LE ONDE

Il moto armonico

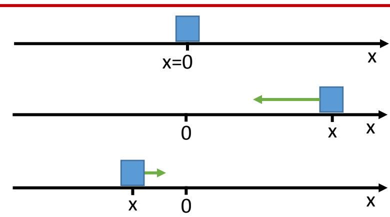
Il moto armonico è un moto che ha accelerazione direttamente proporzionale allo scostamento da una posizione di equilibrio, e verso opposto:

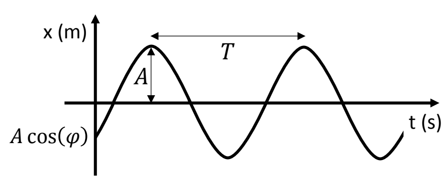
$$a = -\omega^2 x$$

A partire da questa definizione si può dimostrare che la legge oraria del moto armonico è data da:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

- ω si dice *pulsazione* ([ω] = 1/s),
- A si dice *ampiezza* ([A] = m),
- φ si dice *fase iniziale* ([φ] = rad).





Il tempo necessario a compiere un'oscillazione completa si dice *periodo* T ([T] = s).
Il numero di oscillazioni al secondo si dice *frequenza* f ([f] = Hz = 1/s).

Si può dimostrare che valgono le relazioni: $f = \frac{1}{T}$ e $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Il moto armonico

Nota Bene
Come è noto dalla matematica,

$x(t) = \cos(t + \varphi)$ corrisponde ad una traslazione lungo l'asse t: dal valore di φ dipende la posizione iniziale del corpo $x(0) = \cos(\varphi)$.

$x(t) = \cos(\omega t)$ corrisponde ad una dilatazione o contrazione lungo l'asse t: dal valore di ω dipende il periodo della funzione, cioè il tempo che impiega a compiere un'oscillazione completa.
(il periodo del coseno è 2π ma in seguito alla dilatazione viene diviso per ω e diventa $T = {}^{2\pi}/_{\omega}$)

$x(t) = A\cos(t)$ corrisponde ad una dilatazione o contrazione lungo l'asse x: dal valore di A dipende l'ampiezza dell'oscillazione, ovvero la massima distanza del corpo dalla posizione di equilibrio.

Nota Bene
La velocità del corpo è massima quando il corpo si trova nella posizione di equilibrio, ed è nulla quando il corpo si trova nei punti $x = \pm A$. Si può dimostrare che:

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

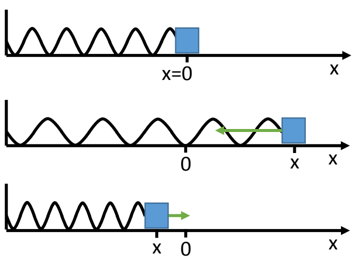
L'oscillatore armonico

L'oscillatore armonico è un sistema costituito da una massa *m* che si muove sotto l'azione della forza elastica

$$\vec{F} = -k\,\vec{x}$$

dove *k* è la costante elastica della molla.
Il moto è un moto armonico perché l'accelerazione è direttamente proporzionale allo scostamento *x*:

$$\vec{F} = -k\,\vec{x} \longrightarrow m\,\vec{a} = -k\,\vec{x} \longrightarrow \boxed{\vec{a} = -\frac{k}{m}\,\vec{x}}$$



Il moto è dunque armonico con pulsazione pari a $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

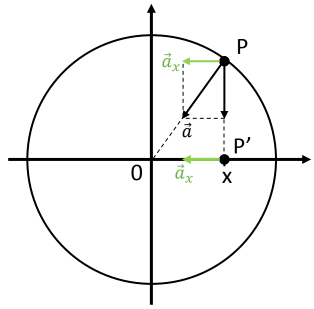
Nota Bene
L'energia del corpo alla posizione *x* è data da: $E(x) = E_c + E_{P\,(el)} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

In assenza di forze non conservative (come l'attrito), l'energia meccanica del corpo è costante. In particolare nel punto di massima distanza è uguale a:

$$E(x) = E(A) = E_c + E_{P\,(el)} = 0 + \frac{1}{2}kA^2 \longrightarrow \boxed{E \equiv \frac{1}{2}kA^2}$$

Proiezione del moto circolare uniforme

Sia P un punto che si muove di moto circolare uniforme, con accelerazione centripeta a e raggio r.
Consideriamo P’, la sua proiezione sull’asse *x*: il suo moto è armonico perché la sua accelerazione a_x è direttamente proporzionale allo scostamento *x* e ha verso opposto. Infatti, considerando i triangoli simili OPP’ e quello formato da $\vec{a}$ e dalle sue componenti, si ha che:



$$a : r = a_x : x \longrightarrow \boxed{\vec{a}_x = -\frac{a}{r}\vec{x}}$$

(il segno meno è dato dal fatto che $\vec{a}_x$ ha verso opposto a $\vec{x}$)

Il moto è dunque armonico con pulsazione pari a $\omega = \sqrt{\frac{a}{r}}$ e periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{a}}$

Nota Bene
La pulsazione ω del moto di P’ coincide con la velocità angolare di P (non è infatti un caso che le due grandezze si indichino con lo stesso simbolo: ora, per distinguerle, indicheremo la velocità angolare con ω_{ang}). Infatti:

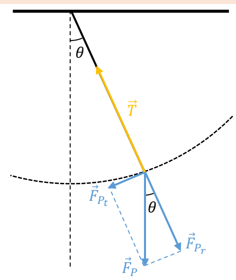
$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega_{ang}\, r)^2}{r} = \omega_{ang}^2\, r \longrightarrow \omega_{ang} = \sqrt{\frac{a}{r}}$$

Il pendolo

Consideriamo un pendolo di massa *m* e lunghezza del filo *L*.
Le forze che agiscono sul pendolo sono:

- $\vec{F}_{P_t}$ (componente di $\vec{F}_P$ tangente alla circonferenza)
- $\vec{F}_{P_r}$ (componente di $\vec{F}_P$ radiale)
- $\vec{T}$ (tensione del filo, radiale)

Risultante: $\vec{F}_C = \vec{T} - \vec{F}_{P_r}$



Le forze radiali implicano la presenza di un’accelerazione centripeta, le forze tangenziali la presenza di un’accelerazione tangenziale.

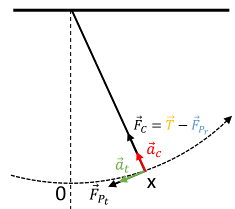
Dalla trigonometria, si ha che $F_{P_t} = F_P \sin\theta = mg\sin\theta$.

Per il 2° principio della dinamica, $a_t = \frac{F_{P_t}}{m} = g\sin\theta \approx g\theta$.

(quando θ < 10° la differenza tra sin θ e θ è trascurabile)

Se θ è espresso in rad, si ha che la lunghezza dell’arco è pari a $x = \theta L$.

Dunque: $\boxed{\vec{a}_t \approx -\frac{g}{L}\vec{x}}$ *(il segno meno è dato dal fatto che $\vec{a}_t$ ha verso opposto a $\vec{x}$)*



Per piccole oscillazioni il moto è armonico con pulsazione pari a $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ e periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

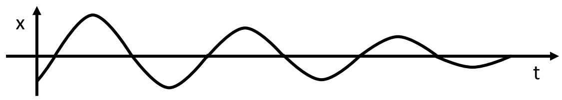
Nota Bene (isocronia) : Il periodo del pendolo non dipende dall’ampiezza A delle oscillazioni.

Smorzamento e risonanza

Smorzamento e risonanza avvengono quando l'oscillatore perde o acquista energia, con conseguente aumento o diminuzione di ampiezza (infatti l'energia dell'oscillatore è proporzionale al quadrato della sua ampiezza).

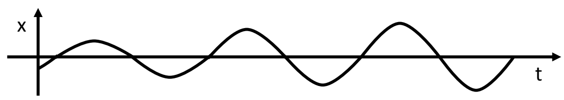
$$\boxed{E \propto A^2}$$

SMORZAMENTO



Una forza d'attrito dissipa l'energia dell'oscillatore, e l'ampiezza A delle oscillazioni si riduce.

RISONANZA



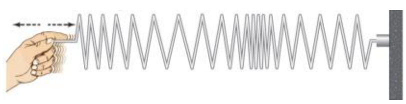
Una forza eccitatrice esterna periodica integra l'energia persa con l'attrito o addirittura aumenta quella iniziale, aumentando l'ampiezza A delle oscillazioni. Si può dimostrare che il massimo trasferimento di energia si verifica quando la frequenza della forza esterna è pari alla *frequenza propria* dell'oscillatore armonico, ovvero quando

$$f_{est} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Le onde

Un'onda è una perturbazione che si propaga nello spazio, può trasportare energia ma non avviene mai trasporto di materia.

ONDE LONGITUDINALI



Le particelle del mezzo oscillano nella stessa direzione di propagazione dell'onda, con l'effetto di creare una serie di espansioni e compressioni.

ONDE TRASVERSALI

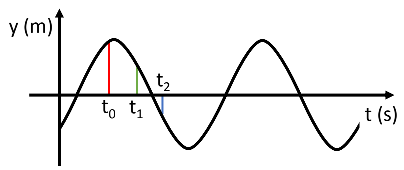
Le particelle del mezzo oscillano in una direzione perpendicolare a quella di propagazione dell'onda, con l'effetto di creare una serie di massimi e minimi.

Un'onda si dice *meccanica* quando ha bisogno di un mezzo per propagarsi: in tal caso ogni particella del mezzo compie un moto armonico, spostandosi dalla propria posizione di equilibrio.
Sono onde meccaniche: le corde tese in oscillazione, le onde in acqua, i suoni…

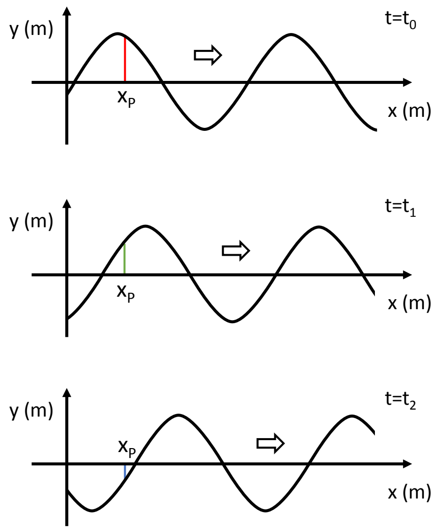
Le onde progressive

Nota Bene

Oltre alla rappresentazione temporale vista in precedenza (che rappresenta lo scostamento *y* di una singola particella del mezzo in cui si propaga l'onda, in funzione del tempo *t*), è utile raffigurare un'onda come se fosse «fotografata» in un certo istante di tempo (rappresenta lo scostamento *y* di ciascuna particella in funzione della sua posizione *x*).



Rappresentazione temporale



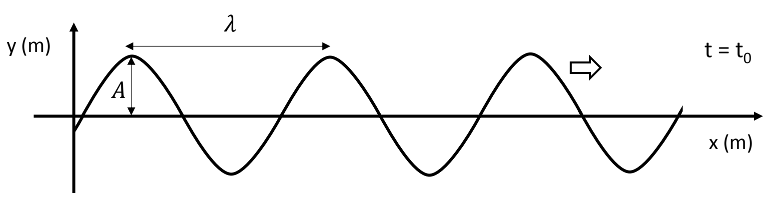
Rappresentazione spaziale

Le onde progressive

La rappresentazione spaziale di un'onda è descritta dall'equazione:

$$y(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right)$$

Dove
- λ si dice *lunghezza d'onda* ([λ] = m),
- A si dice *ampiezza* ([A] = m),
- T si dice *periodo* ([T] = s)
- l'argomento del coseno si dice *fase dell'onda* (adimensionale).



Nota Bene

All'aumentare di t aumenta il termine $\frac{2\pi}{T}t$ che, com'è noto dalla matematica, rappresenta una traslazione verso destra (l'onda si sta propagando verso destra).

Le onde progressive

Nota Bene

La curva è periodica rispetto allo spazio, con periodo pari a λ . Infatti, per ogni x e fissato t:

$$y(x+\lambda,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x+\lambda) - \frac{2\pi}{T}t\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t + 2\pi\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = y(x,t)$$

Nota Bene

La curva è periodica rispetto al tempo, con periodo pari a T. Infatti, per ogni t e fissato x:

$$y(x,t+T) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}(t+T)\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t - 2\pi\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = y(x,t)$$

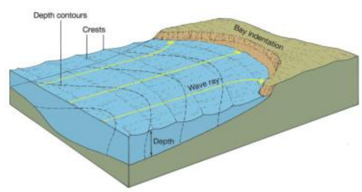
Nota Bene

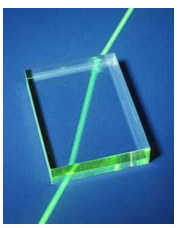
Si può definire la *velocità* dell'onda come il rapporto tra la distanza percorsa dal fronte d'onda (punti che hanno uguale fase, e quindi uguale y) e il tempo impiegato a percorrerla. Poiché la velocità dev'essere costante, possiamo calcolare il rapporto prendendo in considerazione un avanzamento di lunghezza λ, che avviene in un intervallo di tempo T:

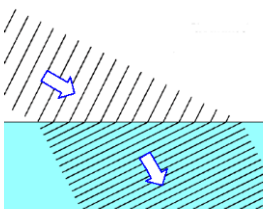
$$\boxed{v = \frac{\lambda}{T}} \qquad [v] = \frac{m}{s}$$

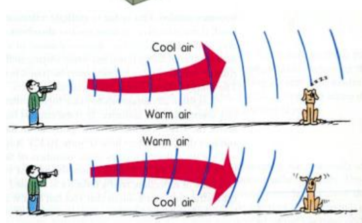
Rifrazione

La rifrazione avviene quando un'onda passa da un mezzo ad un altro con densità o caratteristiche diverse, per cui la direzione di propagazione, la velocità e la lunghezza d'onda dell'onda subiscono delle variazioni (la frequenza rimane costante).





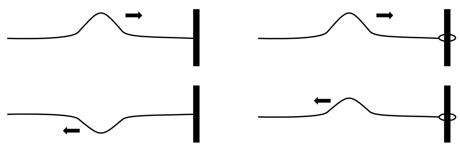




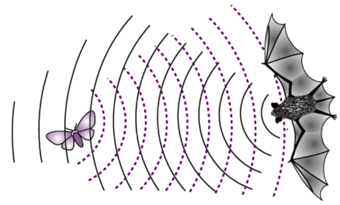
- L'onda su una corda viaggia più velocemente sui tratti di corda con densità lineare minore.
- L'onda marina viaggia più velocemente nei tratti a profondità minore.
- La luce viaggia più velocemente nel vuoto e in mezzi a densità o indice di rifrazione minore.
- L'onda sonora viaggia più velocemente in mezzi a densità maggiore o in aria calda.

Riflessione

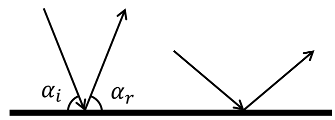
La riflessione avviene quando l'onda incontra un ostacolo che non può attraversare e inverte il senso del moto.



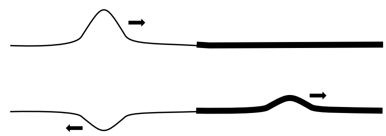
ESTREMO FISSO   ESTREMO LIBERO



Nota Bene
In caso di onde bidimensionali, l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza.

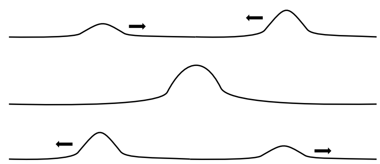


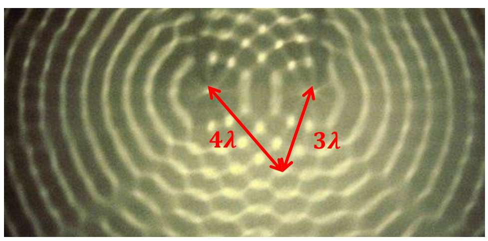
Nota Bene
Può succedere che un'onda venga sia rifratta che riflessa (ad esempio, l'onda che si propaga su una corda che cambia improvvisamente densità lineare): in tal caso, l'energia iniziale dell'onda viene ripartita tra l'energia dell'onda trasmessa e di quella riflessa.



Interferenza

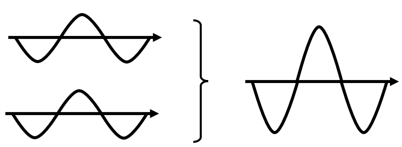
L'interferenza avviene quando due onde attraversano la stessa regione nello stesso istante. Allora la perturbazione totale di quella regione è la somma delle perturbazioni che ciascuna di esse produrrebbe da sola.





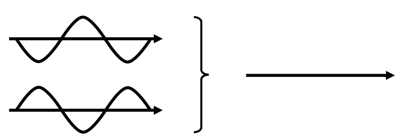
Nota Bene
Se due sorgenti producono onde a ugual frequenza e lunghezza d'onda, si ha interferenza costruttiva nei punti tali che la differenza delle distanze dalle due sorgenti è un numero intero di lunghezze d'onda.

INTERFERENZA COSTRUTTIVA



Onde in fase

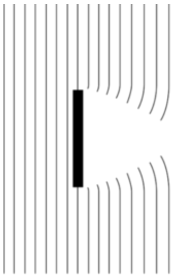
INTERFERENZA DISTRUTTIVA

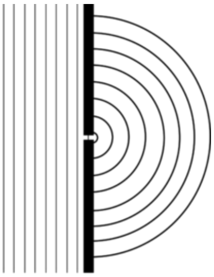


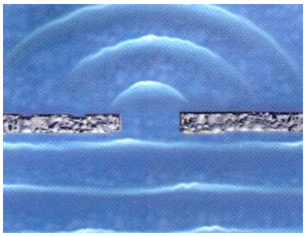
Onde fuori fase (differenza di fase di 180°)

Diffrazione

La diffrazione avviene quando un'onda incontra un ostacolo o una fenditura di dimensioni comparabili con quelle della lunghezza d'onda. In tal caso, l'onda aggira l'ostacolo e si propaga anche in quelle regioni che dovrebbero essere «in ombra».





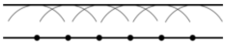


Principio di Huygens

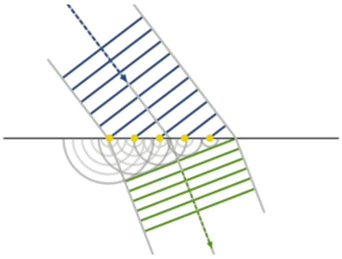
Ogni elemento di un fronte d'onda può essere considerato come una sorgente secondaria di onde sferiche in fase con l'onda primaria.
La perturbazione prodotta in un punto dello spazio si può ottenere come sovrapposizione di tutte le onde sferiche secondarie che raggiungono quel punto.

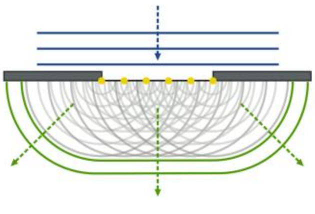
ONDA SFERICA

ONDA PIANA



Il principio può aiutare a comprendere i fenomeni della rifrazione e della diffrazione.





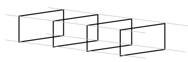
Intensità di un'onda

Si dice intensità di un'onda l'energia trasportata in un unità di tempo attraverso una sezione unitaria del mezzo in cui avviene la propagazione.

$$I = \frac{E}{S\,\Delta t} = \frac{P}{S} \qquad\qquad [I] = \frac{W}{m^2}$$

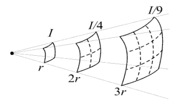
dove E è l'energia trasportata dall'onda (proporzionale a A^2), S e Δt la superficie e l'intervallo di tempo considerati, e $P = \frac{E}{\Delta t}$ è la potenza della sorgente dell'onda.

L'intensità di un'onda che si propaga in una sola direzione rimane costante (a meno di attriti).



L'intensità di un'onda sferica diminuisce col quadrato del raggio della sfera:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2}$$



Nota Bene

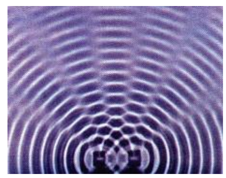
In caso di interferenza tra due onde di ampiezza A in un punto:

- se l'interferenza è costruttiva, l'intensità (e l'energia) quadruplica.

$$I \propto E \propto A^2 \qquad\qquad I' \propto E' \propto (A')^2 = (A+A)^2 = 4A^2$$

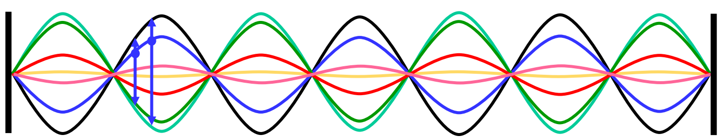
- se l'interferenza è distruttiva, l'intensità (e l'energia) si annulla.

$$I \propto E \propto A^2 \qquad\qquad I' \propto E' \propto (A')^2 = (A-A)^2 = 0$$



Onde stazionarie

Un'onda si dice stazionaria se tutti i punti del mezzo oscillano con la *stessa fase* ma con *ampiezze differenti*.



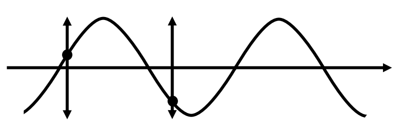
I punti che vibrano con ampiezza massima si dicono ventri.
I punti che vibrano con ampiezza zero (e quindi rimangono fermi) si dicono nodi.

Nota Bene

Le onde stazionarie non trasportano energia.

Nota Bene

Invece nelle onde progressive i punti oscillano con *fasi diverse* (punti diversi hanno scostamenti diversi), ma con la *stessa ampiezza* (tutti i punti oscillano con la stessa ampiezza A).



Onde stazionarie

Detta L la distanza tra i capi della corda, la lunghezza d'onda delle onde stazionarie deve essere un sottomultiplo di $2L$:

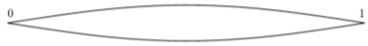
$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Sia v la velocità di propagazione della perturbazione sulla corda (un'onda stazionaria può essere vista come un'onda progressiva che percorre la corda riflettendosi tra i due estremi fissi a cui è vincolata: l'interferenza tra l'onda che diretta e quella che viene riflessa crea i nodi e i ventri).
Rimangono così determinate le frequenze:

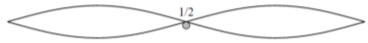
$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L}$$

Ognuna di queste onde stazionarie viene detta *modo normale*, o *armonica* della corda.

Prima armonica $n = 1$ $\lambda_1 = 2L$



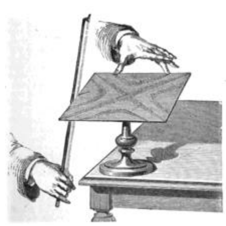
Seconda armonica $n = 2$ $\lambda_2 = L$



Terza armonica $n = 3$ $\lambda_3 = \frac{2L}{3}$

Quarta armonica $n = 4$ $\lambda_4 = \frac{L}{2}$

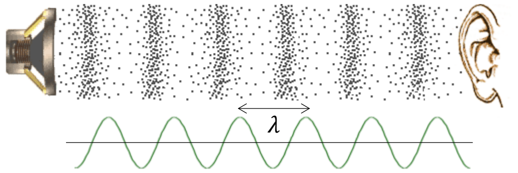
Alcuni fenomeni



Onde sonore

Le onde sonore sono onde longitudinali generate da una sorgente che vibra. Quando il suono si propaga in aria, le molecole d'aria oscillano attorno ad una posizione di equilibrio, creando addensamenti e rarefazioni.

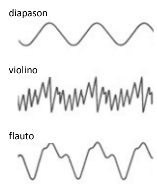
FREQUENZA
Un'alta frequenza provoca un suono acuto, una bassa frequenza un suono grave. L'orecchio umano è in grado di distinguere suoni con frequenze comprese tra 20 Hz e 20 kHz.



spostamenti dalla posizione di equilibrio

VELOCITÀ
La velocità di un'onda sonora dipende unicamente dal mezzo in cui si propaga. Nel caso di propagazione in un gas, la densità e la pressione del gas (a loro volta influenzate dalla temperatura) determinano la velocità del suono. A 20 °C il suono viaggia a 340 m/s in aria.

TIMBRO
I suoni sono generalmente dati dalla sovrapposizione di più onde sonore armoniche (suoni puri) con uguale frequenza f: la loro combinazione determina il timbro del suono. Esistono particolari tecniche che permettono di scomporre un segnale periodico di frequenza f nei suoni puri (aventi frequenza $f, 2f, 3f$ ...) che lo compongono (analisi armonica).



Onde sonore

INTENSITÀ
L'intensità di un suono è determinata dall'ampiezza A, dalla frequenza f, dalla velocità v dell'onda, e dalla densità ρ del mezzo in cui si propaga:

$$I = 2\pi^2 f^2 \rho v A^2$$

In particolare, l'intensità di un'onda è sempre proporzionale al quadrato della sua ampiezza.

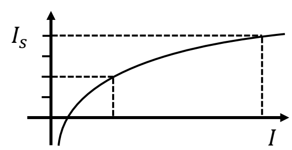
Il livello di intensità sonora misura la sensazione di «volume» di un suono:

$$I_s = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

dove $I_0 = 10^{-12}$ W/m² è la minima intensità percepibile dall'orecchio umano.

Nota Bene
Benchè I_s sia un numero puro, viene comunemente espresso in decibel (dB).

Nota Bene
Perché un suono venga percepito a volume doppio, non basta che l'intensità del suono raddoppi. Ad esempio, un suono ad intensità $10\,I_0$ viene percepito a volume doppio se aumenta di intensità fino a $100\,I_0$.



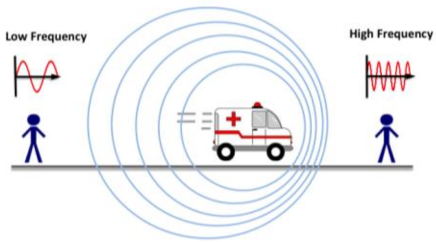
Effetto Doppler

La frequenza f_{OSS} percepita da un osservatore in moto relativo rispetto ad una sorgente che emette un suono a frequenza f_{SOR} è data da:

$$f_{OSS} = \frac{v + v_{OSS}}{v - v_{SOR}} f_{SOR}$$

Dove:

- v_{OSS} è la velocità dell'osservatore rispetto al mezzo
  (positiva se l'osservatore si avvicina alla sorgente, negativa se si allontana);
- v_{SOR} è la velocità della sorgente rispetto al mezzo
  (positiva se la sorgente si avvicina alla sorgente, negativa se si allontana);
- v è la velocità del suono nel mezzo.



La luce

Secondo la teoria corpuscolare (Newton, 1600-1700) la luce è composta da piccole particelle di materia emesse in tutte le direzioni.
Secondo la teoria ondulatoria (Huygens, 1678), la luce è un'onda trasversale che si propaga in un mezzo, chiamato etere, che pervade tutto l'universo (nel 1887 venne dimostrato che l'etere non esiste!).

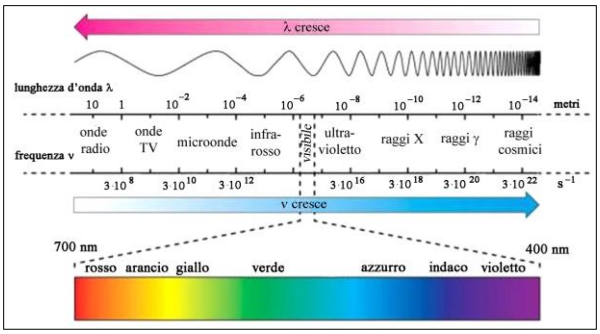
FREQUENZA
La frequenza determina il colore della luce.

VELOCITÀ
La velocità della luce è data da:

$$v = \frac{c}{n}$$

$c = 300\,000\,000\ m/s$
(velocità della luce nel vuoto)

n = indice di rifrazione (maggiore o uguale a 1, vale 1 nel vuoto) che dipende dal mezzo e dalla frequenza dell'onda.



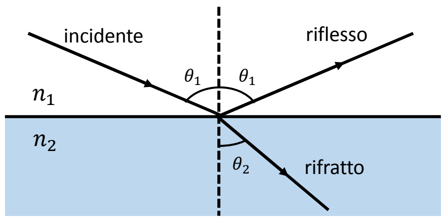
Nota Bene
Spesso si dice che λ determina il colore della luce, perché a parità di velocità λ dipende dalla frequenza: $\lambda = v/f$.

Legge di Snell

Consideriamo un fronte d'onda che incide sulla superficie di separazione tra due mezzi trasparenti, con indici di rifrazione rispettivamente n_1 e n_2. Sia θ_1 l'angolo formato dal raggio incidente con la normale alla superficie. Allora:

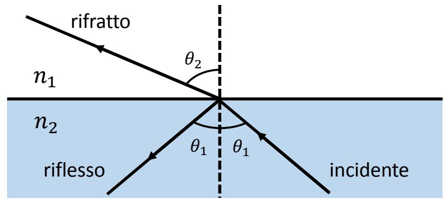
1. Il raggio *riflesso* forma un angolo θ_1 con la normale alla superficie.
2. (Snell) Il raggio *rifratto* forma un angolo θ_2 con la normale alla superficie, tale che:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$



Nota Bene

Entrando in un mezzo più denso (maggior indice di rifrazione), la luce devia verso la normale. Entrando in un mezzo meno denso, se ne allontana (lo stesso percorso è valido nella direzione opposta).



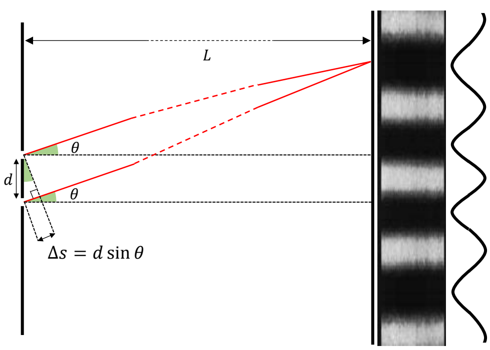
Sia θ_c l'angolo di incidenza (angolo critico) per cui $\theta_2 = 90°$. Per angoli di incidenza maggiori o uguali a θ_c, non si ha rifrazione ma solo riflessione (riflessione totale).

$$\theta_c = \arcsin {}^{n_2}/_{n_1}$$

Interferenza (esperimento di Young)

- Due fenditure puntiformi a distanza d (ciascuna è sorgente di un'onda).
- Sorgenti coerenti, ovvero: la luce da esse prodotta è monocromatica (le frequenze - e quindi le lunghezze d'onda - sono uguali) e le onde alla sorgente sono in fase;
- Fenditure molto strette (diametro minore di λ) e abbastanza vicine tra loro;
- $L \gg d$ (in modo da considerare i due raggi paralleli tra loro, e chiamare θ l'angolo che entrambi formano con la normale allo schermo).

Allora nei punti in cui si ha interferenza costruttiva si formano frange luminose aventi (idealmente) la stessa intensità, e distanza via via maggiore dalla frangia centrale.



In particolare si ha:

- *Interferenza costruttiva* nei punti in cui la differenza delle sorgenti è un multiplo intero di λ:

$$\Delta s = m\lambda \implies \sin\theta = m\lambda/d$$

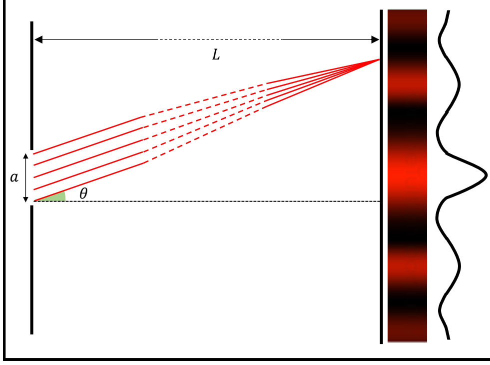
- *Interferenza distruttiva* nei punti in cui la differenza delle sorgenti è un multiplo intero di λ più $\lambda/2$:

$$\Delta s = m\lambda + \frac{\lambda}{2} \implies \sin\theta = \frac{(m + {}^{1}/_{2})\lambda}{d}$$

Diffrazione

- Una fenditura di spessore a (ogni punto della fenditura è sorgente di un'onda).
- Sorgenti coerenti, ovvero: la luce da esse prodotta è monocromatica (le frequenze - e quindi le lunghezze d'onda - sono uguali) e le onde alla sorgente sono in fase;
- Lo spessore della fenditura a ha lo stesso ordine di grandezza di λ.
- $L \gg d$ (in modo da considerare i due raggi paralleli tra loro, e chiamare θ l'angolo che entrambi formano con la normale allo schermo).

Allora si ottiene una figura di diffrazione con una frangia centrale di intensità maggiore, e frange laterali sempre meno luminose.



L'intensità della frangia centrale è pari all'intensità della sorgente.

Si ha *interferenza distruttiva* nei punti per cui:

$$\sin\theta = m\lambda/d \qquad m \neq 0$$

La larghezza angolare della fascia centrale è data dalla distanza dei minimi che la delimitano:

$$\alpha = \theta_{(m=+1)} - \theta_{(m=-1)} \approx 2\frac{\lambda}{d}$$

Alcuni fenomeni