NUMERI COMPLESSI

- Definizione
  - Rappresentazione
  - Forma trig. ed esp.
- Operazioni
  - Addizione
  - Coniugio
  - Moltiplicazione
  - Potenza n-esima
  - Reciproco
  - Divisione
  - Radice n-esima
- Teorema fondamentale dell'algebra

I numeri complessi

Si dice *unità immaginaria* il numero $i \in \mathbb{C}$ tale che

$$i^2 = -1$$

L'insieme $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi* è l'insieme di tutti e soli i numeri che si scrivono nella forma

$$z = a + ib \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

Il termine a si dice *parte reale*, e si scrive che $a = \mathfrak{Re}(z)$.

Il termine ib si dice *parte immaginaria*, e si scrive che $b = \mathfrak{Im}(z)$.

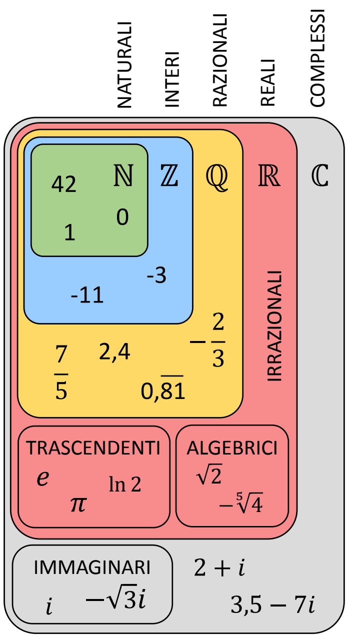
Se $a = 0$, il numero si dice immaginario e assume la forma $z = ib$.

Se $b = 0$, il numero è reale.

Nota Bene
Due numeri complessi si dicono uguali quando hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria. Non è invece definita una relazione d'ordine che permetta di dire se un numero complesso è maggiore o minore di un altro.

Nota Bene

$i^0 = 1 \qquad i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1 \qquad i^5 = i \ldots$

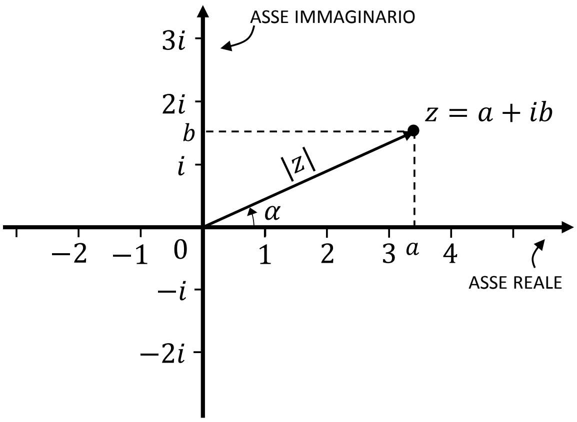


Piano di Gauss

I numeri complessi possono essere anche rappresentati come coppie di numeri reali

$$z = (a; b) \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

e rappresentati così come punti (o vettori) su un piano, detto *piano di Gauss*.



Si dice *modulo* di un numero complesso la quantità (reale positiva o al più nulla):

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

che, nel piano di Gauss, rappresenta la lunghezza del vettore $\vec{z}$.

Si dice *argomento* di un numero complesso e si indica con $\alpha = \arg(z)$ l'angolo che il vettore $\vec{z}$ forma con la direzione positiva dell'asse reale.

Nota Bene

Per convenzione, si indica come argomento l'angolo α tale che $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Nota Bene

Per determinare α, può essere utile:

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} \qquad \sin\alpha = \frac{b}{|z|} \qquad \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

Forma trigonometrica ed esponenziale

Il numero complesso $z = a + ib$ può essere scritto nella forma (*trigonometrica*):

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

dove $|z|$ è il modulo e α l'argomento di z.

Formula di Eulero

$$e^{i\alpha} \overset{\text{def}}{=} \cos\alpha + i\sin\alpha$$

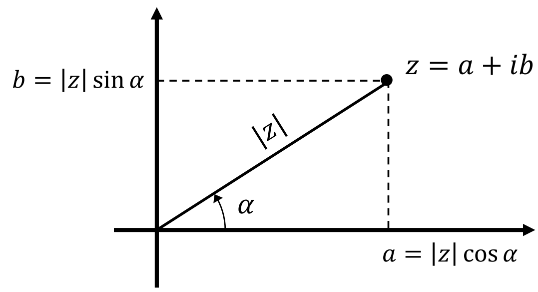
Dalla formula segue che $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$ e:

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \qquad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Il numero complesso $z = a + ib$ può essere scritto nella forma (*esponenziale*):

$$z = |z|e^{i\alpha}$$

dove $|z|$ è il modulo e α l'argomento di z.



Nota Bene

Per passare dalla notazione algebrica alla notazione trigonometrica, si ricavano $|z|$ e α tramite:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

tenendo in considerazione il segno di a per decidere a quale quadrante appartiene α.

Nota Bene

Dalla definizione di esponenziale a esponente complesso deriva la famosa formula di Eulero: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Operazioni con numeri complessi

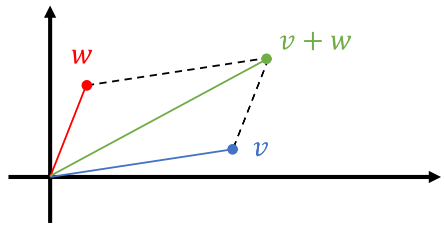
ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Dati i numeri complessi $v = a + ib$ e $w = c + id$:

$$v + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$v - w = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

Nel piano di Gauss, l'addizione o la sottrazione di numeri complessi è equivalente all'addizione o sottrazione di vettori.



CONIUGIO

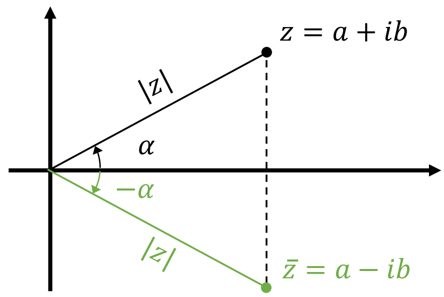
Dato il numero complesso $z = a + ib$, si definisce il suo coniugato $\bar{z}$ nel seguente modo:

$$\bar{z} = a - ib$$

In forma esponenziale, se $z = |z|e^{i\alpha}$:

$$\bar{z} = |z|e^{-i\alpha}$$

Nel piano di Gauss, il coniugio trasforma un punto nel suo simmetrico rispetto all'asse reale.



Operazioni con numeri complessi

MOLTIPLICAZIONE

Dati i numeri complessi $v = a + ib$ e $w = c + id$:

$$v \cdot w = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

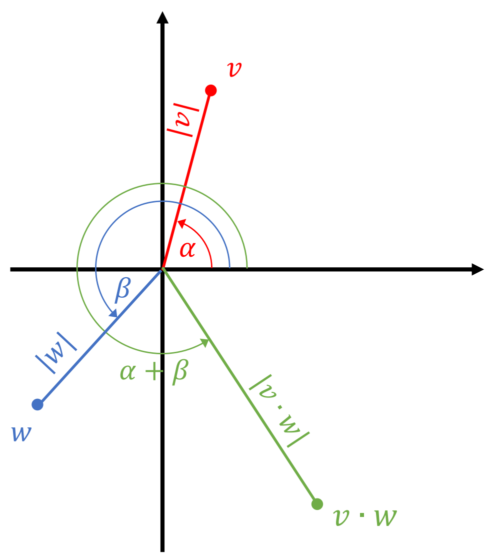
In forma esponenziale, se $v = |v|e^{i\alpha}$ e $w = |w|e^{i\beta}$:

$$v \cdot w = |v|e^{i\alpha} \cdot |w|e^{i\beta} = |v \cdot w|e^{i(\alpha+\beta)}$$

ovvero (in forma trigonometrica):

$$v \cdot w = |v \cdot w| \, [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)]$$

Nel piano di Gauss, il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli dei suoi fattori, e per argomento la somma degli argomenti dei due fattori.



Nota Bene $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Operazioni con numeri complessi

RECIPROCO

Dato il numero complesso $z = a + ib,\ z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

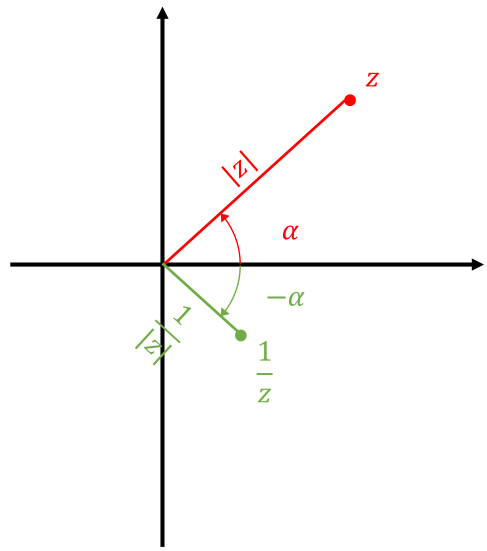
Infatti: $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

In forma esponenziale, se $z = |z|e^{i\alpha}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{-i\alpha}$$

Nel piano di Gauss, il reciproco di un numero complesso è un numero complesso che ha per modulo il reciproco del modulo e per argomento l'opposto dell'argomento del numero complesso.

Nota Bene Il reciproco di 0 non esiste.



Operazioni con numeri complessi

DIVISIONE

Dati i numeri complessi $v = a + ib$ e $w = c + id$, con $w \neq 0$:

$$\frac{v}{w} = v \cdot \frac{\bar{w}}{|w|^2}$$

In forma esponenziale, se $v = |v|e^{i\alpha}$ e $w = |w|e^{i\beta}$:

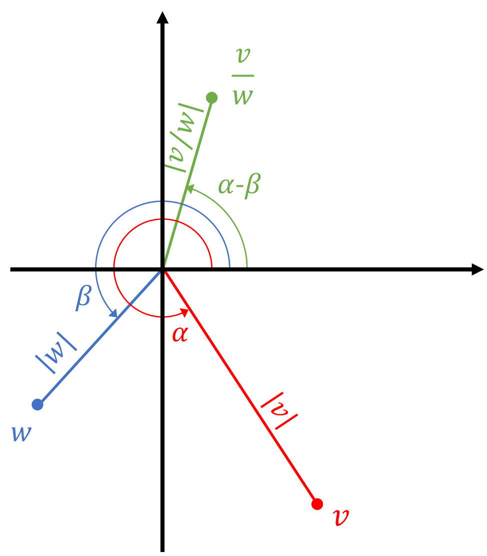
$$\frac{v}{w} = |v|e^{i\alpha} \cdot \frac{1}{|w|}e^{-i\beta} = \left|\frac{v}{w}\right| e^{i(\alpha-\beta)}$$

ovvero (in forma trigonometrica):

$$\frac{v}{w} = \left|\frac{v}{w}\right| [\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)]$$

Nel piano di Gauss, il quoziente di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il quoziente dei moduli di dividendo e divisore, e per argomento la differenza degli argomenti di dividendo e divisore.

Nota Bene Non è definita la divisione per 0.



Operazioni con numeri complessi

POTENZA n-ESIMA

Dato il numero complesso $z = a + ib$:

$$z^2 = (a+ib)^2 = (a^2 - b^2) + i \cdot 2ab$$

$$z^3 = (a+ib)^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3)$$

$$\dots$$

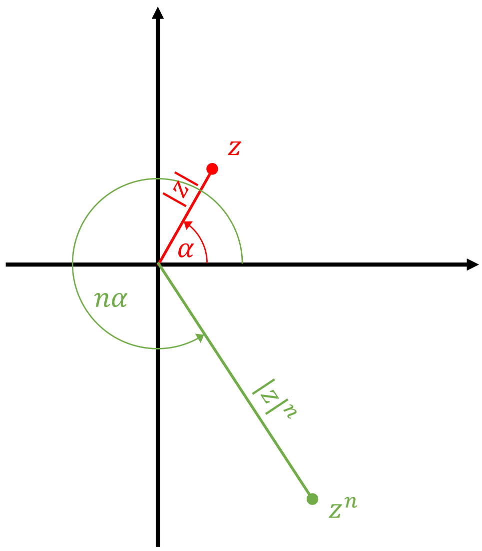
In forma esponenziale, se $z = |z|e^{i\alpha}$:

$$z^n = |z|^n e^{in\alpha}$$

ovvero (in forma trigonometrica):

$$z^n = |z|^n \left[\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)\right]$$

Nel piano di Gauss, la potenza n-esima di un numero complesso è un numero complesso che ha per modulo la potenza n-esima del modulo, e per argomento il prodotto di n per l'argomento del numero complesso.



Radici n-esime dell'unità

Si dice radice *n-esima dell'unità* ($n \in \mathbb{N}$) ogni numero $u \in \mathbb{C}$ tale che

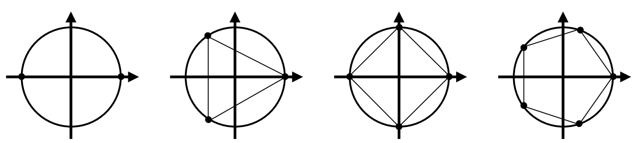
$$u^n = 1$$

Le radici n-esime dell'unità sono *n*, e sono date da:

$$u_k = e^{i\frac{k}{n}2\pi} = \cos\frac{k}{n}\,2\pi + i\sin\frac{k}{n}\,2\pi \qquad\qquad k = 0,1,2,\dots,n-1$$

Dimostrazione Basta osservare che $(u_k)^n = \left(e^{i\frac{k}{n}2\pi}\right)^n = e^{i\,2k\pi} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1.$

Nota Bene Nel piano di Gauss, le radici n-esime dell'unità sono i vertici di un n-gono regolare inscritto nella circonferenza di raggio unitario e avente un vertice in z = 1.



n = 2 n = 3 n = 4 n = 5

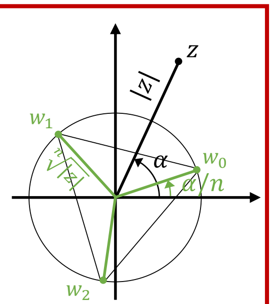
Si dice radice n-esima di $z = |z|e^{i\alpha}$ ogni $w \in \mathbb{C}$ tale che

$$w^n = 1$$

Le radici n-esime dell'unità sono *n*, e sono date da:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right)}$$

$$k = 0,1,2,\dots,n-1$$



Teorema Fondamentale dell'Algebra

Ogni polinomio di grado $n \geq 1$, a coefficienti reali o complessi del tipo:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

ammette esattamente n radici complesse.

Es. 1 $z^2 + z + 1 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

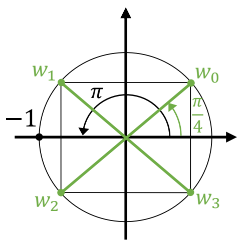
Es. 2 $z^4 + 1 = 0$

$z^4 = -1$

$z^4 = e^{i\pi}$

$z = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k}{4} 2\pi\right)}$

$(k = 0,1,2,3)$



Es. 3 $z^2 + 2iz + i = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-2i \pm \sqrt{4 - 4i}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{4\sqrt{2}\, e^{i\frac{5}{4}\pi}}}{2} =$$

$$= \frac{-2i \pm 2\sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{5}{8}\pi + \frac{k}{2}2\pi\right)}}{2} = -i \pm \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{5}{8}\pi + k\pi\right)} \qquad (k = 0,1)$$

Es. 4 $\bar{z} + iz^2 - z = 0$

$a - ib + ia^2 - ib^2 - 2ab - a - ib = 0$

$-2ab + i(a^2 - b^2 - 2b) = 0$

$$\begin{cases} 2ab = 0 \\ a^2 - b^2 - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = -2 \end{cases}$$

$$z_1 = 0 \quad \vee \quad z_2 = -2i$$