perpendicolare in B ad AB.

1. Si esprima la somma $\overline{AP} + \overline{PM}$ in funzione di $x = \widehat{PAB}$.
2. Si studi la funzione $f(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$, mettendo in evidenza poi la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si dimostri che γ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.
4. Si calcoli l'area della regione piana, limitata dalla curva γ, dagli assi cartesiani e dalla retta di equazione $x = \frac{\pi}{3}$.

- (2011s.p2) Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
  1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
  2. Si scrivano l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e quella della retta ad essa parallela, passante per il punto di γ avente ascissa $\sqrt{3}$; si calcoli l'area del parallelogramma formato da queste due rette, dall'asse x e dall'asintoto orizzontale destro.
  3. Si calcoli l'area della regione A_k, delimitata dalla curva γ, dall'asse y, dall'asintoto orizzontale destro e dalla retta $x = k$ con $k > 0$. Si calcoli poi il limite di A_k quando $k \to +\infty$.
  4. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva γ, dalla tangente inflessionale e dalla retta $x = 1$.

- (2012o.p1) Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da
$$f(x) = |27x^3| \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$
  1. Qual è il periodo della funzione g? Si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy.
  2. Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e G_g nel punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s?
  3. Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g. Si calcoli l'area di R.
  4. La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perchè, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e T.

- (2012o.p2) Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O e di estremi $A(3, 0)$ e $B(0, 3)$ e l'arco L della parabola di equazione $x^2 = 9 - 6y$ i cui estremi sono il punto A e il punto $(0, \frac{3}{2})$.
  1. Sia r la retta tangente in A a L. Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui r divide la regione R racchiusa tra L e l'arco AB.
  2. La regione R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x, hanno, per ogni $0 \leq x \leq 3$, area $S(x) = e^{5-3x}$. Si determini il volume di W.
  3. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse x.
  4. Si provi che l'arco L è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse x. Infine, tra le circonferenze di cui L è il luogo dei centri si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3.

- (2012s.p1) Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1, in modo che la base maggiore contenga il diametro.
  1. Si calcoli, in funzione dell'ampiezza x del suo angolo acuto, il volume del solido generato dal trapezio in una rotazione di 180° intorno alla congiungente dei punti medi delle basi, controllando che risulta:
$$V(x) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\cos^2(x) - 3\cos(x) + 3}{\sin^2(x)}$$
  2. Si studi la funzione $f(x) = \frac{3}{\pi}V(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$, mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
  3. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di ascissa $x = \frac{\pi}{2}$ e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con l'asse x e con la retta di equazione $x = \pi$.
  4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazione $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

- (2012s.p2) Si consideri la funzione
$$f(x) = x\sqrt{2-x}.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si risolva la disequazione
$$x\sqrt{2-x} < 1.$$
3. Si scriva l'equazione della tangente alla curva γ nel punto di intersezione con l'asse y e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo ϕ che essa forma con la direzione positiva dell'asse x.
4. La regione finita di piano delimitata dalla curva γ e dall'asse x nel I quadrante è la base di un solido S, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.

- (2013o.p1) La funzione f è definita da
$$f(x) = \int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] dt$$
per tutti i numeri reali x appartenenti all'intervallo chiuso [0,9].
  1. Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$ ove f' indica la derivata di f.
  2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico Σ di $f'(x)$ e da esso si deduca per quale o quali valori di x, $f(x)$ presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$.
  3. Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0, 2\pi]$.
  4. Sia R la regione di piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0 \leq x \leq 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x hanno, per ciascun x, area $A(x) = 3\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\,x\right)$. Si calcoli il volume di W.

- (2013o.p2) Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da $f(x) = \dfrac{8}{4+x^2}$.
  1. Si studi f e se ne disegni il grafico Φ in un sistema di coordinate cartesiane Oxy. Si scrivano le equazioni delle tangenti a Φ nei punti P(-2;1) e Q(2;1) e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette OP e OQ. Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli.
  2. Sia Γ la circonferenza di raggio 1 e centro (0;1). Una retta t, per l'origine degli assi, taglia Γ oltre che in O in un punto A e taglia la retta d'equazione $y = 2$ in un punto B. Si provi che, qualunque sia t, l'ascissa x di B e l'ordinata y di A sono le coordinate (x, y) di un punti di Φ.
  3. Si consideri la regione R compresa tra Φ e l'asse x sull'intervallo [0,2]. Si provi che R è equivalente al cerchio delimitato da Γ e si provi altresì che la regione compresa tra Φ e tutto l'asse x è equivalente a quattro volte il cerchio.
  4. La regione R, ruotando attorno all'asse y, genera il solido W. Si scriva, spiegandone il perchè, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di W.

- (2013s.p1) ABC è un triangolo equilatero di lato a. Dal vertice A, e internamente al triangolo, si conduca una semiretta r che formi l'angolo α con il lato AB. Si denotino con B' e C', rispettivamente, le proiezioni ortogonali su r dei vertici B e C.
  1. Si calcoli il rapporto: $\dfrac{\overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2}{a^2}$ e lo si esprima in funzione di $x = \tan(\alpha)$, controllando che risulta:
$$f(x) = \frac{5x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3}{4(x^2+1)}.$$
  2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.
  3. Si determinino le coordinate del punto in cui la curva γ incontra il suo asintoto e si scriva l'equazione della tangente ad essa in tale punto.
  4. Si determini l'area della superficie piana, appartenente al II quadrante, delimitata dall'asse y, dalla curva γ e dal suo asintoto.

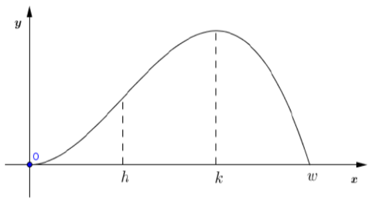
- (2013s.p2) Del trapezio ABCD si hanno le seguenti informazioni: la base maggiore AB e la base minore DC misurano rispettivamente 4 m e 1 m, l'altezza del trapezio misura 3 m e la tangente dell'angolo $\widehat{BAD}$ è uguale a $\frac{3}{2}$.

  1. Si calcolino le aree dei quattro triangoli in cui il trapezio è diviso da una sua diagonale e dai segmenti che uniscono il punto medio di questa con gli estremi dell'altra diagonale.
  2. Si determinino, con l'aiuto di una calcolatrice, le misure, in gradi e primi sessagesimali, degli angoli del trapezio.
  3. Riferito il piano del trapezio ad un conveniente sistema di assi cartesiani, si trovi l'equazione della parabola Γ avente l'asse perpendicolare alle basi del trapezio e passante per i punti B, C e D.
  4. Si determinino le aree delle due regioni in cui il trapezio è diviso da Γ.

- (2014o.p1) Nella figura a lato è disegnato il grafico Γ di

  $$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

  con f funzione definita sull'intervallo $[0, w]$ e ivi continua e derivabile.

  Γ è tangente all'asse x nell'origine O del sistema di riferimento e presenta un flesso e un massimo rispettivamente per $x = h$ e $x = k$.

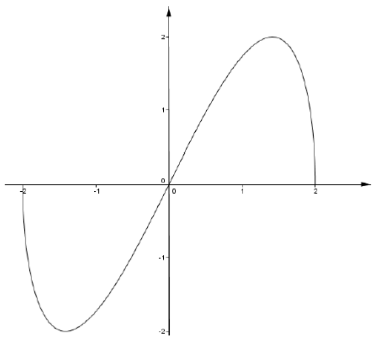
  1. Si determinino $f(0)$ e $f(k)$; si dica se il grafico della funzione f presenta punti di massimo o di minimo e se ne tracci il possibile andamento.
  2. Si supponga, anche nei punti successivi 3 e 4, che $g(x)$ sia, sull'intervallo considerato, esprimibile come funzione polinomiale di terzo grado. Si provi che, in tal caso, i numeri h e k dividono l'intervallo $[0, w]$ in tre parti uguali.
  3. Si determini l'espressione di $g(x)$ nel caso $w = 3$ e $g(1) = \dfrac{2}{3}$ e si scrivano le equazioni delle normali a Γ nei punti in cui esso è tagliato dalla retta $y = \dfrac{2}{3}$.
  4. Si denoti con R la regione che Γ delimita con l'asse x e sia W il solido che essa descrive nella rotazione completa attorno all'asse y. Si spieghi perchè il volume di W si può ottenere calcolando:

     $$\int_0^3 (2\pi x)\, g(x)\, dx.$$

     Supposte fissate in decimetri le unità di misura del sistema monometrico Oxy, si dia la capacità in litri di W.

- (2014o.p2) A lato è disegnato il grafico Γ della funzione

  $$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}.$$

1. Si calcolino il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$.
2. Si dica se l'origine O è centro di simmetria per Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.
3. Si disegni la curva d'equazione $y^2 = x^2(4 - x^2)$ e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.
4. Sia $h(x) = \sin(f(x))$ con $0 \leq x \leq 2$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte?

- (2014s.p1) Sono dati un quarto di cerchio AOB e la tangente t ad esso in A. Dal punto O si mandi una semiretta che intersechi l'arco AB e la tangente t, rispettivamente, in M ed N.

  1. Posto $\widehat{AOM} = a$, si calcoli il rapporto $\dfrac{MN}{MA}$ e lo si esprima in funzione di $x = \sin\dfrac{\alpha}{2}$, controllando che risulti:
  $$f(x) = \frac{x}{1 - 2x^2}.$$
  2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.
  3. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso; si scriva poi l'equazione della circonferenza con il centro nel suddetto punto di flesso e tangente agli asintoti verticali di γ.
  4. Si determini l'area della regione di piano limitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = \dfrac{1}{3}$ e $x = \dfrac{1}{2}$.

- (2014s.p2) Si consideri la funzione:
$$f(x) = \frac{1}{x \log^2 x}.$$

  1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
  2. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di ascissa $x = e$ e si calcoli l'area del trapezio T che essa forma con l'asse x, con l'asintoto verticale e con la retta di equazione $x = e$.
  3. Si calcoli l'area della regione S_k delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = e$ e $x = k$ $(k > e)$.
  4. Si faccia vedere che S_k tende verso un limite finito quando k tende a $+\infty$ e si confronti tale limite col valore numerico dell'area del trapezio T, arrotondato alla quarta cifra decimale.