Esercizi svolti di Probabilità

Legenda:
- ♥ Risoluzione mediante definizione
- ♡ Risoluzione mediante definizione e calcolo combinatorio
- ♦ Risoluzione mediante unione o intersezione di eventi
- ♢ Risoluzione mediante unione o intersezione di eventi e calcolo combinatorio
- ♣ Risoluzione mediante evento contrario
- ♠ Risoluzione mediante altre tecniche

Esercizio 1. Si lancia un dado. Calcola:

1. La probabilità che esca un 6 o un numero dispari.

♥ $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{\text{esce 6 o numero dispari}\} = \{1; 3; 5; 6\}$

$p(E) = \dfrac{\#E}{\#S} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

♦ $E = \{\text{esce 6 O esce un numero dispari}\} = A \cup B$ (INCOMPATIBILI)

$A = \{\text{esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{1}{6}$

$B = \{\text{esce un numero dispari}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3}$

2. La probabilità che esca un multiplo di 2 o un multiplo di 3.

♥ $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{\text{esce un multiplo di 2 o un multiplo di 3}\} = \{2; 3; 4; 6\}$

$p(E) = \dfrac{\#E}{\#S} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

♦ $E = \{\text{esce un multiplo di 2 O esce un multiplo di 3}\} = A \cup B$ (COMPATIBILI)

$A = \{\text{esce un multiplo di 2}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$B = \{\text{esce un multiplo di 3}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

$A \cap B = \{\text{esce un multiplo di 2 E un multiplo di 3}\} = \{\text{esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$

3. La probabilità che esca un 6, sapendo che è uscito un numero pari.

♥ $S' = \{2; 4; 6\}$

$E = \{\text{esce 6}\} = \{6\}$

$p(E) = \dfrac{\#E}{\#S'} = \dfrac{1}{3}$

♠ $E = \{\text{esce 6 SAPENDO CHE è uscito un numero pari}\} = A|B$

$A = \{\text{esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{1}{6}$

$B = \{\text{esce un numero pari}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$A \cap B = \{\text{esce 6 E un numero pari}\} = \{\text{esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$

$p(E) = p(A|B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{1}{6} \cdot 2 = \dfrac{1}{3}$

Esercizio 2. Si lancia due volte un dado. Calcola:

1. La probabilità che escano due 6.

♥ $S = \{(1,1);(1,2);\ldots;(2,1);(2,2);\ldots;(5,6);(6,6)\}$
$E = \{\text{escono due } 6\} = \{(6,6)\}$
$p(E) = \dfrac{\#E}{\#S} = \dfrac{1}{36}$

♦ $E = \{\text{la prima volta esce 6 E la seconda volta esce 6}\} = A \cap B$ (INDIPENDENTI)
$A = \{\text{la prima volta esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{1}{6}$
$B = \{\text{la seconda volta esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \dfrac{1}{6}$
$p(E) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$

2. La probabilità che la prima volta esca 6 e la seconda volta non esca 6.

♥ $S = \{(1,1);(1,2);\ldots;(2,1);(2,2);\ldots;(5,6);(6,6)\}$
$E = \{\text{la prima volta esce 6 e la seconda volta non esce 6}\} = \{(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5)\}$
$p(E) = \dfrac{\#E}{\#S} = \dfrac{5}{36}$

♦ $E = \{\text{la prima volta esce 6 E la seconda volta non esce 6}\} = A \cap B$ (INDIPENDENTI)
$A = \{\text{la prima volta esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{1}{6}$
$B = \{\text{la seconda volta non esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \dfrac{5}{6}$
$p(E) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}$

3. La probabilità che esca esattamente un 6.

♥ $S = \{(1,1);(1,2);\ldots;(2,1);(2,2);\ldots;(5,6);(6,6)\}$
$E = \{\text{esce esattamente un } 6\} = \{(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6)\}$
$p(E) = \dfrac{\#E}{\#S} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$

♦ $E = \{$(la prima volta esce 6 E la seconda volta non esce 6) O
(la prima volta non esce 6 E la seconda volta esce 6)$\} = A \cup B$ (INCOMPATIBILI)
$A = \{\text{la prima volta esce 6 E la seconda volta non esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}$
$B = \{\text{la prima volta non esce 6 E la seconda volta esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{36}$
$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \dfrac{5}{6} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$

4. La probabilità che escano un 5 e un 6.

♥ $S = \{(1,1);(1,2);\ldots;(2,1);(2,2);\ldots;(5,6);(6,6)\}$
$E = \{\text{escono un 5 e un } 6\} = \{(5,6);(6,5)\}$
$p(E) = \dfrac{\#E}{\#S} = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

♦ $E = \{$(la prima volta esce 6 E la seconda volta esce 5) O
(la prima volta esce 5 E la seconda volta esce 6)$\} = A \cup B$ (INCOMPATIBILI)
$A = \{\text{la prima volta esce 6 E la seconda volta esce 5}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$

$B = \{\text{la prima volta esce 5 E la seconda volta esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$

5. La probabilità che la prima volta esca 6 o che la seconda volta esca un numero dispari.

   ♦ $E = \{\text{la prima volta esce 6 O la seconda volta esce un numero dispari}\} = A \cup B$ (COMPATIBILI)

   $A = \{\text{la prima volta esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{1}{6}$

   $B = \{\text{la seconda volta esce un numero dispari}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

   $A \cap B = \{\text{la prima volta esce 6 E la seconda volta esce un numero dispari}\} \quad \Rightarrow \quad p(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$

   $p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

6. La probabilità che non esca nessun 6.

   ♦ $E = \{\text{la prima volta non esce 6 E la seconda volta non esce 6}\} = A \cap B$ (INDIPENDENTI)

   $A = \{\text{la prima volta non esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{5}{6}$

   $B = \{\text{la seconda volta non esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{5}{6}$

   $p(E) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

7. La probabilità che esca almeno un 6.

   ♥ $S = \{(1,1); (1,2); \ldots; (2,1); (2,2); \ldots; (5,6); (6,6)\}$

   $E = \{\text{esce almeno un 6}\} = \{(1,6); (2,6); (3,6); (4,6); (5,6); (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6)\}$

   $p(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{11}{36}$

   ♦ $E = \{\text{la prima volta esce 6 O la seconda volta esce 6}\} = A \cup B$ (COMPATIBILI)

   $A = \{\text{la prima volta esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{1}{6}$

   $B = \{\text{la seconda volta esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{1}{6}$

   $A \cap B = \{\text{la prima volta esce 6 E la seconda volta esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

   $p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

   ♣ $E = \{\text{CONTRARIO DI non esce nessun 6}\} = \overline{A}$

   $A = \{\text{non esce nessun 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{25}{6}$

   $p(E) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

8. La probabilità che escano due numeri pari, tra cui almeno un 6.

   ♥ $S = \{(1,1); (1,2); \ldots; (2,1); (2,2); \ldots; (5,6); (6,6)\}$

   $E = \{\text{escono due numeri pari, tra cui un 6}\} = \{(2,6); (3,6); (6,6); (6,2); (6,4)\}$

   $p(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{5}{36}$

   ♦ $E = \{$(la prima volta esce 6 E la seconda volta esce un numero pari) O
   (la prima volta esce un numero pari E la seconda volta esce 6)$\} = A \cup B$ (COMPATIBILI)

$A = \{\text{la prima volta esce 6 E la seconda volta esce un numero pari}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$

$B = \{\text{la prima volta esce un numero pari E la seconda volta esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

$A \cap B = \{\text{la prima volta esce 6 E la seconda volta esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$

9. La probabilità che esca almeno un 6, sapendo che sono usciti due numeri pari.

♥ $S' = \{(2,2); (2,4); (2,6); (4,2); (4,4); (4,6); (6,2); (6,4); (6,6)\}$

$E = \{\text{esce 6}\} = \{(2,6); (4,6); (6,2); (6,4); (6,6)\}$

$p(E) = \frac{\#E}{\#S'} = \frac{5}{9}$

♦ $E = \{$(la prima volta esce 6 SAPENDO CHE sono usciti due numeri pari) O
(la seconda volta esce 6 SAPENDO CHE sono usciti due numeri pari)$\} = A \cup B$ (COMPATIBILI)

$A = \{\text{la prima volta esce 6 SAPENDO CHE sono usciti due numeri pari}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{1}{3}$

$B = \{\text{la seconda volta esce 6 SAPENDO CHE sono usciti due numeri pari}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{1}{3}$

$A \cap B = \{\text{escono due 6 SAPENDO CHE sono usciti due numeri pari}\} \quad \Rightarrow \quad p(A \cap B) = \frac{1}{9}$

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

♠ $E = \{\text{esce almeno un 6 SAPENDO CHE sono usciti due numeri pari)}\} = A|B$

$B = \{\text{escono due numeri pari}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

$A \cap B = \{\text{esce almeno un 6 E escono due numeri pari}\} \quad \Rightarrow \quad p(A \cap B) = \frac{5}{36}$

$p(E) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{5}{36} \cdot 4 = \frac{5}{9}$

10. La probabilità che escano due numeri uguali.

♥ $S = \{(1,1); (1,2); \ldots; (2,1); (2,2); \ldots; (5,6); (6,6)\}$

$E = \{\text{escono due numeri uguali}\} = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6)\}$

$p(E) = \frac{\#E}{\#S'} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

♠ $E = \{\text{il secondo numero è uguale al primo}\}$

$p(E) = \frac{1}{6}$

11. La probabilità che escano due numeri diversi.

♣ $E = \{\text{CONTRARIO DI escono due numeri uguali}\} = \overline{A}$

$A = \{\text{escono due numeri diversi}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{1}{6}$

$p(E) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

♠ $E = \{\text{il secondo numero è diverso dal primo}\}$

$p(E) = \frac{5}{6}$

Esercizio 3. Si lancia tre volte un dado. Calcola:

1. La probabilità che escano tre 6.

♡ I risultati possono ripetersi. Tengo in considerazione l'ordine.

$S = \{\text{terne contenenti i numeri da 1 a 6}\} \quad \Rightarrow \quad \#S = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

$E = \{\text{terne contenenti tre 6}\} \quad \Rightarrow \quad \#E = 1$

$p(E) = \dfrac{\#E}{\#S} = \dfrac{1}{216}$

◆ $E = \{\text{la prima volta esce 6 E la seconda volta esce 6 E la terza volta esce 6}\} = A \cap B \cap C$ (INDIPENDENTI)

$A = \{\text{la prima volta esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{1}{6}$

$B = \{\text{la seconda volta esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \dfrac{1}{6}$

$C = \{\text{la terza volta esce 6}\} \quad \Rightarrow \quad p(C) = \dfrac{1}{6}$

$p(E) = p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{216}$

2. La probabilità che esca esattamente un 6.

♡ I risultati possono ripetersi. Tengo in considerazione l'ordine.

$S = \{\text{terne contenenti i numeri da 1 a 6}\} \quad \Rightarrow \quad \#S = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

$E = \{\text{terne contenenti: (A) un 6 e (B) due numeri diversi da 6}\} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \#E = 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot [\text{numero di possibili permutazioni di ABB}] = 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dfrac{3!}{2!} = 75$

$p(E) = \dfrac{\#E}{\#S} = \dfrac{75}{216} = \dfrac{25}{36}$

◆ $E = \{$(la prima volta esce 6 E la seconda volta non esce 6 E la terza volta non esce 6) O
(la prima volta non esce 6 E la seconda volta esce 6 E la terza volta non esce 6) O
(la prima volta non esce 6 E la seconda volta non esce 6 E la terza volta esce 6)$\}$ =
$= A \cup B \cup C$ (INCOMPATIBILI)

$A = \{\text{la prima volta esce 6 E la seconda volta non esce 6 E ...}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{25}{216}$

$B = \{\text{la prima volta non esce 6 E la seconda volta esce 6 E ...}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{25}{216}$

$C = \{\text{la prima volta non esce 6 E la seconda volta non esce 6 E ...}\} \quad \Rightarrow \quad p(C) = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{25}{216}$

$p(E) = p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) = \dfrac{25}{216} + \dfrac{25}{216} + \dfrac{25}{216} = \dfrac{25}{36}$

♢ $A = \{\text{esce 6}\} \quad B = \{\text{non esce 6}\}$ (INDIPENDENTI)

E è l'unione di tutte le possibili permutazioni di ABB, che sono equiprobabili e incompatibili. Perciò:

$p(E) = p(A \cap B \cap B) \cdot [\text{numero di possibili permutazioni di ABB}] = \dfrac{1}{6} \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 \cdot \dfrac{3!}{2!} = \dfrac{25}{36}$

3. La probabilità che escano un 6 e due 5.

♡ I risultati possono ripetersi. Tengo in considerazione l'ordine.

$S = \{\text{terne contenenti i numeri da 1 a 6}\} \quad \Rightarrow \quad \#S = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

$E = \{\text{terne contenenti: (A) un 6 e (B) due 5}\} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \#E = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot [\text{numero di possibili permutazioni di ABB}] = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{3!}{2!} = 3$

$p(E) = \dfrac{\#E}{\#S} = \dfrac{3}{216} = \dfrac{1}{72}$

♦ $E = \{$(la prima volta esce 6 E la seconda volta esce 5 E la terza volta esce 5) O
(la prima volta esce 5 E la seconda volta esce 6 E la terza volta esce 5) O
(la prima volta esce 5 E la seconda volta esce 5 E la terza volta esce 6)$\} =$
$= A \cup B \cup C$ (INCOMPATIBILI)

$A = \{$la prima volta esce 6 E la seconda volta esce 5 E ...$\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

$B = \{$la prima volta esce 5 E la seconda volta esce 6 E ...$\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

$C = \{$la prima volta esce 5 E la seconda volta esce 5 E ...$\} \quad \Rightarrow \quad p(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

$p(E) = p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) = \frac{1}{216} + \frac{1}{216} + \frac{1}{216} = \frac{1}{72}$

♢ $A = \{$esce 6$\}$ $\quad B = \{$esce 5$\}$ $\quad$ (INDIPENDENTI)

E è l'unione di tutte le possibili permutazioni di ABB, che sono equiprobabili e incompatibili. Perciò:

$p(E) = p(A \cap B \cap B) \cdot$ [numero di possibili permutazioni di ABB] $= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{3!}{2!} = \frac{1}{72}$

4. La probabilità che escano un 4, un 5 e un 6.

♡ I risultati possono ripetersi. Tengo in considerazione l'ordine.

$S = \{$terne contenenti i numeri da 1 a 6$\} \quad \Rightarrow \quad \#S = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

$E = \{$terne contenenti: (A) un 4, (B) un 5 e (C) un 6$\} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \#E = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot$ [numero di possibili permutazioni di ABC] $= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3! = 6$

$p(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

♦ $E = \{$(la prima volta esce 4 E la seconda volta esce 5 E la terza volta esce 6) O
(la prima volta esce 4 E la seconda volta esce 6 E la terza volta esce 5) O
(la prima volta esce 5 E la seconda volta esce 4 E la terza volta esce 6) O
(la prima volta esce 5 E la seconda volta esce 6 E la terza volta esce 4) O
(la prima volta esce 6 E la seconda volta esce 4 E la terza volta esce 5) O
(la prima volta esce 6 E la seconda volta esce 5 E la terza volta esce 4)$\} =$
$= A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F$ (INCOMPATIBILI)

$A = \{$la prima volta esce 4 E la seconda volta esce 5 E ...$\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

$B = \{$la prima volta esce 4 E la seconda volta esce 6 E ...$\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

...

$p(E) = p(A \cup B \cup C \cup \ldots \cup F) = p(A) + p(B) + p(C) + \ldots + p(F) = \frac{1}{216} + \frac{1}{216} + \frac{1}{216} + \ldots + \frac{1}{216} = \frac{1}{36}$

♢ $A = \{$esce 4$\}$ $\quad B = \{$esce 5$\}$ $\quad C = \{$esce 6$\}$ $\quad$ (INDIPENDENTI)

E è l'unione di tutte le possibili permutazioni di ABC, che sono equiprobabili e incompatibili. Perciò:

$p(E) = p(A \cap B \cap C) \cdot$ [numero di possibili permutazioni di ABC] $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 3! = \frac{1}{36}$

5. La probabilità che non esca mai 6.

♡ I risultati possono ripetersi. Tengo in considerazione l'ordine.

$S = \{$terne contenenti i numeri da 1 a 6$\} \quad \Rightarrow \quad \#S = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

$E = \{$terne contenenti i numeri da 1 a 5$\} \quad \Rightarrow \quad \#E = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

$p(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{125}{216}$

♦ $E = \{$la prima volta non esce 6 E la seconda volta non esce 6 E la terza volta non esce 6$\} =$
$= A \cap B \cap C$ (INDIPENDENTI)

$A = \{$la prima volta non esce 6$\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{5}{6}$

$B = \{$la seconda volta non esce 6$\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \dfrac{5}{6}$

$C = \{$la terza volta non esce 6$\} \quad \Rightarrow \quad p(C) = \dfrac{5}{6}$

$p(E) = p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{125}{216}$

6. La probabilità che esca almeno un 6.

♡ Calcolare la probabilità mediante la tecnica:
$S = \{$terne contenenti i numeri da 1 a 6$\} \quad \Rightarrow \quad \#S = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
$E = \{$terne contenenti: (A) un 6, (B) due numeri qualsiasi$\} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \#E = 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot [$numero di possibili permutazioni di ABB$] = 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dfrac{3!}{2!} = 108$

$p(E) = \dfrac{\#E}{\#S} = \dfrac{108}{216} = \dfrac{1}{2}$
è *sbagliato* perchè permutando ABB si possono ottenere terne identiche.

♦ Calcolare la probabilità mediante la tecnica:
$E = \{$la prima volta esce 6 O la seconda volta esce 6 O la terza volta esce 6$\} = A \cup B \cup C$ (COMPATIBILI)
$p(E) = p(A) + p(B) + p(C) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$
è *sbagliato* perchè gli eventi A, B e C sono compatibili.
Sarebbe corretto usare una generalizzazione a tre eventi del teorema dell'evento unione:
$p(E) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$
ma il calcolo della probabilità degli eventi intersezione di A, B e C risulta troppo complesso.

♢ Calcolare la probabilità mediante la tecnica:
$A = \{$esce 6$\} \quad B = \{$esce un numero qualsiasi$\}$ (INDIPENDENTI)
$p(E) = p(A \cap B \cap B) \cdot [$numero di possibili permutazioni di ABB$] = \dfrac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{3!}{2!} = \dfrac{1}{2}$
è *sbagliato* perchè le permutazioni di ABB sono compatibili.

♣ $E = \{$CONTRARIO DI non esce nessun 6$\} = \overline{A}$
$A = \{$non esce nessun 6$\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{125}{216}$
$p(E) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{125}{216} = \dfrac{91}{216}$

7. La probabilità che escano tre numeri uguali.

♦ $E = \{$il secondo numero è uguale al primo E il terzo numero è uguale al primo$\} = A \cap B$ (INDIPENDENTI)
$A = \{$il secondo numero è uguale al primo$\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{1}{6}$

$B = \{$il terzo numero è uguale al primo$\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \dfrac{1}{6}$

$p(E) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$

8. La probabilità che escano tre numeri diversi.

◆ $E = \{$il secondo numero è diverso dal primo E il terzo numero è diverso dal primo e dal secondo$\} =$
$= A \cap B$ (INDIPENDENTI)

$A = \{$il secondo numero è diverso dal primo$\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{5}{6}$

$B = \{$il terzo numero è diverso dal primo e dal secondo$\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \dfrac{4}{6}$

$$p(E) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{9}$$

Esercizio 4. Si puntano 3 numeri al lotto. Durante l'estrazione vengono estratti 5 numeri. Calcola:

1. La probabilità che non esca nessun numero puntato.

♡ I risultati non possono ripetersi. Non conta l'ordine.

$S = \{$cinquine con numeri non ripetuti da 1 a 90$\} \quad \Rightarrow \quad \#S = \dbinom{90}{5}$

$E = \{$cinquine con numeri non puntati$\} \quad \Rightarrow \quad \#E = \dbinom{87}{5}$

$$p(E) = \frac{\dbinom{87}{5}}{\dbinom{90}{5}} = \frac{9877}{11748}$$

◆ $E = \{$il primo estratto non è un n. puntato E il secondo estratto non è un n. puntato E...$\}$ (DIPENDENTI)

$$p(E) = \frac{87}{90} \cdot \frac{86}{89} \cdot \frac{85}{88} \cdot \frac{84}{87} \cdot \frac{83}{86} = \frac{9877}{11748}$$

2. La probabilità che esca esattamente un numero puntato.

♡ I risultati non possono ripetersi. Non conta l'ordine.

$S = \{$cinquine con numeri non ripetuti da 1 a 90$\} \quad \Rightarrow \quad \#S = \dbinom{90}{5}$

Numero di modi di estrarre uno dei 3 numeri puntati $= \dbinom{3}{1}$

Numero di modi di estrarre quattro degli 87 numeri non puntati $= \dbinom{87}{4}$

$E = \{$cinquine contenenti: (A) un numero puntato, (B) quattro numeri non puntati$\} \quad \Rightarrow \quad \#E = \dbinom{3}{1} \cdot \dbinom{87}{4}$

$$p(E) = \frac{\dbinom{3}{1} \cdot \dbinom{87}{4}}{\dbinom{90}{5}} = \frac{1785}{11748} = \frac{595}{3916}$$

♢ $A = \{$esce un numero puntato$\}$ $B = \{$non esce un numero puntato$\}$ (DIPENDENTI)

E è l'unione di tutte le possibili permutazioni di $ABBBB$, che sono equiprobabili e incompatibili. Perciò:

$$p(E) = p(A \cap B \cap B \cap B \cap B) \cdot [\text{num. di possibili permutazioni di ABBBB}] = \frac{3}{90} \cdot \frac{87}{89} \cdot \frac{86}{88} \cdot \frac{85}{87} \cdot \frac{84}{86} \cdot \frac{5!}{4!} = \frac{595}{3916}$$

3. La probabilità che escano esattamente due numeri puntati (fare ambo).

♡ I risultati non possono ripetersi. Non conta l'ordine.

$S = \{$cinquine con numeri non ripetuti da 1 a 90$\} \quad \Rightarrow \quad \#S = \dbinom{90}{5}$

Numero di modi di estrarre due dei 3 numeri puntati $= \dbinom{3}{2}$

Numero di modi di estrarre tre degli 87 numeri non puntati $= \dbinom{87}{3}$

$E = \{$cinquine contenenti: (A) due numeri puntati, (B) tre numeri non puntati$\} \quad \Rightarrow \quad \#E = \dbinom{3}{2} \cdot \dbinom{87}{3}$

$$p(E) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{87}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{85}{11748}$$

♢ $A = \{\text{esce un numero puntato}\}$ $B = \{\text{non esce un numero puntato}\}$ (DIPENDENTI)

E è l'unione di tutte le possibili permutazioni di $AABBB$, che sono equiprobabili e incompatibili. Perciò:

$$p(E) = p(A \cap A \cap B \cap B \cap B) \cdot [\text{n. di possibili permutazioni di AABBB}] = \frac{3}{90} \cdot \frac{2}{89} \cdot \frac{87}{88} \cdot \frac{86}{87} \cdot \frac{85}{86} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{85}{11748}$$

4. La probabilità che escano esattamente tre numeri puntati (fare terno).

♡ I risultati non possono ripetersi. Non conta l'ordine.

$S = \{\text{cinquine con numeri non ripetuti da 1 a 90}\} \quad \Rightarrow \quad \#S = \binom{90}{5}$

Numero di modi di estrarre tre dei 3 numeri puntati $= 1$

Numero di modi di estrarre due degli 87 numeri non puntati $= \binom{87}{2}$

$E = \{\text{cinquine contenenti: (A) tre numeri puntati, (B) due numeri non puntati}\} \quad \Rightarrow \quad \#E = \binom{87}{2}$

$$p(E) = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{11748}$$

♢ $A = \{\text{esce un numero puntato}\}$ $B = \{\text{non esce un numero puntato}\}$ (DIPENDENTI)

E è l'unione di tutte le possibili permutazioni di $AABBB$, che sono equiprobabili e incompatibili. Perciò:

$$p(E) = p(A \cap A \cap A \cap B \cap B) \cdot [\text{n. di possibili permutazioni di AAABB}] = \frac{3}{90} \cdot \frac{2}{89} \cdot \frac{1}{88} \cdot \frac{87}{87} \cdot \frac{86}{86} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{1}{11748}$$

5. La probabilità che esca almeno un numero puntato.

♡ Calcolare la probabilità mediante la tecnica:

I risultati non possono ripetersi. Non conta l'ordine.

$S = \{\text{cinquine con numeri non ripetuti da 1 a 90}\} \quad \Rightarrow \quad \#S = \binom{90}{5}$

Numero di modi di estrarre uno dei 3 numeri puntati $= \binom{3}{1}$

Numero di modi di estrarre quattro qualunque dei restanti 89 numeri $= \binom{89}{4}$

$E = \{\text{cinquine contenenti: (A) un n. puntato, (B) quattro qualunque dei restanti n.}\} \quad \Rightarrow \quad \#E = \binom{3}{1} \cdot \binom{89}{4}$

$$p(E) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{6}$$

è *sbagliato* perchè nel calcolo di $\#E$ compaiono più volte cinquine identiche.

♢ Calcolare la probabilità mediante la tecnica:

E è l'unione di tutte le possibili permutazioni di $ABBBB$, che sono equiprobabili e incompatibili. Perciò:

$$p(E) = p(A \cap B \cap B \cap B \cap B) \cdot [\text{n. di possibili permutazioni di ABBBB}] = \frac{3}{90} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{5!}{4!} = \frac{1}{6}$$

è *sbagliato* perchè le permutazioni di $ABBBB$ sono compatibili.

♦ $E = \{$esce esattamente un numero puntato O escono esattamente due numeri puntati O escono esattamente tre numeri puntati$\} = A \cup B \cup C$ (INCOMPATIBILI)

$$p(E) = p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) = \frac{595}{3916} + \frac{85}{11748} + \frac{1}{11748} = \frac{1871}{11748}$$

♣ $E = \{\text{CONTRARIO DI non esce nessun numero puntato}\} = \overline{A}$

$A = \{\text{non esce nessun numero puntato}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{9877}{11748}$

$p(E) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{9877}{11748} = \dfrac{1871}{11748}$

6. La probabilità che escano almeno due numeri puntati.

♦ $E = \{\text{escono esattamente due n. puntati O escono esattamente tre n. puntati}\} = A \cup B$ (INCOMPATIBILI)

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \dfrac{85}{11748} + \dfrac{1}{11748} = \dfrac{86}{11748}$

Esercizio 5. Un'urna contiene 5 biglie rosse, 6 verdi e 7 blu. Calcola:

1. La probabilità che estraendone 2 con reimmissione siano entrambe rosse.

♥ Calcolare la probabilità mediante la tecnica:

$S = \{(R,R); (R,V); (R,B); (V,R); (V,V); (V,B); (B,R); (B,V); (B,B)\}$

$E = \{\text{escono due rosse}\} = \{(R,R)\}$

è *sbagliato* perchè gli eventi di S non sono equiprobabili.

♦ $A = \{\text{la prima è rossa}\} \quad B = \{\text{la seconda è rossa}\} \quad$ (INDIPENDENTI)

$A = \{\text{la prima è rossa}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{5}{18}$

$B = \{\text{la seconda è rossa}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \dfrac{5}{18}$

$p(E) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \dfrac{5}{18} \cdot \dfrac{5}{18} = \dfrac{25}{324}$

2. La probabilità che estraendone 2 senza reimmissione siano entrambe rosse.

♡ I risultati non possono ripetersi. Non conta l'ordine.

$S = \{\text{estrazioni di due biglie da un insieme di 18}\} \quad \Rightarrow \quad \#S = \dbinom{18}{2}$

$E = \{\text{estrazioni di due biglie rosse}\} \quad \Rightarrow \quad \#E = \dbinom{5}{2}$

$$p(E) = \frac{\dbinom{5}{2}}{\dbinom{18}{2}} = \frac{10}{153}$$

♦ $A = \{\text{la prima è rossa}\} \quad B = \{\text{la seconda è rossa}\} \quad$ (DIPENDENTI)

$A = \{\text{la prima è rossa}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{5}{18}$

$B = \{\text{la seconda è rossa}\} \quad \Rightarrow \quad p(B|A) = \dfrac{4}{17}$

$p(E) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A) = \dfrac{5}{18} \cdot \dfrac{4}{17} = \dfrac{10}{153}$

3. La probabilità che estraendone 2 con reimmissione siano una rossa e una verde.

♦ $E = \{$(la prima è rossa E la seconda è verde) O
(la prima è verde E la seconda è rossa)$\} = A \cup B$ (INCOMPATIBILI)

$A = \{\text{la prima è rossa E la seconda è verde}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{5}{18} \cdot \dfrac{6}{18} = \dfrac{5}{54}$

$B = \{\text{la prima è verde E la seconda è rossa}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{54}$

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{5}{54} + \frac{5}{54} = \frac{5}{27}$

4. La probabilità che estraendone 2 senza reimmissione siano una rossa e una verde.

♡ I risultati non possono ripetersi. Non conta l'ordine.

$S = \{\text{estrazioni di due biglie da un insieme di 18}\} \quad \Rightarrow \quad \#S = \binom{18}{2}$

Numero di modi di estrarre una delle 5 biglie rosse $= \binom{5}{1}$

Numero di modi di estrarre una delle 6 biglie verdi $= \binom{6}{1}$

$E = \{\text{estrazioni contenenti: (A) una biglia rossa, (B) una biglia verde}\} \quad \Rightarrow \quad \#E = \binom{5}{1} \cdot \binom{6}{1}$

$$p(E) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{18}{2}} = \frac{10}{51}$$

◆ $E = \{$(la prima è rossa E la seconda è verde) O
(la prima è verde E la seconda è rossa)$\} = A \cup B$ (INCOMPATIBILI)

$A = \{\text{la prima è rossa E la seconda è verde}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{5}{18} \cdot \frac{6}{17} = \frac{5}{51}$

$B = \{\text{la prima è verde E la seconda è rossa}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} = \frac{5}{51}$

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{5}{51} + \frac{5}{51} = \frac{10}{51}$

5. La probabilità che estraendone 2 con reimmissione ce ne sia almeno una rossa.

◆ $E = \{$(la prima è rossa E la seconda è qualunque) O
(la prima è qualunque E la seconda è rossa)$\} = A \cup B$ (COMPATIBILI)

$A = \{\text{la prima è rossa E la seconda è qualunque}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{5}{18} \cdot 1 = \frac{5}{18}$

$B = \{\text{la prima è qualunque E la seconda è rossa}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = 1 \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{18}$

$A \cap B = \{\text{la prima è rossa E la seconda è rossa}\} \quad \Rightarrow \quad p(A \cap B) = \frac{5}{18} \cdot \frac{5}{18} = \frac{25}{324}$

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{5}{18} + \frac{5}{18} - \frac{25}{324} = \frac{155}{324}$

♣ $E = \{\text{CONTRARIO DI non è mai rossa}\} = \overline{A}$

$A = \{\text{la prima non è rossa E la seconda non è rossa}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{13}{18} \cdot \frac{13}{18} = \frac{169}{324}$

$p(E) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{169}{324} = \frac{155}{324}$

6. La probabilità che estraendone 2 senza reimmissione ce ne sia almeno una rossa.

♡ Calcolare la probabilità mediante la tecnica:

$S = \{\text{estrazioni di due biglie da un insieme di 18}\} \quad \Rightarrow \quad \#S = \binom{18}{2}$

Numero di modi di estrarre una delle 5 biglie rosse $= \binom{5}{1}$

Numero di modi di estrarre una qualunque delle restanti $= \binom{17}{1}$

$E = \{\text{estrazioni contenenti: (A) una biglia rossa, (B) una biglia qualunque}\} \quad \Rightarrow \quad \#E = \binom{5}{1} \cdot \binom{17}{1}$

$$p(E) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{17}{1}}{\binom{18}{2}} = \frac{5}{9}$$

è *sbagliato* perchè nel calcolo di $\#E$ compaiono più volte estrazioni identiche.

♦ $E = \{$(la prima è rossa E la seconda non è rossa) O
(la prima non è rossa E la seconda è rossa) O
(la prima è rossa E la seconda è rossa)$\} = A \cup B \cup C$ (INCOMPATIBILI)

$A = \{\text{la prima è rossa E la seconda non è rossa}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{5}{18} \cdot \frac{13}{17} = \frac{65}{306}$

$B = \{\text{la prima non è rossa E la seconda è rossa}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{13}{18} \cdot \frac{5}{17} = \frac{65}{306}$

$C = \{\text{la prima è rossa E la seconda è rossa}\} \quad \Rightarrow \quad p(C) = \frac{5}{18} \cdot \frac{4}{17} = \frac{10}{153}$

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) + p(C) = \frac{65}{306} + \frac{65}{306} + \frac{10}{153} = \frac{25}{51}$

♣ $E = \{\text{CONTRARIO DI non è mai rossa}\} = \overline{A}$

$A = \{\text{la prima non è rossa E la seconda non è rossa}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{13}{18} \cdot \frac{12}{17} = \frac{26}{51}$

$p(E) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{26}{51} = \frac{25}{51}$

7. La probabilità che estraendone 2 con reimmissione siano dello stesso colore.

♦ $E = \{$(la prima è rossa E la seconda è rossa) O
(la prima è verde E la seconda è verde) O
(la prima è blu E la seconda è blu)$\} = A \cup B \cup C$ (INCOMPATIBILI)

$A = \{\text{la prima è rossa E la seconda è rossa}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{5}{18} \cdot \frac{5}{18} = \frac{25}{324}$

$B = \{\text{la prima è verde E la seconda è verde}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{6}{18} \cdot \frac{6}{18} = \frac{1}{9}$

$C = \{\text{la prima è blu E la seconda è blu}\} \quad \Rightarrow \quad p(C) = \frac{7}{18} \cdot \frac{7}{18} = \frac{49}{324}$

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) + p(C) = \frac{25}{324} + \frac{1}{9} + \frac{49}{324} = \frac{55}{162}$

8. La probabilità che estraendone 2 senza reimmissione siano dello stesso colore.

♦ $E = \{$(la prima è rossa E la seconda è rossa) O
(la prima è verde E la seconda è verde) O
(la prima è blu E la seconda è blu)$\} = A \cup B \cup C$ (INCOMPATIBILI)

$A = \{\text{la prima è rossa E la seconda è rossa}\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{5}{18} \cdot \frac{4}{17} = \frac{10}{153}$

$B = \{\text{la prima è verde E la seconda è verde}\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} = \frac{5}{51}$

$C = \{\text{la prima è blu E la seconda è blu}\} \quad \Rightarrow \quad p(C) = \frac{7}{18} \cdot \frac{6}{17} = \frac{7}{51}$

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) + p(C) = \frac{10}{153} + \frac{5}{51} + \frac{7}{51} = \frac{46}{153}$

9. La probabilità che estraendone 7 con reimmissione ce ne siano 1 rossa, 4 verdi e 2 blu.

♢ $A = \{\text{esce una rossa}\} \quad B = \{\text{esce una verde}\} \quad C = \{\text{esce una blu}\}$ (INDIPENDENTI)

E è l'unione di tutte le possibili permutazioni di $ABBBBCC$, che sono equiprobabili e incompatibili. Perciò:

$$p(E) = p(A \cap B \cap \ldots \cap C) \cdot [\text{n. di possibili permutazioni di ABBBBCC}] = \frac{5}{18} \cdot \left(\frac{6}{18}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{18}\right)^2 \cdot \frac{7!}{4! \cdot 2!} = \frac{8575}{157464}$$

10. La probabilità che estraendone 7 senza reimmissione ce ne siano 1 rossa, 4 verdi e 2 blu.

♡ I risultati non possono ripetersi. Non conta l'ordine.

$S = \{\text{estrazioni di due biglie da un insieme di } 18\} \quad \Rightarrow \quad \#S = \binom{18}{2}$

Numero di modi di estrarre una delle 5 biglie rosse $= \binom{5}{1}$

Numero di modi di estrarre quattro delle 6 biglie verdi $= \binom{6}{4}$

Numero di modi di estrarre due delle 7 biglie blu $= \binom{7}{2}$

$E = \{\text{estrazioni contenenti: (A) una rossa, (B) quattro verdi, (C) due blu}\} \quad \Rightarrow \quad \#E = \binom{5}{1} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{7}{2}$

$$p(E) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{18}{2}} = \frac{175}{17}$$