SECONDA PROVA - QUESITI

ALGEBRA

Problemi: 2012s.p2.2, 2010o.p2.1, 2002s.p1.1

1. (2014s.q10) Un certo numero formato da tre cifre è uguale a 56 volte la somma delle cifre che lo compongono. La cifra delle unità è uguale a quella delle decine aumentata di 4, mentre, scambiando la cifra delle unità con quella delle centinaia, si ottiene un valore che è uguale a quello originario diminuito di 99. Si determini il numero di partenza.

2. (2014o.q10) Si determinino i valori reali di x per cui

$$\left(\frac{1}{5}\left(x^2-10x+26\right)\right)^{x^2-6x+1}=1.$$

3. (2014o.q5) Dei numeri $1, 2, 3 \ldots 6000$, quanti non sono divisibili né per 2, né per 3, néé per 5?

4. (2013o.q5) In un libro si legge: *Due valigie della stessa forma sembrano quasi uguali, quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (oppure del 20% o del 25%) corrispondono aumenti di capacità (volume) di circa 33% (oppure 75% o 100%: raddoppio).* E' così? Si motivi esaurientemente la risposta.

5. (2009s.q9) Si dimostri che un numero di quattro cifre tutte uguali è divisibile per 101.

6. (2009o.q5) Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \qquad \frac{0}{0}; \qquad \frac{1}{0}; \qquad 0^0.$$

   A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

7. (2007o.q7) Si sa che il prezzo p di un abito ha subito una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'uno o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?

8. (2006s.q9) Si consideri la seguente uguaglianza:

$$\ln(2x+1)^4 = 4\ln(2x+1).$$

   E' vero o falso che vale per ogni x reale? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

9. (2006o.q1) Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

10. (2004s.q4) Risolvere la seguente disequazione in x: $(\ln x)^2 \geq \ln(x^2)$.

11. (2004s.q2) Determinare il più grande valore di n per cui l'espressione numerica $\sum_{k=5}^{n} k$ non supera 10 000.

12. (2004o.q1) Trovate due numeri reali a e b, con $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.

13. (2003o.q10) Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

14. (2003o.q8) x ed y sono due numeri naturali dispari tali che $x - y = 2$. Il numero $x^3 - y^3$:
    (a) è divisibile per 2 e per 3;
    (b) è divisibile per 2 ma non per 3;
    (c) è divisibile per 3 ma non per 2;
    (d) non è divisibile nè per 2 nè per 3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

15. (2003o.q7) Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1, moltiplicarli combinandoli a due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

$$A)\ \frac{1}{4}n^2(n+1)^2; \qquad B)\ \frac{1}{3}x(x^2-1); \qquad C)\ \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1); \qquad D)\ \frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2).$$

16. (2002s.q8) S_n rappresenta la somma dei primi n numeri naturali dispari. La successione di termine generale a_n tale che $a_n = \frac{S_n}{2n^2}$ è costante, crescente o decrescente? Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

17. (2002s.q5) Un titolo di borsa ha perso ieri l'x % del suo valore. Oggi quel titolo, guadagnando l'y %, è ritornato al valore che aveva ieri prima della perdita. Esprimere y in funzione di x.

18. (2002o.q6) Determinare, se esistono, due numeri a e b in modo che la seguente relazione:

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1}$$

sia un'identità.

19. (2002o.q5) Si consideri la seguente proposizione: *la media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica.* Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.

20. (2002o.q3) Considerati i numeri reali a, b, c e d, comunque scelti, se $a > b$ e $c > d$ allora:

$$A)\ a+d > b+c; \qquad B)\ a-d > b-c; \qquad C)\ ad > bc; \qquad D)\ \frac{a}{d} > \frac{b}{c}.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

CALCOLO COMBINATORIO

1. (2014o.q3) Nello sviluppo di $(2a^2 - 3b^3)^n$ compare il termine $-1080a^4b^9$. Qual è il valore di n?

2. (2013s.q8) Tommaso ha costruito un modello di tetraedro regolare e vuole colorare le 4 facce, ognuna con un colore diverso. In quanti modi può farlo se ha a disposizione 10 colori? E se invece si fosse trattato di un cubo?

3. (2013o.q6) Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare 7!=5040 numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima posizione?

4. (2012s.q8) Quante diagonali ha un poligono convesso di n lati?

5. (2012o.q5) Siano dati nello spazio n punti P_1, P_2, P_3, ... P_n. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

6. (2011o.q4) Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n.

7. (2010o.q8) Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

8. (2009o.q7) Si dimostri l'identità

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$

con n e k naturali e $n > k$.

9. (2008o.q6) Se $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$ con $n > 3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

10. (2007s.q10) Si risolva l'equazione

$$\binom{x}{3} = \frac{15}{2}\binom{x}{2}.$$

11. (2007o.q8) Si risolva l'equazione
$$4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}.$$

12. (2006s.q10) Cinque ragazzi sono contrassegnati con i numeri da 1 a 5. Altrettante sedie, disposte attorno ad un tavolo, sono contrassegnate con gli stessi numeri. La sedia 1, posta a capotavola, è riservata al ragazzo 1, che è il caposquadra, mentre gli altri ragazzi si dispongono sulle sedie rimanenti in maniera del tutto casuale. Calcolare in quanti modi i ragazzi si possono mettere seduti attorno al tavolo.

13. (2006o.q5) Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

14. (2005.q10) Una classe è formata da 27 alunni: 15 femmine e 12 maschi. Si deve costituire una delegazione di 5 alunni, di cui 3 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni?

15. (2005s.q9) Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio $(a+b)^{10}$, ordinati secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b, sono rispettivamente
$$a^{10},\ a^9b,\ a^8b^2,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ ab^9,\ b^{10}.$$
Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.

16. (2005o.q6) Come si definisce $n!$ (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perchè?

17. (2003o.q9) Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.

18. (2001s.q3) Calcolare se esiste un numero naturale n per il quale risulti
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1\,048\,576.$$

19. (2001o.q6) Dimostrare che si ha:
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$
dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

GEOMETRIA EUCLIDEA

Problemi: 2010o.p1.1, 2008o.p2.1, 2008o.p1.4, 2004s.p2.1-2, 2004o.p2.1-2, 2002s.p2.1, 2002o.p2.1, 2001o.p2.1-2

1. (2013o.q7) Un foglio rettangolare, di dimensioni a e b, ha area 1 m^2 e forma tale che, tagliandolo a metà (parallelamente al lato minore) si ottengono due rettangoli simili a quello di partenza. Quali sono le misure di a e b?

2. (2012o.q9) Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

3. (2011s.q10) Data una circonferenza di centro O, si conducano negli estremi A e B di un suo diametro AB le tangenti e siano C e D i punti d'intersezione di esse con una terza tangente alla circonferenza. Si dimostri che l'angolo $C\hat{O}D$ è retto.

4. (2010s.q10) Si dimostri che le differenza dei quadrati di due lati di un triangolo è uguale alla differenza dei quadrati delle rispettive proiezioni dei lati stessi sul terzo lato del triangolo.

5. (2009s.q4) Dato un triangolo inscritto in un semicerchio, se sui suoi cateti presi come diametri ed esternamente si costruiscono due semicerchi, da questi e dal dato semicerchio sono determinati due menischi, detti lunule d'Ippocrate. Si dimostri che la loro somma ha la stessa area del triangolo.

6. (2005s.q1) E' dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi. Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle basi del trapezio.

7. (2004s.q7) Il quadrilatero Q'' avente per vertici i punti medi di un quadrilatero convesso Q' è un quadrato. Dire quali sono le caratteristiche del quadrilatero Q' e darne un'esauriente dimostrazione.

8. (2004s.q5) Considerato un triangolo equilatero di altezza h e detto P un suo qualsiasi punto interno, indicare con x, y e z le distanze di P dai lati del triangolo. La somma $x + y + z$ risulta:

   (a) sempre maggiore di h,

   (b) sempre minore di h,

   (c) sempre uguale ad h,

   (d) a volte maggiore di h, a volte minore, a volte uguale.

   Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

GEOMETRIA SOLIDA

Problemi: 2012s.p1.1, 2005s.p1, 2004s.p2.3, 2004o.p2.4, 2003s.p2.1-3-4, 2003o.p1.1-2-3, 2002s.p2.2, 2002o.p2.4, 2001s.p2.1-2

1. (2014s.q7) Una scatola di forma cilindrica ha raggio r e altezza h. Se si aumenta del 5% ciascuna sua dimensione, di quanto aumenterà, in termini percentuali, il suo volume?

2. (2014o.q2) Si spieghi perchè non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni.

3. (2013s.q7) Un cubo di legno di pioppo (densità $\rho_1 = 0,385$ g/cm^3) ed un tetraedro regolare di cristallo ($\rho_2 = 3,33$ g/cm^3) hanno entrambi lo spigolo $l = 5$ cm. Quale dei due ha la massa maggiore?

4. (2013o.q4) Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a, b e h, illustrando il ragionamento seguito.

5. (2012s.q7) Un ottaedro regolare di alluminio (densità $\rho = 2{,}7$ g/cm^3), avente lo spigolo $l = 5$ cm, presenta all'interno una cavità di forma cubica. Sapendo che la massa dell'ottaedro è $m = 155$ g, si calcoli la lunghezza dello spigolo della cavità.

6. (2012o.q7) E' dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h.

7. (2011s.q7) Si domanda quale rapporto bisogna stabilire tra lo spigolo dell'ottaedro regolare e lo spigolo del cubo affinchè i due solidi abbiano volumi uguali.F

8. (2011o.q9) Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

9. (2010s.q7) Un tetraedro ed un ottaedro regolari hanno gli spigoli della stessa lunghezza l. Si dimostri che il volume dell'ottaedro è il quadruplo di quello del tetraedro.

10. (2010o.q2) Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli.

11. (2009o.q9) Nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono avente come vertice il centro della semisfera, e come base la base del cilindro avente un solo punto in comune con la semisfera.

12. (2009o.q4) *Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni.* Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

13. (2008s.q8) Si stabilisca per quali valori del parametro reale k esiste una piramide triangolare regolare tale che k sia il rapporto tra il suo apotema e lo spigolo di base.

14. (2008s.q6) Si sechi il solido di una sfera con un piano, in modo che il circolo massimo sia medio proporzionale fra le superficie appianate delle calotte nelle quali rimane divisa la sfera.

15. (2008o.q1) Si consideri la seguente proposizione: *Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area.* Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

16. (2007s.q6) Si consideri la seguente proposizione: *Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti distinti è una retta.* Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

17. (2006s.q5) Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce di un tetraedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al primo.

18. (2006o.q2) I poliedri regolari - noti anche come solidi platonici - sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

19. (2005s.q2) Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D.

20. (2005o.q8) I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. E' un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei solidi?

21. (2004o.q2) Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

22. (2003o.q2) Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

23. (2003o.q1) Dopo aver fornito la definizione di rette sghembe, si consideri la seguente proposizione: *comunque si prendano nello spazio tre rette x, y e z, due a due distinte, se x e y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z, allora anche x e z sono sghembe.* Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

24. (2002s.q10) Di due rette a e b, assegnate nello spazio ordinario, si sa soltanto che entrambe sono perpendicolari ad una stessa retta p.

    (a) E' possibile che le rette a e b siano parallele?

    (b) E' possibile che le rette a e b siano ortogonali?

    (c) Le rette a e b sono comunque parallele?

    (d) Le rette a e b sono comunque ortogonali?

    Per ciascuna delle quattro domande motivare la relativa risposta.

25. (2002s.q9) Dato un tetraedro regolare, si consideri il quadrato avente per vertici i punti medi degli spigoli di due facce. Dimostrare che si tratta di un quadrato.

26. (2002o.q2) Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A' e A'' e volumi V' e V''. Si sa che $\frac{A'}{A''} = 2$. Calcolare il valore del rapporto $\frac{V'}{V''}$.

27. (2002o.q1) Il rapporto tra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendo ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

28. (2001s.q2) Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati ABCD e A'B'C'D'. Indicato con E il punto medio dello spigolo AB, sia CF la retta perpendicolare a DE condotta per C. I piani D'DE e C'CF dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse.

29. (2001o.q4) Un tronco di piramide ha basi di aree B e b e altezza h. Dimostrare, con il metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3}h(B + b + \sqrt{Bb}).$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

30. (2001o.q3) Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati ABCD e A'B'C'D'. Sia E il punto medio dello spigolo AB. I piani ACC'A' e D'DE dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

GEOMETRIA ANALITICA

Problemi: 2013s.p2.3, 2013o.p2.2, 2012o.p2.4, 2007s.p1.1, 2006s.p1.1, 2004s.p2.4, 2003o.p1.4, 2001o.p2.3, 2001o.p1.3-4

1. (2013o.q3) Si considerino, nel piano cartesiano, i punti A(2;-1) e B(-6;-8). Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A.

2. (2009s.q5) Si determini il luogo γ dei punti di intersezione delle due rette di equazioni:

$$\lambda x - y - (\lambda + 2) = 0, \qquad (1 - \lambda)x + y + 2 = 0,$$

descritto al variare di λ, parametro reale qualunque. Si disegni la curva γ.

3. (2008s.q10) Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, si dica che cosa rappresenta l'insieme dei punti $P(1 + t^2, 1 + t^2)$, ottenuto al variare di t nei reali.

4. (2008s.q1) Si determini la distanza delle due rette parallele:

$$3x + y - 3\sqrt{10} = 0 \qquad 6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0.$$

5. (2005s.q9) In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le rette r ed s di equazioni rispettivamente $2x + my = 1$ e $mx - 2y = 2$, dove m è un parametro reale. Qual è l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto di intersezione delle due rette al variare di m?

6. (2004s.q6) Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si consideri l'equazione:

$$xy + px + qy + r = 0.$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q ed r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

7. (2002s.q1) Si consideri la seguente equazione in x, y: $2x^2+2y^2+x+y+k = 0$, dove k è un parametro reale. La sua rappresentazione in un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali:

   (a) E' una circonferenza per ogni valore di k;
   (b) E' una circonferenza solo per $k < \frac{1}{2}$;
   (c) E' una circonferenza solo per $k < \frac{1}{4}$;
   (d) Non è una circonferenza qualunque sia k.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e giustificare la risposta.

GONIOMETRIA

1. (2011s.q6) Si dica se l'equazione $2\sin(x) + 2\cos(x) = 3 + 2^x$ ha soluzione.

2. (2009s.q6) Sono dati un angolo α di π^2 radianti e un angolo β di 539 gradi. Si verifichi che sono entrambi maggiori di un angolo giro e minori di due angoli giro. Si dica quale dei due è il maggiore. Si dica inoltre se è più grande il seno di α o il seno di β.

3. (2006s.q2) Il numero delle soluzioni dell'equazione $\sin(2x)\cos(x) = 2$ nell'intervallo reale $[\,0, 2\pi\,]$ è:

$$A)\,0; \qquad B)\,2; \qquad C)\,3; \qquad D)\,5.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4. (2005s.q3) Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione:

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{4}.$$

Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ oppure $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$ (k intero qualsiasi); Gianna ottiene la soluzione $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{12}$ (k intero qualsiasi). E' vero o falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.

5. (2005o.q9) Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di

$$\sin^2(35°) + \sin^2(55°)$$

ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.

6. (2004o.q8) La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi sessagesimali, i radianti, i gradi centesimali. Quali ne sono le definizioni?

7. (2003s.q5) Dare una giustificazione delle formule:

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 \qquad\qquad \cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

e utilizzarle per provare che $\cos(4\alpha) = 8\cos^4(\alpha) - 8\cos^2(\alpha) + 1$.

TRIGONOMETRIA

Problemi: 2014s.p2.1, 2013s.p2.1-2, 2013s.p1.1, 2011s.p1.1, 2010s.p1.1, 2009s.p1.1, 2009o.p1.1, 2008s.p1.1, 2008o.p2.3, 2007s.p1.2, 2007o.p2.2, 2007o.p1.1, 2007o.p1.4, 2003s.p1, 2002o.p2.3

1. (2014s.q5) Un osservatore posto sulla riva di un lago a 236 m sopra il livello dell'acqua, vede un aereo sotto un angolo di elevazione α di 42,4° e la sua immagine riflessa sull'acqua sotto un angolo di depressione β di 46,5°. Si trovi l'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore.

2. (2014o.q1) Un triangolo ha un angolo α opposto al lato $a = 4$, e un angolo $\beta = 30°$ opposto al lato $b = 3$. Si calcoli la misura, in gradi e primi sessagesimali, di α.

3. (2013s.q5) Un aereo civile viaggia in volo orizzontale con velocità costante lungo una rotta che lo porta a sorvolare Venezia. Da uno squarcio nelle nuvole il comandante vede le luci della città con un angolo di depressione di 7°. Tre minuti più tardi ricompaiono nuovamente le luci, questa volta però l'angolo di depressione misurato è di 13°. Quanti minuti saranno ancora necessari perchè l'aereo venga a trovarsi esattamente sopra la città?

4. (2013o.q1) Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.

5. (2012s.q5) Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello, un capo tuareg vede la cima di una grande palma e dirige direttamente verso di essa. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di 4°; venti minuti più tardi l'angolo di elevazione misura 9°. Quanti minuti sono ancora necessari al tuareg per raggiungere l'albero?

6. (2011s.q1) Si sa che alcuni uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di 30°. Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a 20°, con che velocità si stanno spostando gli uccelli?

7. (2010o.q9) Si provi che non esiste un triangolo ABC con $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 2$ e $A\hat{B}C = 45°$. Si provi altresì che se $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 2$ e $A\hat{B}C = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

8. (2010s.q2) In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto.

9. (2009s.q7) Il comandante di una nave decide di raggiungere il porto B partendo dal punto A e seguendo un percorso rettilineo. A causa di un errore, però, la nave inizia la sua navigazione lungo una rotta leggermente diversa da quella prevista. Dopo 5 ore ci si accorge dello sbaglio e il comandante ordina di virare di un angolo di 23° in modo da dirigere ora esattamente verso il porto B, che viene raggiunto dopo 3 ore. Se l'imbarcazione ha mantenuto sempre una velocità costante, quanto tempo si è perso a causa dell'errore?

10. (2008o.q2) Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

11. (2007o.q2) Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

12. (2005o.q1) Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $\sin(18^\circ)$ e $\sin(36^\circ)$.

13. (2004s.q10) Di triangoli non congruenti, di cui un lato è lungo 10 cm e i due angoli interni adiacenti ad esso, α e β, sono tali che $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$ e $\sin(\beta) = \frac{24}{25}$, ne esistono:

    $$A)\ 0; \qquad B)\ 1; \qquad C)\ 2; \qquad D)\ 3.$$

    Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

14. (2004o.q7) Un triangolo ha due lati e l'angolo tra essi compreso che misurano rispettivamente a, b e δ. Qual è il valore di δ che massimizza l'area del triangolo?

15. (2003o.q3) Dal punto A, al quale non è possibile accedere, è visibile il punto B, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza AB. Dal punto A si può però accedere al punto P, dal quale oltre ad A, è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza PB, è tuttavia possibile misurare la distanza AP. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e B, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza AB.

FUNZIONI

1. (2014s.q1) Si determini il dominio della funzione

    $$f(x) = \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 2}.$$

2. (2014o.q9) Si determini il dominio della funzione

    $$f(x) = \sqrt{3 - \log_2(x+5)}$$

3. (2013o.q2) Si calcoli il dominio della funzione

    $$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3-x}}}$$

4. (2012o.q10) Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale? Si giustifichi la risposta.

    $$A)\ \cos(\sin(x^2+1)) \qquad B)\ \sin(\cos(x^2+1)) \qquad C)\ \sin(\ln(x^2+1)) \qquad D)\ \cos(\ln(x^2+1))$$

5. (2011s.q4) Si determini il campo di esistenza della funzione

    $$f(x) = (3\cos(x) + \sin^2(x) - 3)^{\cos(x)}.$$

    Che cosa succederebbe se l'esponente fosse $\sin(x)$?

6. (2010s.q6) Si determinino a e b in modo tale che il grafico della funzione $y = a^{x+b}$ passi per i punti del piano xy di coordinate (1,4) e (3,8).
7. (2010o.q6) Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$.
8. (2009o.q10) Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos(5x)$.
9. (2009o.q2) Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di A in B, ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?
10. (2007s.q2) Si determini il campo di esistenza della funzione $y = arc\sin(tg(x))$, con $0 \leq x \leq 2\pi$.
11. (2005s.q8) E' vero o falso che le due funzioni $\ln(x^2-4)$ e $\ln(x+2)+\ln(x-2)$ hanno lo stesso grafico? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.
12. (2004o.q10) Considerate gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?
13. (2003s.q2) Cosa si intende per funzione periodica? Qual è il periodo della funzione $f(x) = \sin x - 2\cos x$?
14. (2003o.q4) Il dominio della funzione $f(x) = \ln[\sqrt{x+1} - (x-1)]$ è l'insieme degli x reali tali che:

   $$A)\ -1 < x \leq 3; \qquad B)\ -1 \leq x < 3; \qquad C)\ 0 < x \leq 3; \qquad D)\ 0 \leq x < 3.$$

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

LIMITI

Problemi: 2007o.p2.3

1. (2014s.q8) Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}{\log \sin 2x}$ quando x tende a $\dfrac{\pi}{4}$.
2. (2013o.q9) Si calcoli:
   $$\lim_{x\to 0} 4\,\frac{\sin x\,\cos x - \sin x}{x^2}.$$
3. (2011s.q9) Si calcoli il limite della funzione $\frac{e^{x^3}-1}{x\,\sin^2(x)}$ quando x tende a 0.
4. (2011o.q6) Si calcoli
   $$\lim_{x\to a} \frac{\tan(x) - \tan(a)}{x - a}.$$
5. (2010s.q2) Considerata la funzione
   $$f(x) = \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x},$$
   dove a è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$.
6. (2010o.q4) Si calcoli
   $$\lim_{x\to\infty} 4x\,\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$
7. (2009o.q6) Si calcoli
   $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$
8. (2009s.q2) Si calcoli il limite della funzione
   $$\frac{\ln^2(x) + x - 1}{x^2 - x + sen^2(x-1)}$$
   quando x tende a 1.
9. (2008o.q9) Sia $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$; esiste $\lim_{x\to 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.

10. (2008s.q4) Si calcoli il limite della funzione

$$\frac{\cos(x) - \cos(2x)}{1 - \cos(x)}$$

quando x tende a 0.

11. (2007s.q1) Si calcoli il limite della funzione $\frac{x^2 \cos(x)}{x^2 - sen^2(x)}$, quando x tende a 0.

12. (2006s.q8) E' assegnato un triangolo equilatero di lato lungo L. Si costruisce un secondo triangolo, avente per vertici i punti medi dei lati del primo e, così proseguento, un n-esimo triangolo avente per vertici i punti medi dei lati del triangolo $(n-1)$-esimo. Calcolare il limite cui tende la somma delle aree degli n triangoli quando n tende a ∞.

13. (2006s.q7) Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x)$, affermare che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ significa che per ogni numero reale M, esiste un numero reale N tale che, per ogni x, se $x > N$ allora $f(x) > M$. E' vero o è falso? Accompagnare la risposta con un'interpretazione grafica.

14. (2005s.q4) Si consideri la seguente equazione in x:

$$(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0$$

dove k è un parametro reale diverso da 2. Indicate con x' e x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x' + x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.

15. (2005s.q5) Il limite della funzione $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ per $x \to 0$:

    (a) è uguale ad 1;
    (b) è uguale a $+\infty$;
    (c) non esiste;
    (d) è uguale ad e;
    (e) è uguale a $\frac{1}{e}$;

    essendo e la base dei logaritmi naturali. Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.

16. (2004s.q1) La funzione $f(x) = \frac{3x - 2\sin x}{2x - 3\sin x}$ è, per $x \to +\infty$, una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Il limite della funzione, per $x \to +\infty$:

    A) non esiste; B) è $\frac{3}{2}$; C) è $\frac{2}{3}$; D) è un valore diverso da $\frac{3}{2}$ e $\frac{2}{3}$.

    Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

17. (2004o.q5) Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che:

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 3 \qquad \text{e} \qquad g(2) = 4.$$

    Trovate una espressione di $g(x)$.

18. (2002s.q2) Considerata la funzione di variabile reale $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$, dire se esiste il limite di $f(x)$ per x tendente ad 1 e giustificare la risposta.

19. (2001o.q1) Indicata con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \to l$ per $x \to a$, essendo l ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a) = l$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

20. (2001o.q9) Il limite della funzione $\frac{\sin x - \cos x}{x}$, quando x tende a $+\infty$,

    (a) è uguale a 0;
    (b) è uguale a 1;
    (c) è un valore diverso dai due precedenti;
    (d) non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

ASINTOTI

1. (2013s.q6) Si consideri la curva d'equazione $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$. La curva ha asintoti? In caso affermativo, se ne determinino le equazioni.
2. (2012s.q6) Si determinino le equazioni degli asintoti della curva
$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - x.$$
3. (2012o.q2) Si illustri il significato di asintoto e si fornisca un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.
4. (2008s.q3) Si determinino le equazioni degli asintoti della curva $f(x) = -x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.
5. (2007s.q9) Si determinino le equazioni degli asintoti della curva $f(x) = \frac{2x^2+3}{x+2}$.
6. (2003s.q10) Definire gli asintoti - orizzontale, obliquo, verticale - di una curva e fornire un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

CONTINUITA'

1. (2011s.q2) La funzione
$$f(x) = \frac{1}{(e^{\frac{1}{x}} - 1)^2}$$
non è definita nel punto $x = 0$, che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della $f(x)$ per x tendente a zero da sinistra e per x tendente a zero da destra.
2. (2010o.q7) Per quali o quali valori di k la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4 & \text{per } x \leq 4 \\ kx^2 - 2x - 1 & \text{per } x > 4 \end{cases}$$
è continua in $x = 4$?
3. (2006o.q8) La funzione $f(x) = tg(x)$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. E' così? Perchè?
4. (2002s.q4) Sia $f(x)$ una funzione di variabile reale definita nel modo seguente:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \sin 2x & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1+a}{\sin x} & \text{per } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$
dove a è un parametro reale non nullo. Stabilire se esiste un valore di a per il quale il dominio della funzione possa essere prolungato anche nel punto $x = 0$ in modo continuo.

DERIVATE

Problemi: 2012s.p2.d3, 2012s.p1.3, 2012o.p1.2, 2011o.p1.2, 2010s.p2.1, 2010o.p2.2-3, 2010o.p1.3, 2009s.p2.1, 2009o.p2.1-2, 2008s.p2.3, 2007s.p2.3, 2006s.p1.3, 2006o.p2.1, 2005o.p2.1, 2003o.p2.1-2, 2002s.p1.3-4, 2002o.p1.2-3-4, 2001s.p1.1, 2001o.p1.5

1. (2014s.q3) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione
$$f(x) = \frac{x^2}{3}\left(2 + \sin^2 \frac{1}{x}\right)$$
nel punto P di ascissa $x = \dfrac{1}{\pi}$.
2. (2014s.q2) La funzione
$$f(x) = \sin \sqrt[3]{x}$$
è evidentemente continua nel punto $x = 0$. Si dimostri che nello stesso punto non è derivabile.

3. (2014o.q8) Del polinomio di quarto grado $P(x)$ si sa che assume il suo massimo valore 3 per $x = 2$ e $x = 3$ e, ancora, che $P(1) = 0$. Si calcoli $P(4)$.

4. (2013s.q3) Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione
$$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$
nel punto P di ordinata $y = 2$.

5. (2012s.q3) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x) = (x+2)^{\ln(e+2x)}$$
nel punto P(0,2).

6. (2012s.q2) Data la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)\cdot\ln(\sin(2x)) & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases},$$
si provi che è continua, ma non derivabile, nel punto $x = 0$.

7. (2012o.q6) Sia $f(x) = 5\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x) - \frac{5}{2}\sin(2x) - \cos(2x) - 17$; si calcoli $f'(x)$.

8. (2012o.q1) Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?
$$\lim_{h\to 0} \frac{5\left(\frac{1}{2}+h\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}$$

9. (2011s.q8) Si dimostri che la seguente proposizione è vera: *Se il grafico di una funzione razionale intera $f(x)$ è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, allora il grafico della sua derivata $f'(x)$ è simmetrico rispetto all'origine.*

10. (2010s.q9) Si dimostri che se una funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0, ivi è anche continua; si porti un esempio di funzione continua in un punto e ivi non derivabile.

11. (2010s.q8) Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = 2t$ e $y = \frac{2}{t^2+1}$ nel suo punto di coordinate (2,1).

12. (2010s.q4) Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

13. (2010o.q3) Sia γ il grafico di $f(x) = e^{3x} + 1$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x, f(x))$ ha pendenza uguale a 2?

14. (2008s.q9) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione
$$f(x) = (x^2+1)^{\sin(x)}$$
nel punto P di ascissa $x = \frac{\pi}{2}$.

15. (2007s.q7) Sia data la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} x\,arctg(\frac{1}{x}) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$
Si dica se essa è continua e derivabile nel punto di ascissa 0.

16. (2006s.q6) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ e stabilire se la funzione è derivabile in tale dominio.

17. (2006s.q4) Trovare, col procedimento preferito ma con esauriente spiegazione, la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x) = \tan(x)$.

18. (2006o.q9) Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da 0 in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

19. (2005o.q10) Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = \arctan(x) - \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

20. (2005o.q5) Il numero e di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perchè la derivata di e^x è e^x?

21. (2005o.q3) Si dimostri che la curva $y = x \ \sin(x)$ è tangente alla retta $y = x$ quando $\sin(x) = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\sin(x) = -1$.

22. (2004o.q6) Verificate che le due funzioni $f(x) = 3 \log x$ e $g(x) = \log(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?

23. (2001s.q1) Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, si prendano in esame le due seguenti proposizioni:

    (a) A: condizione necessaria e sufficiente affinchè $f(x)$ sia definita in un punto a è che sia continua in a.

    (b) B: condizione necessaria e sufficiente affinchè $f(x)$ sia continua in un punto a è che sia derivabile in a.

    Una sola delle seguenti combinazioni è corretta: individuarla e fornire un'esauriente giustificazione della risposta:

    $a)$A vera - B vera; $b)$A vera - B falsa; $c)$A falsa - B vera; $d)$A falsa - B falsa.

24. (2001s.q5) Dimostrare che la derivata, rispetto ad x, della funzione a^x, dove a è un numero reale positivo diverso da 1, è $a^x \log a$.

25. (2001s.q9) Calcolare la derivata della funzione $\sin 2x$ rispetto alla variabile x, ricorrendo alla definizione di derivata di una funzione.

26. (2001o.q5) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo $[a, b]$ e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti $f'(x) = 0$. Dimostrare che $f(x)$ è costante in quell'intervallo.

TEOREMI DI ROLLE E LAGRANGE

Problemi: 2011o.p2.1-4, 2002o.p1.5

1. (2013s.q10) Si controlli se la funzione $f(x) = \tan x + \sin x + 7$, nell'intervallo chiuso $[0, \pi]$, verifica le ipotesi del teorema di Rolle e, in caso affermativo, si calcoli l'ascissa dei punti ove si annulla la derivata prima.

2. (2012s.q10) Data la funzione:
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$$
si verifichi che esiste un solo punto ξ interno all'intervallo chiuso $[-1, 0]$ tale che la tangente al diagramma in questo punto è parallela alla corda congiungente i due punti estremi del diagramma.

3. (2009s.q10) Si enunci il teorema di Rolle e si mostri, con opportuni esempi, che se una qualsiasi delle tre condizioni previste non è soddisfatta, il teorema non è valido.

4. (2009o.q3) Per quale o quali valori di k la curva di equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?

5. (2007s.q4) Si provi che per la funzione $f(x) = x^3 - 8$, nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$, sono verificate le condizioni di validità del teorema di Lagrange e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.

6. (2007o.q5) Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del teorema del valor medio (o teorema di Lagrange) sull'intervallo $[-2, 2]$. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geomertico.

7. (2006o.q10) La funzione $f(x) = a \ \sin(x) + b \ \cos(x)$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4}{3}\pi$ ed è $f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 1$. Si trovino a e b e si dica qual è il periodo di $f(x)$.

8. (2006o.q7) La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 1]$? Se sì, trova il punto ξ che compare nella formula
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

9. (2004s.q3) Sia $F(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a. Si sa che se $F'(a) > 0$ allora $F(x)$ è crescente in a, mentre se $F'(a) < 0$ allora $F(x)$ è decrescente in a. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinchè $F(x)$ ammetta in a un massimo relativo è che risulti $F'(a) = 0$ ed $F''(a) < 0$.

10. (2004o.q3) Date un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in (1,3) e un minimo relativo in (-1,2).

11. (2003s.q7) Enunciare il teorema del valor medio o di Lagrange e mostrarne le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.

12. (2002s.q3) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Si sa che: $f(x)$ è derivabile su tutto l'asse reale, $f(x) = 0$ solo per $x = 0$; $f(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$; $f'(x) = 0$ soltanto per $x = -2$ e $x = 1$; $f(-2) = 1$ ed $f(1) = -2$.
Dire, dandone esauriente spiegazione, se le informazioni suddette sono sufficienti per determinare gli intervalli in cui la funzione è definita, quelli in cui è continua, quelli in cui è positiva, quelli in cui è negativa, quelli in cui cresce, quelli in cui decresce. Si può dire qualcosa circa i flessi di $f(x)$?

13. (2002o.q8) La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[1, 3]$ e derivabile nell'intervallo aperto $(1, 3)$. Si sa che $f(1) = 1$ e inoltre $0 \leq f'(x) \leq 2$ per ogni x dell'intervallo (1,3). Spiegare in maniera esauriente perchè risulta $1 \leq f(3) \leq 5$.

14. (2002o.q6) Si consideri la funzione $f(x) = (2x-1)^7(4-2x)^5$. Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

15. (2001o.q8) Considerata la funzione $f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$, dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

UNICITA' DELLA SOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE

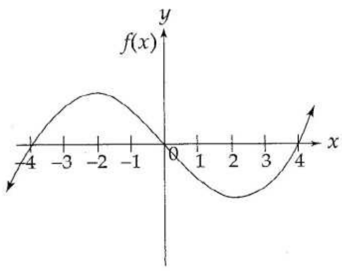
Problemi: 2005o.p2.2

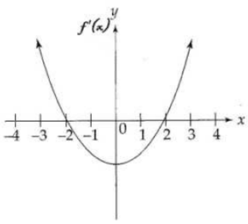
1. (2011o.q7) Si provi che l'equazione $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa tra -1 e 0.
2. (2009o.q8) Si provi che l'equazione $x^{2009} + 2009x + 1 = 0$ ha una sola radice compresa tra -1 e 0.
3. (2004o.q4) Dimostrate che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione reale.
4. (2003s.q6) Dimostrare che l'equazione $x^5 + 10x + 1 = 0$ ammette una sola soluzione reale.
5. (2003o.q5) La funzione $2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

DERIVATE SECONDE

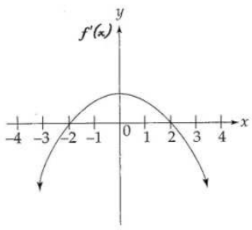
Problemi: 2011s.p2.2, 2007s.p1.3, 2006s.p2.1-2

1. (2014s.q6) Si trovino gli eventuali flessi della curva
$$f(x) = x\left[(\log 3x)^2 - 2\,\log 3x + 2\right].$$
2. (2013o.q10) Se la figura a lato rappresenta il grafico di $f(x)$, quale dei seguenti potrebbe essere il grafico di $f'(x)$? Si giustifichi la risposta.

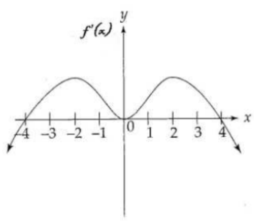




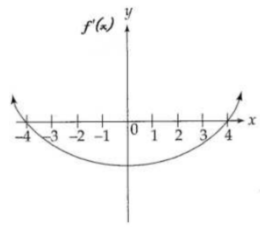
A)



B)



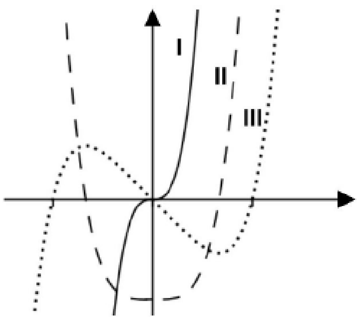
C)



D)

3. (2012o.q3) La posizione di una particella è data da $s(t) = 20(2e^{-\frac{t}{2}} + t - 2)$. Qual è la sua accelerazione al tempo $t = 4$?
4. (2011o.q10) Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''. Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici? Si motivi la risposta.

	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II



5. (2010o.q1) Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x) = n!\, a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n.

6. (2008o.q8) Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

7. (2005s.q6) Fornire un esempio di funzione reale di variabile reale $f(x)$ avente le seguenti caratteristiche: $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$, $f''(1) < 0$.

8. (2003s.q4) Provare che se l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ha due soluzioni entrambe di valore k, allora k è anche soluzione dell'equazione $y' = 0$, avendo posto $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. A quale condizione k è anche soluzione di $y'' = 0$?

9. (2001s.q10) Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, derivabile almeno due volte in un dato punto a, affinchè la funzione $f(x)$ abbia in a almeno un punto di flesso la condizione $f''(a) = 0$ è:

   (a) necessaria e sufficiente;

   (b) necessaria ma non sufficiente;

   (c) sufficiente ma non necessaria.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO

Problemi: 2010s.p2.4, 2009s.p1.3, 2009o.p1.3, 2008s.p1.3, 2008o.p2.2, 2008o.p1.1-2-3, 2007o.p2.4, 2007o.p1.3, 2006s.p1.4-5, 2006o.p1, 2005o.p1.4, 2004s.p1.3, 2004o.p2.3, 2003s.p2.2, 2002s.p2.3-4, 2002o.p2.2, 2001s.p2.3-4

1. (2014o.q6) Un'azienda commercializza il suo prodotto in lattine da 5 litri a forma di parallelepipedo a base quadrata. Le lattine hanno dimensioni tali da richiedere la minima quantità di latta per realizzarle. Quali sono le dimensioni, arrotondate ai mm, di una lattina?

2. (2013s.q1) E' dato il settore circolare AOB, di centro O, raggio r e ampiezza $\frac{\pi}{3}$. Si inscriva in esso il rettangolo PQMN, con M ed N sul raggio OB, Q sull'arco AB e P su OA. Si determini l'angolo $\widehat{QOB} = x$, affinchè il perimetro del rettangolo sia massimo.

3. (2012s.q1) Si divida il segmento $\overline{AB} = a$ in due parti AC e CB, in modo che, costruito su AC il quadrato ACDE e su CB il triangolo equilatero CBF, sia minima l'area del pentagolo ABFDE.

4. (2012o.q4) Qual è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?

5. (2011s.q3) La retta di equazione $x = 8$ seca la parabola di equazione $x = y^2 - 4y + 3$ nei punti A e B. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base AB si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di 180° intorno all'asse della parabola.

6. (2011o.q2) Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4, 0)$.

7. (2011o.q1) Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

8. (2010s.q3) Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza $2r$, e una sfera di raggio r. A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale β, perchè la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

9. (2010o.q5) Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

10. (2008s.q2) Un trapezio rettangolo è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio r in modo che la base maggiore contenga il diametro. Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo acuto del trapezio, affinchè il solido da esso generato in una rotazione completa attorno alla base maggiore abbia volume minimo.

11. (2008o.q3) Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?

12. (2007s.q5) Fra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.

13. (2007o.q4) Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.

14. (2006o.q3) Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di 50 cm^2, margini superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?

15. (2005o.q4) Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.

16. (2005o.q2) Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri, affinchè sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta)

17. (2003s.q1) Tra i rettangoli aventi la stessa area di $16m^2$ trovare quello di perimetro minimo.

18. (2001s.q6) Fra i rettangoli di dato perimetro determinare quello di area massima.

19. (2001o.q7) Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:

    (a) area massima e perimetro massimo;
    (b) area massima e perimetro minimo;
    (c) area minima e perimetro massimo;
    (d) area minima e perimetro minimo.

    Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

TEOREMA DI DE L'HOPITAL

1. (2008o.q4) Si esponda la regola del marchese De L'Hopital (1661-1704) e la si applichi per dimostrare che è:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0.$$

2. (2006s.q3) Il limite della funzione $f(x) = x - \ln(x)$, per $x \to +\infty$:

    (a) è 0;
    (b) è un valore finito diverso da 0;
    (c) è $+\infty$;
    (d) è $-\infty$.

    Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

3. (2001.q10) Si consideri la funzione $\frac{x+\sin x}{x-\cos x}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \to +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hopital.

RISOLUZIONE GRAFICA DI EQUAZIONI

1. (2008o.q7) Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione
$$x^3 - 3x^2 + k = 0.$$

2. (2007o.q3) Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione
$$x^3 - x^2 - k + 1 = 0$$

3. (2006o.q6) L'equazione risolvente un dato problema è: $k\ \cos(2x) - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

4. (2005o.q7) Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, per quanti numeri reali k è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito.

STUDIO DI FUNZIONI

Problemi: 2014s.p2.1-2, 2014s.p1.2-3, 2014o.p2, 2013s.p1.2-3, 2013o.p2.1, 2012s.p2.1, 2012s.p1.2, 2012o.p1.1, 2011s.p2.1, 2011s.p1.2-3, 2011o.p2.2, 2011o.p1.1, 2010s.p2.2, 2010s.p1.2-3, 2010o.p1.2, 2009s.p2.2, 2009s.p1.2, 2009o.p1.2, 2008s.p2.2, 2008s.p1.2, 2008o.p2.4, 2007s.p2.1-2, 2007o.p1.2, 2006s.p2.3-4, 2006o.p2.3, 2005s.p2, 2005o.p2.3, 2004s.p1.1-2-5, 2004o.p1.1-4, 2003o.p2.3, 2002s.p1.2, 2002o.p1.1, 2001s.p1.2, 2001o.p1.1-2

INTEGRALI E AREE

Problemi: 2014s.p2.3-4, 2014s.p1.4, 2013s.p2.4, 2013s.p1.4, 2013o.p2.3, 2012s.p1.4, 2012o.p2.1, 2012o.p1.3, 2011s.p2.3, 2011s.p1.4, 2011o.p2.3, 2011o.p1.3, 2010s.p2.3, 2010o.p2.4, 2010o.p1.4, 2009s.p1.4, 2009o.p2.3, 2008s.p2.1-4, 2008s.p1.4, 2007s.p2.4, 2007s.p1.4, 2006s.p2.5, 2006s.p1.2, 2006o.p2.2, 2005o.p2.3-4, 2005o.p1.3-4, 2004s.p1.4, 2004o.p1.2-3, 2003o.p2.4, 2003o.p1.5, 2002s.p1.5, 2001s.p1.3, 2001o.p2.4

1. (2011o.q5) Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos(x)$ e dall'asse x da $x = 1$ a $x = 2$ radianti.

2. (2009o.q1) Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è $\sin(x)$ e il cui grafico passa per il punto (0,2).

3. (2009s.q8) Data la parabola $x = -ay^2 + 3y$ (con $a > 0$), si determini per quale valore di a l'area della parte finita di piano compresa tra il suo grafico e l'asse y è uguale a 72.

4. (2008o.q5) Si determini un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che:
$$P(0) = P'(0) = 0, \qquad P(1) = 0, \qquad \text{e} \int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{12}.$$

5. (2007s.q8) Si determini l'area della regione piana limitata nella curva di equazione $y = e^x$, dalla curva di equazione $y = x^3$ e dalle rette $x = 0$ e $x = 1$.

6. (2007o.q9) Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.

7. (2007o.q7) Se $f(x)$ è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo $[-2, 2]$, che dire del suo integrale esteso a tale intervallo? Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione $3 + f(x)$?

8. (2004s.q8) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale $\int_0^3 f(x)dx$. E' allora possibile calcolare:
$$\int_0^3 f(\frac{x}{3})dx; \qquad \int_0^3 f(3x)dx; \qquad \int_0^1 f(\frac{x}{3})dx; \qquad \int_0^1 f(3x)dx; \qquad .$$
Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

9. (2004o.q9) Calcolate $\int_0^1 \arcsin x dx$.

10. (2003s.q8) Di una funzione $f(x)$ si sa che la derivata seconda è 2^x e si sa ancora che:

$$f(0) = \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2 \qquad \text{e} \qquad f'(0) = 0.$$

Qual è $f(x)$?

11. (2003s.q9) Calcolare l'area della parte finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y = 2e^x - 1$ e dagli assi cartesiani.

12. (2002s.q6) Come si sa, la condizione che la funzione reale di variabile reale $f(x)$ sia continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ è sufficiente per concludere che $f(x)$ è integrabile su $[a, b]$. Fornire due esempi, non concettualmente equivalenti, che dimostrino come la condizione non sia necessaria.

13. (2002s.q7) Una primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+4}$ è:

$$A) \ln \frac{x}{x+1}; \qquad B) \ln \frac{x+2}{x}; \qquad C) \ln \sqrt{x^2 + 2x}; \qquad D) \ln \sqrt{2x^2 + x}.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

14. (2002o.q10) La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x, è tale che

$$\int_0^2 f(x)dx = a, \qquad \int_0^6 f(x)dx = b,$$

dove a, b sono numeri reali.
Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

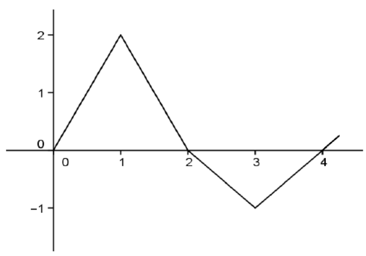
$$\int_0^3 f(2x)dx = \ln 2, \qquad e \qquad \int_1^3 f(2x)dx = \ln 4.$$

15. (2001s.q7) Una primitiva della funzione $f(x)$ è $x^2 + 2x$. Se è possibile calcolare $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, determinare il valore dell'integrale. In caso contrario spiegare perchè il calcolo non è possibile.

LA FUNZIONE INTEGRALE

Problemi: 2014o.p1, 2013o.p1.1-2, 2009s.p2.3-4

1. (2013o.q8) La funzione f ha il grafico in figura. Se $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, per quale valore positivo di x, g ha un minimo? Si illustri il ragionamento seguito.



2. (2003o.q6) La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ è la funzione $f'(x) = 2xe^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

3. (2002o.q7) Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x)$ tale che

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t dt, \qquad \text{con} \qquad x > 0.$$

4. (2001s.q4) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che $f(0) = 1$ ed $f'(0) = 2$. Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{\cos 2x - 1}.$$

5. (2001o.q2) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0) = 2$. Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{2xe^x},$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

VALORE MEDIO

Problemi: 2013o.p1.3, 2010s.p1.4

1. (2014s.q9) Si calcoli il valore medio della funzione $y = \cos^5 x$ nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
2. (2014o.q7) Il valore medio della funzione $f(x) = x^3$ sull'intervallo chiuso $[0, k]$ è 9. Si determini k.
3. (2013s.q9) Si calcoli il valore medio della funzione:

$$f(x) = \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

nell'intervallo $1 \leq x \leq 4$.

4. (2012s.q9) Si calcoli il valore medio della funzione:

$$y = \frac{1}{x^2}$$

nell'intervallo $a \leq x \leq b$, con $0 < a < b$, e si dimostri che esso è uguale alla media geometrica tra i due valori che la funzione assume nei due estremi dell'intervallo.

5. (2012o.q8) Qual è il valor medio di $f(x) = \frac{1}{x}$ da $x = 1$ a $x = e$?
6. (2011s.q5) Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$, nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.
7. (2010s.q5) Si calcoli il valore medio della funzione

$$f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$

nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$.

8. (2008s.q5) Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.
9. (2007s.q3) Si calcoli il valore medio della funzione $y = tg^2(x)$, nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

SOLIDI DI ROTAZIONE

Problemi: 2013o.p2.4, 2012o.p2.3, 2012o.p1.4, 2011s.p2.4, 2009o.p2.4, 2005o.p1.1-2

1. (2014s.q4) Data la parte finita di piano compresa tra le rette $x + y - 1 = 0$ e $x - 1 = 0$ ed il grafico della funzione $y = e^x$, si determini la sua area ed il volume del solido ottenuto facendola ruotare di un giro completo attorno all'asse x.
2. (2011.q3) Sia R la regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W.
3. (2010o.q10) Si consideri la regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y.

4. (2006s.q1) Si considerino il rettangolo ABCD e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta AD, il vertice nel punto medio del lato AB e passante per i punti C e D. In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume V' e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta CD genera un solido di volume V". Determinare il rapporto $\frac{V'}{V''}$.

5. (2009s.q3) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, dall'asse x e dalle rette $x = 1$ e $x = \sqrt{3}$.

6. (2001s.q8) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sia T un trapezoide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x)$, continua in tale intervallo. Dimostrare la formula che esprime il volume del solido generato dal trapezoide quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.

SOLIDI A FETTE

Problemi: 2013o.p1.4, 2012s.p2.4, 2012o.p2.2, 2011o.p1.4, 2009o.p1.4

1. (2014o.q4) Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x) = e^{1/x}$ e dall'asse x sull'intervallo [-2,-1]. In ogni punto di R di ascissa x, l'altezza del solido è data da $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Si calcoli il volume del solido.

2. (2013s.q4) Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x) = \ln x$ e dall'asse x sull'intervallo $[1, e]$. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura dell'altezza del solido è data da $h(x) = x$. Quale sarà il volume del solido?

3. (2012s.q4) La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = 1 + \tan(x)$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.

4. (2008s.q7) La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $f(x) = e^{fracx2}(x + 1)$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$ è la base di un solido S le cui sezioni sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.

5. (2007o.q1) La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$ è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.

ALTRE

Problemi: 2007o.p2.4

1. (2013s.q2) Quali sono i poliedri regolari? Perchè sono detti anche solidi platonici?

2. (2011o.q8) In che cosa consiste il problema della quadratura del cerchio? Perchè è così spesso citato?

3. (2008o.q10) Secondo il codice della strada il segnale di salita ripida preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%. Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale?

4. (2007o.q10) Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a meridiani e paralleli, a latitudini e longitudini. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?