LA LEGGE DI COULOMB E IL CAMPO ELETTRICO

Annotazioni

- **Cariche elettriche**
  Esistono due tipi di carica: positiva e negativa (un corpo non elettrizzato si dice neutro). Corpi elettrizzati con cariche di segno opposto si attraggono, mentre corpi elettrizzati con cariche dello stesso segno si respingono.
  L'unità di misura della carica è il Coulomb: $[Q] = C$.

- **Quantizzazione della carica**
  Ogni carica elettrica è un multiplo della carica fondamentale *e*, che non è suddivisibile in cariche più piccole.

$$e = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\ C$$

	MASSA	**CARICA**
PROTONE	$1{,}673 \cdot 10^{-27}\ kg$	$1{,}6022 \cdot 10^{-19}\ C\ = +e$
ELETTRONE	$1{,}673 \cdot 10^{-27}\ kg$	$-1{,}6022 \cdot 10^{-19}\ C\ = -e$
NEUTRONE	$1{,}673 \cdot 10^{-27}\ kg$	$0\ C$

- **Principio di conservazione della carica**
  In un sistema chiuso la somma algebrica delle cariche elettriche rimane costante.

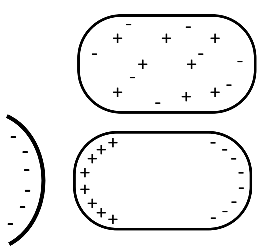
- **Materiali isolanti e conduttori**
  Un materiale si dice *isolante* se la carica elettrica si sposta al suo interno con estrema difficoltà (gomma, vetro, plastica, ceramica…). Si dice invece *conduttore* se la carica elettrica si sposta con facilità (argento, rame…).

- **Elettrizzazione**
  Si dice che un corpo neutro viene elettrizzato quando si carica (se acquista elettroni si carica negativamente, se li cede si carica negativamente). Tra i principali processi di elettrizzazione ci sono:

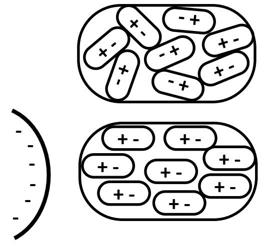
<u>Elettrizzazione per strofinio (o effetto triboelettrico)</u>
Isolanti e conduttori (questi ultimi isolati da terra) si possono elettrizzare se strofinati: il materiale cede elettroni al panno con cui viene strofinato, o viceversa.

<u>Elettrizzazione per contatto</u>
Un conduttore può essere elettrizzato mettendolo a contatto con un altro corpo (conduttore o non) carico: parte delle cariche in eccesso di quest'ultimo si trasferiscono al conduttore.

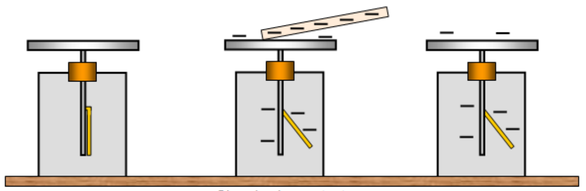
<u>Elettrizzazione per induzione</u>
Un conduttore può essere elettrizzato avvicinandolo ad un corpo carico. Le cariche del conduttore si ridistribuiscono al suo interno: quelle di segno opposto a quelle del corpo inducente si avvicinano al corpo inducente, mentre quelle dello stesso segno si allontanano. Allontanando il corpo inducente, le cariche si ridistribuiscono nuovamente e il corpo torna neutro. Per rendere permanenti gli effetti dell'elettrizzazione, si può collegare il conduttore a terra o spezzarlo in due parti mentre è elettrizzato.



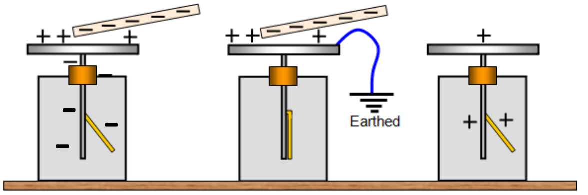
- **Polarizzazione**
  Alcuni isolanti, in vicinanza di un corpo carico, tendono ad orientare le proprie cariche nello stesso verso: in questo modo si forma un debole dipolo, ovvero i due capi opposti del solido risultano carichi con segno opposto. Allontanando il corpo carico, l'isolante ritorna neutro (a parte nel caso di alcuni materiali, detti ferroelettrici).



- **Elettroscopio**
  L’elettroscopio è uno strumento in grado di rivelare se un corpo è carico elettricamente.



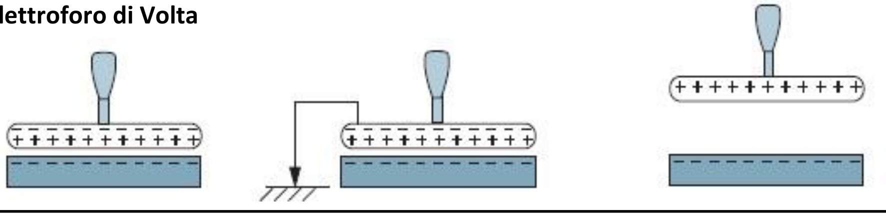
Charging by contact



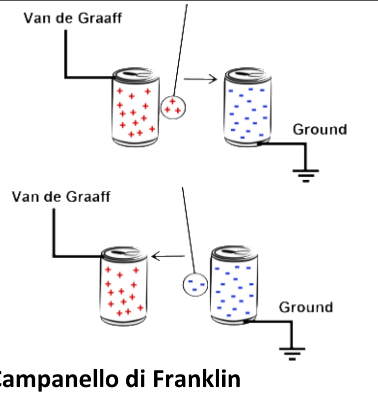
Charging by induction

- **Altri strumenti e macchine elettriche**

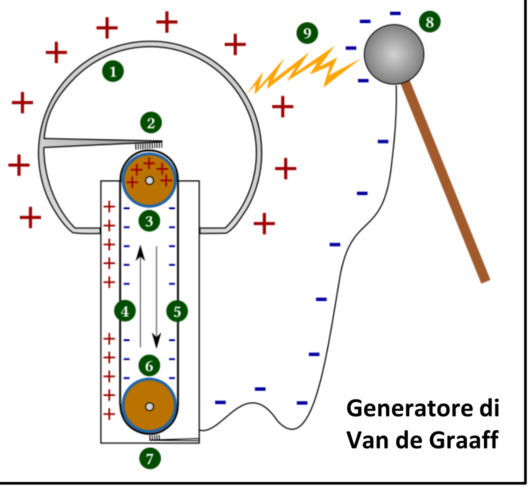
Elettroforo di Volta



Bottiglia di Leida

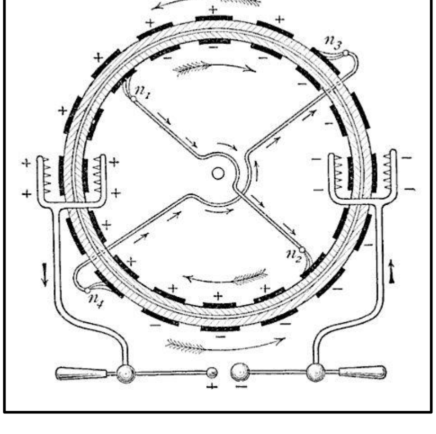


Campanello di Franklin

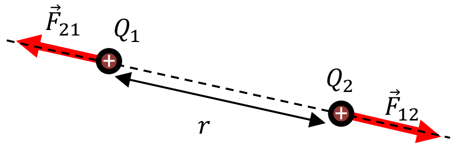


Generatore di Van de Graaff

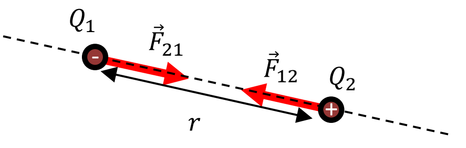
Macchina di Wimshurst



- **Legge di Coulomb**



cariche con stesso segno



cariche di segno opposto

Due cariche puntiformi Q_1 e Q_2 poste a distanza r esercitano una sull'altra una forza con le seguenti caratteristiche:

$$\vec{F} \begin{cases} \text{Direzione: retta congiungente } Q_1 \text{ e } Q_2 \\ \text{Verso: repulsiva se le cariche hanno lo stesso segno} \\ \qquad\quad \text{attrattiva se le cariche hanno segno opposto} \\ \text{Intensità: } F_{12} = F_{21} = k\,\frac{Q_1\,Q_2}{r^2} \end{cases}$$

dove si pone $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}$.

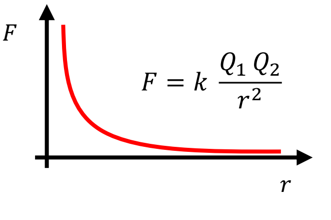
La costante ε si dice *costante dielettrica del mezzo*.
Nel vuoto si pone $\varepsilon = \varepsilon_0$ e $k = k_0$ e vale che:

$$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{N \cdot m^2} \qquad\qquad k_0 = 8{,}9875 \cdot 10^{9}\,\frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

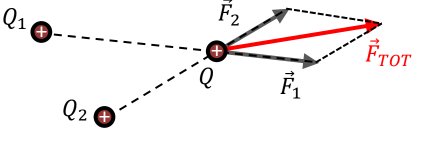
In altri mezzi si pone $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ dove ε_r si dice *costante dielettrica relativa del mezzo*, ha valore maggiore di 1 e dipende dalle caratteristiche del mezzo.

Nota Bene

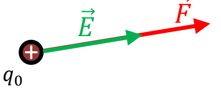
- Un mezzo isolante omogeneo e isotropo (cioè uguale in tutte le direzioni) si dice dielettrico.
- La forza di Coulomb si dice centrale perché agisce lungo la retta congiungente le due cariche.
- L'intensità della forza di Coulomb decresce col quadrato della distanza tra le due cariche (raddoppiando la distanza, la forza di Coulomb diventa un quarto di quella iniziale).

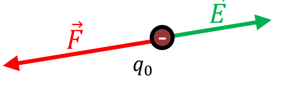


- (Principio di sovrapposizione) La forza totale che esercitano più cariche su una carica Q è la somma vettoriale delle forze che ciascuna di esse esercitano su Q, indipendentemente dalle altre.



- **Campo elettrico (Def)**





Il *campo elettrico* in un punto P dello spazio è il rapporto tra la forza elettrica che agisce su una carica di prova positiva q_0 posizionata in P e la carica di prova stessa. In simboli:

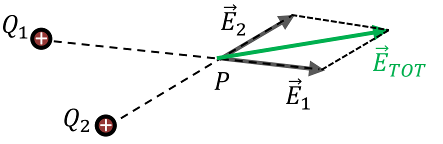
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

L'unità di misura del campo elettrico è: $[E] = \frac{N}{C}$

$$\vec{E} \begin{cases} \text{Direzione: la stessa di } \vec{F} \\ \text{Verso: lo stesso di } \vec{F} \text{ se } q_0 > 0 \\ \qquad\quad \text{opposto ad } \vec{F} \text{ se } q_0 < 0 \\ \text{Intensità: } E = \frac{F}{q_0} \end{cases}$$

Nota Bene

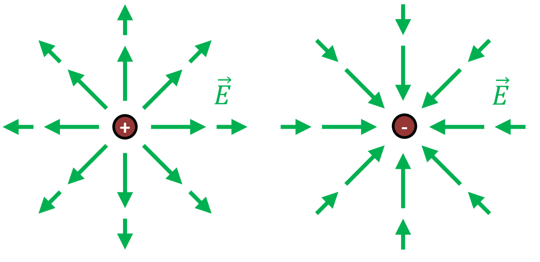
- Il campo elettrico non dipende dalla carica di prova q_0 scelta, ma solo dalle caratteristiche della distribuzione di cariche che esercita la forza su q_0. Si ammette che il campo elettrico esista nel punto P anche senza la presenza di alcuna carica di prova.
- (Principio di sovrapposizione) Il campo elettrico totale che esercitano più cariche in un punto P è la somma vettoriale dei campi elettrici che ciascuna di esse genera in O, indipendentemente dalle altre.



- **Campo elettrico generato da una carica puntiforme**

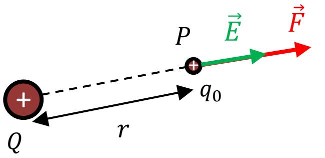
  Il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q in un punto P dello spazio a distanza r dalla carica ha le seguenti caratteristiche:

$\vec{E}$
- Direzione: radiale
- Verso: uscente se $Q > 0$, entrante se $Q < 0$
- Intensità: $E = k\,\dfrac{Q}{r^2}$



Dimostrazione

Consideriamo una carica di prova positiva q_0 posta in un punto P a distanza r da una carica puntiforme Q. Sulla carica di prova agisce la forza di Coulomb $\vec{F}$.



Il campo elettrico in P avrà allora le seguenti caratteristiche.

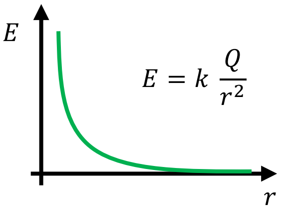
Direzione: la stessa di $\vec{F}$, cioè radiale.

Verso: lo stesso di $\vec{F}$ (perché q_0 è positiva), cioè uscente se $Q > 0$, entrante se $Q < 0$.

Intensità: $E = \dfrac{F}{q_0} = k\,\dfrac{Q\,q_0}{r^2}\cdot\dfrac{1}{q_0} = k\,\dfrac{Q}{r^2}$

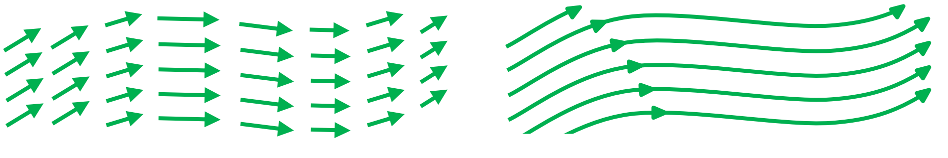
Nota Bene

- L'intensità del campo decresce col quadrato della distanza dalla carica puntiforme.

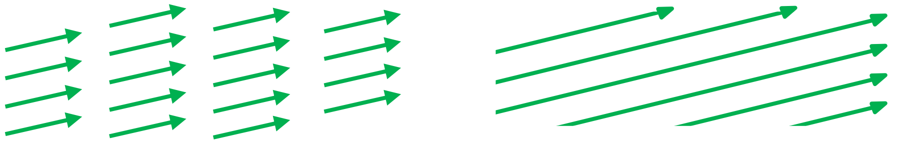


- **Linee di campo**

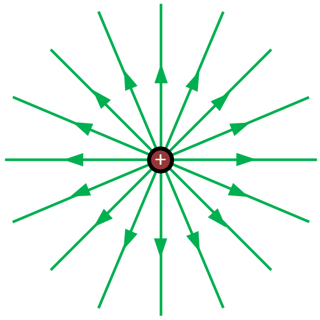
  In ogni punto dello spazio è presente un campo elettrico. Per rappresentarlo, solitamente si utilizzano le *linee di campo*: il vettore del campo elettrico in ciascun punto di queste linee è tangente ad esse. Le linee di campo non si intersecano mai, escono dalle cariche positive ed entrano in quelle negative.



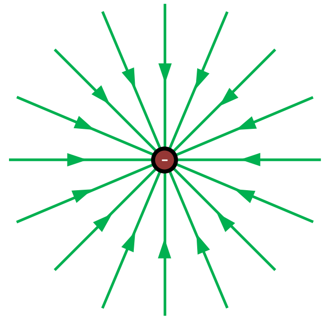
Il campo elettrico si dice *uniforme* se ha stessa direzione, verso e intensità in ogni punto.



Campo generato da una carica puntiforme

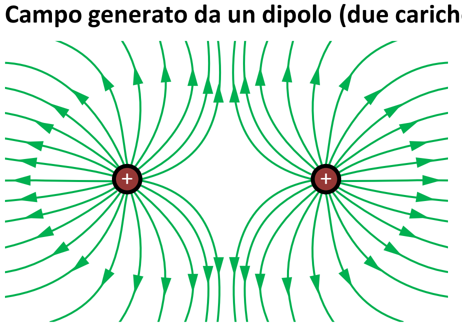


carica positiva

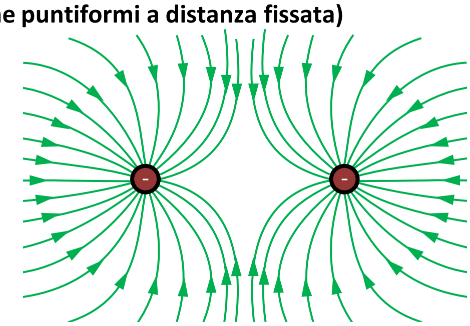


carica negativa

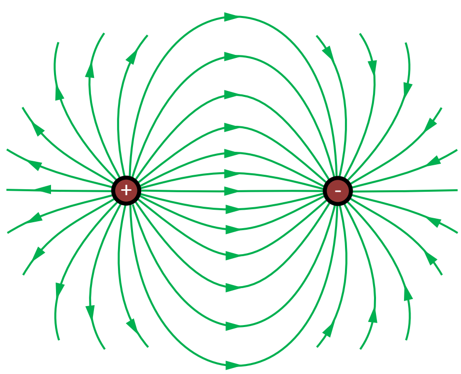
Campo generato da un dipolo (due cariche puntiformi a distanza fissata)



cariche positive



cariche negative

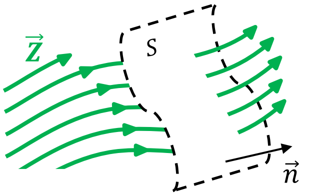


cariche di segno opposto

IL FLUSSO E IL TEOREMA DI GAUSS

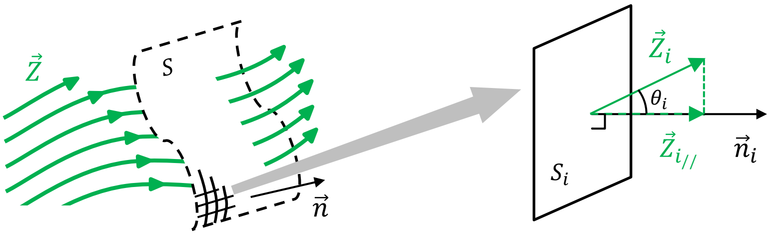
- **Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata (Def)** **Annotazioni**

Si consideri un campo vettoriale $\vec{Z}$ che attraversa una superficie orientata S.



Si suddivida la superficie in N elementi di superficie S_1, S_2, … S_i, … S_N abbastanza piccoli e tali che:

- ciascuna superficie S_i possa essere considerata piana;
- il campo $\vec{Z}_i$ che attraversa ciascuna superficie S_i possa essere considerato uniforme.



Il flusso del campo $\vec{Z}$ attraverso la superficie S è dato dalla somma dei flussi calcolati attraverso questi elementi di superficie:

$$\phi_S(\vec{Z}) = \phi_{S_1}(\vec{Z}_1) + \phi_{S_2}(\vec{Z}_2) + \cdots + \phi_{S_N}(\vec{Z}_N) = \sum_{i=1}^{N} \phi_{S_i}(\vec{Z}_i)$$

Il flusso attraverso il generico elemento di superficie S_i a sua volta è dato dal prodotto scalare tra il campo $\vec{Z}_i$ che lo attraversa e il vettore $\vec{n}_i$ normale all' elemento di superficie (ha direzione perpendicolare all'elemento S_i, verso deciso dall'orientamento della superficie, e intensità pari all'area dell'elemento S_i):

$$\phi_{S_i}(\vec{Z}_i) = \vec{Z}_i \cdot \vec{n}_i = Z_i \cdot n_i \cdot \cos(\theta_i)$$

L'unità di misura del flusso è: $\left[\phi_S(\vec{Z})\right] = [Z] \cdot m^2$.

Nel caso in cui il campo vettoriale sia il campo elettrico: $\left[\phi_S(\vec{E})\right] = \frac{N}{C} \cdot m^2$.

Nota Bene

- Come sempre, il prodotto scalare dipende dal coseno dell'angolo θ_i formato dai due vettori. E' allora facile ricavare che:
  - Il flusso è massimo in positivo se $\theta_i = 0°$ ($\vec{Z}_i$ e $\vec{n}_i$ paralleli e concordi)
  - Il flusso è positivo se $0° \leq \theta_i < 90°$
  - Il flusso è nullo se $\theta_i = 90°$ ($\vec{Z}_i$ e $\vec{n}_i$ paralleli e concordi)
  - Il flusso è negativo se $90° < \theta \leq 180°$
  - Il flusso è massimo in negativo se $\theta_i = 180°$ ($\vec{Z}_i$ e $\vec{n}_i$ paralleli e discordi)

- Siccome la quantità $Z_i \cdot \cos(\theta_i)$ rappresenta l'intensità di $\vec{Z}_{i_{//}}$ (proiezione di $\vec{Z}_i$ su $\vec{n}_i$), si può anche dire che il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie (purché piana e con campo uniforme) è il prodotto tra l'intensità della componente del campo perpendicolare alla superficie e l'area della superficie stessa (il segno va scelto in base all'orientamento della superficie):

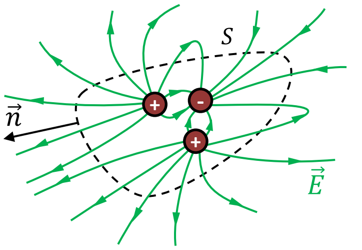
$$\phi_{S_i}(\vec{Z}_i) = (\pm)\, Z_{i_{//}} \cdot n_i$$

- **Teorema di Gauss**

  Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa S orientata verso l'esterno è pari a:

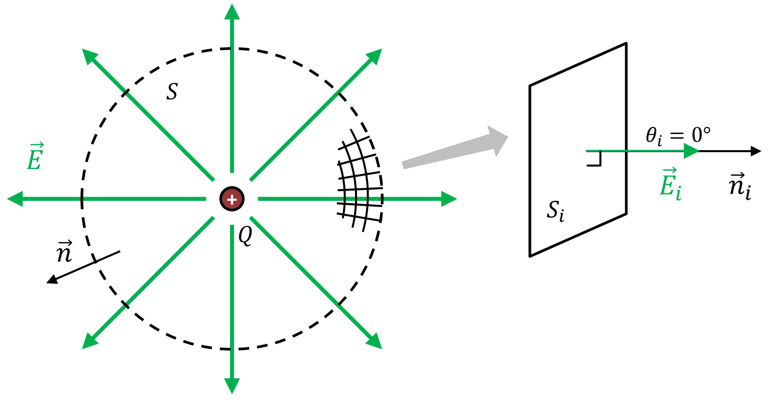
$$\phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon}$$

  dove Q_{INT} è la somma algebrica delle cariche racchiuse dalla superficie.



Dimostrazione

(caso: superficie S sferica con una carica puntiforme Q posta al centro)



Si suddivida S in N elementi di superficie S_1, S_2, ... S_i, ... S_n abbastanza piccoli e tali che:

- ciascuna superficie S_i possa essere considerata piana;
- il campo $\vec{E}_i$ che attraversa ciascuna superficie S_i possa essere considerato uniforme.

Per definizione il flusso attraverso S è la somma dei flussi attraverso questi elementi:

$$\phi_S(\vec{E}) = \phi_{S_1}(\vec{E}_1) + \phi_{S_2}(\vec{E}_2) + \cdots + \phi_{S_N}(\vec{E}_N) =$$

$$= E_1 \cdot n_1 \cdot \cos(\theta_1) + E_2 \cdot n_2 \cdot \cos(\theta_2) + \cdots + E_N \cdot n_N \cdot \cos(\theta_N) =$$

$$\cos(\theta_i) = 1$$

perché il campo generato da una carica puntiforme è radiale: le linee di campo sono perpendicolari alla superficie della sfera ($\theta_i = 0°$).

$$= E_1 \cdot n_1 + E_2 \cdot n_2 + \cdots + E_N \cdot n_N =$$

$$E_1 = E_2 = \cdots = E_N = E$$

perché il campo generato da una carica puntiforme è costante ad uguale distanza, e gli elementi di superficie si trovano alla stessa distanza dalla carica puntiforme.

$$= E \cdot n_1 + E \cdot n_2 + \cdots + E \cdot n_N =$$

$$= E(n_1 + n_2 + \cdots + n_N) =$$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_N = 4\pi r^2$$

perché la somma delle aree di ciascun elemento dà l'area della sfera.

$$= E \cdot 4\pi r^2 =$$

$$E = k\,\frac{Q}{r^2}$$

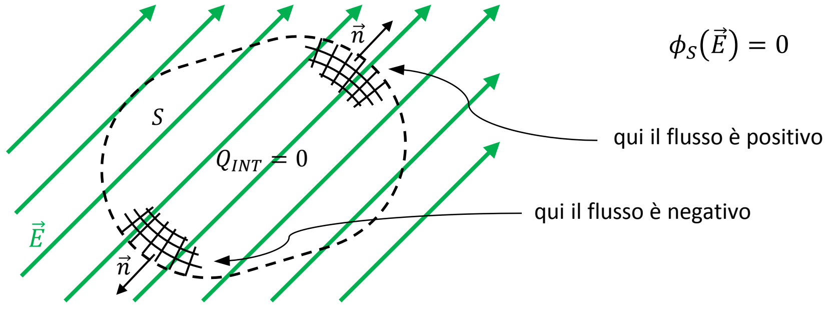
perché è questa l'intensità del campo generato da una carica puntiforme Q nei punti a distanza r (in questo caso pari al raggio della sfera) da essa.

$$= k\,\frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon}\,.$$

Nota Bene

- Il flusso attraverso una superficie chiusa è positivo se $Q_{INT} > 0$ (le linee di campo infatti sono uscenti, concordi a $\vec{n}$), negativo se $Q_{INT} < 0$ (linee di campo entranti).
- Il flusso attraverso una superficie chiusa è nullo se $Q_{INT} = 0$, cioè se all'interno: o non sono presenti cariche, o sono presenti ma la loro somma algebrica è zero.

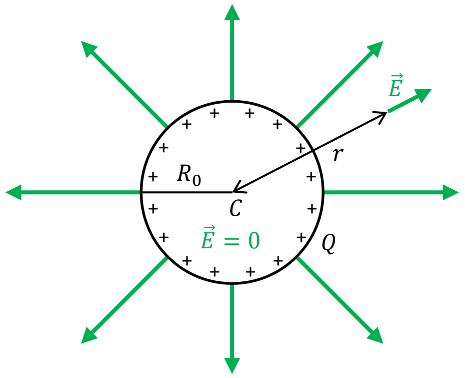
- Se il campo elettrico che attraversa la superficie è generato da cariche esterne (quindi $Q_{INT} = 0$) il suo flusso attraverso di essa è nullo (spiegazione intuitiva: suddividendo la superficie in piccoli elementi di superficie, il flusso attraverso questi sarà in alcuni casi positivo, in altri negativo… sommando questi contributi, si ottiene un flusso complessivo nullo).

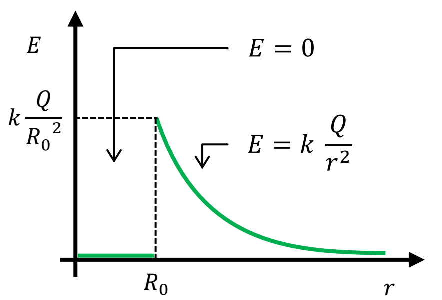


- **Campo generato da un guscio sferico carico uniformemente**
  Si consideri un guscio sferico di raggio R_0 e carica totale Q distribuita in modo uniforme sulla sua superficie. Allora:
  - All'interno del guscio il campo è nullo;
  - All'esterno del guscio il campo è radiale (uscente se $Q > 0$, entrante se $Q < 0$) e ha intensità pari a:

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

  dove r è la distanza dal centro C della sfera (in altre parole, all'esterno il campo è uguale a quello che genererebbe una carica puntiforme Q posta al centro della sfera).

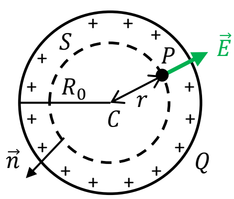




Dimostrazione

Campo all'interno del guscio

Si consideri un punto P a distanza $r < R_0$ da C.
Vogliamo calcolare il campo $\vec{E}$ generato dalla distribuzione di cariche presenti sul guscio in questo punto.
Per questioni di simmetria, $\vec{E}$ dovrà essere:
(a) radiale;
(b) di uguale intensità nei punti a uguale distanza da C.



Si consideri ora una superficie sferica S orientata verso l'esterno, di centro C e raggio r. Calcoliamo il flusso del campo elettrico attraverso S in due modi:

1) CON LA DEFINIZIONE

Si suddivida la superficie S in N elementi di superficie, come al solito…

$$\phi_S(\vec{E}) = \phi_{S_1}(\vec{E}_1) + \phi_{S_2}(\vec{E}_2) + \cdots + \phi_{S_N}(\vec{E}_N) =$$

$$= E_1 \cdot n_1 \cdot \cos(\theta_1) + E_2 \cdot n_2 \cdot \cos(\theta_2) + \cdots + E_N \cdot n_N \cdot \cos(\theta_N) =$$

per (a) $\theta_i = 0°$ e quindi $\cos(\theta_i) = 1$

$$= E_1 \cdot n_1 + E_2 \cdot n_2 + \cdots + E_N \cdot n_N =$$

per (b) $E_1 = E_2 = \cdots = E_N = E$

$$= E \cdot n_1 + E \cdot n_2 + \cdots + E \cdot n_N = E(n_1 + n_2 + \cdots + n_N) = E \cdot 4\pi r^2$$

2) CON IL TEOREMA DI GAUSS

Per il teorema di Gauss:

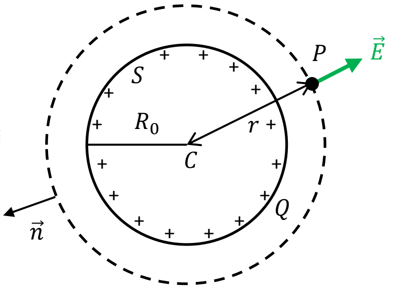
$$\phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon} = 0$$

Uguagliando i due risultati, si ha che:

$$E \cdot 4\pi r^2 = 0$$

$$E = 0$$

<u>Campo all'esterno del guscio</u>



Si consideri un punto P a distanza $r > R_0$ da C.

Vogliamo calcolare il campo $\vec{E}$ generato dalla distribuzione di cariche presenti sul guscio in questo punto.

Per questioni di simmetria, $\vec{E}$ dovrà essere:

(a) radiale;

(b) di uguale intensità nei punti a uguale distanza da C.

Si consideri ora una superficie sferica S orientata verso l'esterno, di centro C e raggio r. Calcoliamo il flusso del campo elettrico attraverso S in due modi:

1) CON LA DEFINIZIONE

Si suddivida la superficie S in N elementi di superficie, come al solito…

$$\phi_S(\vec{E}) = \phi_{S_1}(\vec{E}_1) + \phi_{S_2}(\vec{E}_2) + \cdots + \phi_{S_N}(\vec{E}_N) =$$

$$= E_1 \cdot n_1 \cdot \cos(\theta_1) + E_2 \cdot n_2 \cdot \cos(\theta_2) + \cdots + E_N \cdot n_N \cdot \cos(\theta_N) =$$

per (a) $\theta_i = 0°$ e quindi $\cos(\theta_i) = 1$

$$= E_1 \cdot n_1 + E_2 \cdot n_2 + \cdots + E_N \cdot n_N =$$

per (b) $E_1 = E_2 = \cdots = E_N = E$

$$= E \cdot n_1 + E \cdot n_2 + \cdots + E \cdot n_N = E(n_1 + n_2 + \cdots + n_N) = E \cdot 4\pi r^2$$

2) CON IL TEOREMA DI GAUSS

Per il teorema di Gauss:

$$\phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

Uguagliando i due risultati, si ha che:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon}$$

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

- **Campo generato da una sfera carica uniformemente**

  Si consideri una sfera di raggio R_0 e carica totale Q distribuita in modo uniforme sul suo volume. Allora:

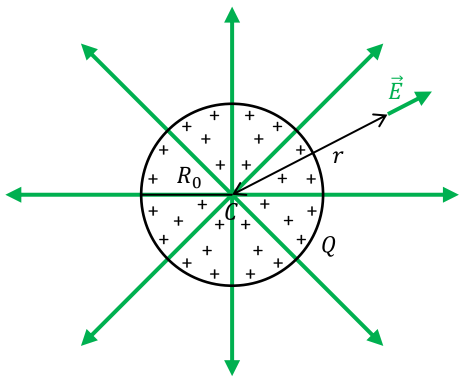
  - All'interno della sfera il campo è radiale (uscente se $Q > 0$, entrante se $Q < 0$) e ha intensità pari a:

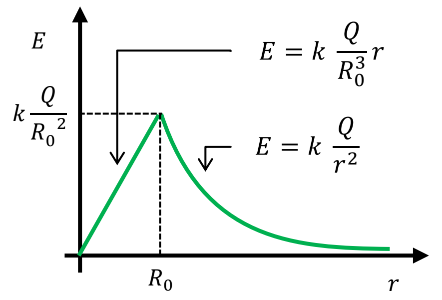
  $$E = k\frac{Q}{R_0^3}r$$

  - All'esterno della sfera il campo è radiale (uscente se $Q > 0$, entrante se $Q < 0$) e ha intensità pari a:

  $$E = k\frac{Q}{r^2}$$

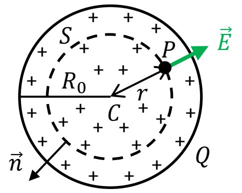
  dove r è la distanza dal centro C della sfera (in altre parole, all'esterno il campo è uguale a quello che genererebbe una carica puntiforme Q posta al centro della sfera).





Dimostrazione

<u>Campo all'interno della sfera</u>



Si consideri un punto P a distanza $r < R_0$ da C.
Vogliamo calcolare il campo $\vec{E}$ generato dalla distribuzione di cariche presenti sulla sfera in questo punto.
Per questioni di simmetria, $\vec{E}$ dovrà essere:

(a) radiale;
(b) di uguale intensità nei punti a uguale distanza da C.

Si consideri ora una superficie sferica S orientata verso l'esterno, di centro C e raggio r. Calcoliamo il flusso del campo elettrico attraverso S in due modi:

1) CON LA DEFINIZIONE

Procedendo come nella dimostrazione del guscio carico, si ottiene che

$\phi_S(\vec{E}) = E \cdot 4\pi r^2$

2) CON IL TEOREMA DI GAUSS

Per il teorema di Gauss:

$\phi_S(\vec{E}) = \dfrac{Q_{INT}}{\varepsilon} =$

La carica è distribuita omogeneamente nella sfera, quindi possiamo impostare la proporzione:

$$Q_{INT}\!:V_S = Q\!:V_{TOT} \quad \Longrightarrow \quad Q_{INT}\!:\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\!:\frac{4}{3}\pi R_0^3 \quad \Longrightarrow \quad Q_{INT} = \frac{Q}{R_0^3}r^3$$

$= \dfrac{Q}{R_0^3\,\varepsilon}r^3$

Uguagliando i due risultati, si ha che:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{R_0^3\,\varepsilon}r^3$$

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 R_0^3\,\varepsilon}r^3$$

$$E = k\frac{Q}{R_0^3}r$$

<u>Campo all'esterno della sfera</u>

Si procede come nella dimostrazione del guscio carico.

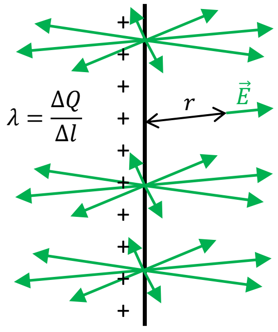
- **Campo generato da una distribuzione lineare infinita e uniforme di cariche**

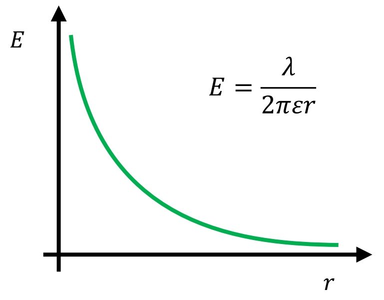
  Si consideri un filo infinitamente esteso carico uniformemente, con densità lineare di carica $\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta l}$ (carica per unità di lunghezza). Il campo da esso generato ha le seguenti caratteristiche:

  - Direzione: radiale e perpendicolare al filo;
  - Verso: uscente se $Q > 0$, entrante se $Q < 0$
  - Intensità:

  $$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

  dove r è la distanza dal filo.



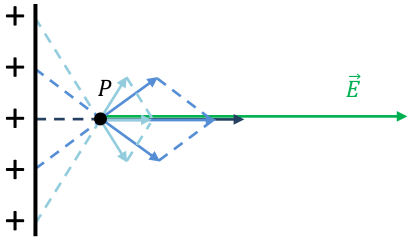


Dimostrazione

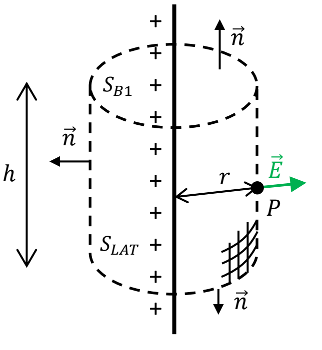
Si consideri un punto P a distanza r dal filo. Per questioni di simmetria, $\vec{E}$ dovrà essere:

(a) radiale e perpendicolare* al filo;

(b) di uguale intensità nei punti a uguale distanza dal filo.



* il campo in P è perpendicolare perché è il risultato della somma vettoriale di tutti i campi generati da ogni singola carica puntiforme, che sono simmetrici a due a due.



Si consideri ora una superficie cilindrica S di raggio r e altezza h, orientata verso l'esterno, avente per asse il filo carico. Calcoliamo il flusso del campo elettrico attraverso S in due modi:

1) CON LA DEFINIZIONE

Il flusso di $\vec{E}$ attraverso S è dato dalla somma del flusso attraverso la base superiore (S_{B1}), la base inferiore (S_{B2}) e la superficie laterale del cilindro (S_{LAT}):

$$\phi_S(\vec{E}) = \phi_{S_{B1}}(\vec{E}) + \phi_{S_{B2}}(\vec{E}) + \phi_{S_{LAT}}(\vec{E}) =$$

per (a) il campo sulle basi del cilindro è perpendicolare a $\vec{n}$, quindi $\phi_{S_{B1}}(\vec{E}) = \phi_{S_{B2}}(\vec{E}) = 0$

$$= \phi_{S_{LAT}}(\vec{E}) =$$

si suddivida la superficie S_{LAT} in N elementi di superficie, come al solito...

$$= \phi_{S_{LAT1}}(\vec{E}_1) + \phi_{S_{LAT2}}(\vec{E}_2) + \cdots + \phi_{S_{LATN}}(\vec{E}_N) =$$

$$= E_1 \cdot n_1 \cdot \cos(\theta_1) + E_2 \cdot n_2 \cdot \cos(\theta_2) + \cdots + E_N \cdot n_N \cdot \cos(\theta_N) =$$

per (a) il campo sulla superficie laterale del cilindro è parallelo a $\vec{n}$, quindi $\cos(\theta_i) = 1$

$$= E_1 \cdot n_1 + E_2 \cdot n_2 + \cdots + E_N \cdot n_N =$$

per (b) $E_1 = E_2 = \cdots = E_N = E$

$$= E \cdot n_1 + E \cdot n_2 + \cdots + E \cdot n_N = E(n_1 + n_2 + \cdots + n_N) = E \cdot 2\pi r h$$

2) CON IL TEOREMA DI GAUSS

Per il teorema di Gauss:

$$\phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon}$$

Uguagliando i due risultati, si ha che:

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon}$$

$$E = \frac{Q_{INT}}{2\pi\varepsilon r h}$$

Le cariche sono distribuite uniformemente, quindi $\frac{Q_{INT}}{h} = \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \lambda$

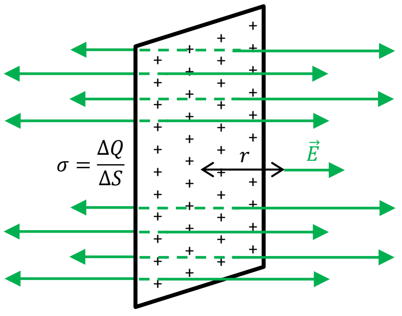
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

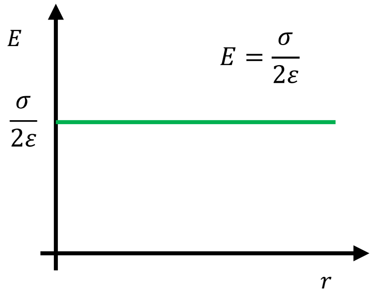
- **Campo generato da una distribuzione piana infinita e uniforme di cariche**

  Si consideri un piano infinitamente esteso carico uniformemente, con densità superficiale di carica $\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}$ (carica per unità di superficie). Il campo da esso generato ha le seguenti caratteristiche:

  - Direzione: perpendicolare al piano;
  - Verso: uscente se $Q > 0$, entrante se $Q < 0$
  - Intensità: la stessa a qualunque distanza, pari a

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$





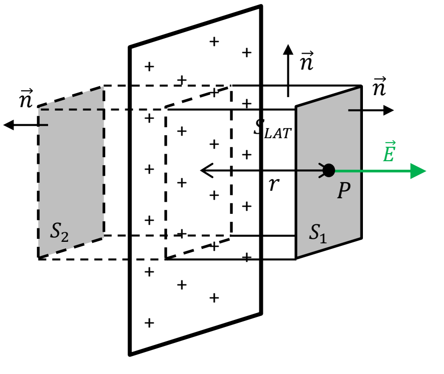
Dimostrazione

Si consideri un punto P a distanza r dal filo. Per questioni di simmetria, $\vec{E}$ dovrà essere:

(a) radiale e perpendicolare (considerazioni analoghe al caso della distribuzione lineare di carica) al filo;

(b) di uguale intensità nei punti a uguale distanza dal filo.

Si consideri ora un parallelepipedo S avente area di base S_1 e S_2, entrambe a distanza r dal piano, e area laterale S_{LAT}, orientato verso l'esterno. Calcoliamo il flusso del campo elettrico attraverso S in due modi:



1) CON LA DEFINIZIONE

Il flusso di $\vec{E}$ attraverso S è dato dalla somma del flusso attraverso la base superiore (S_{B1}), la base inferiore (S_{B2}) e la superficie laterale del cilindro (S_{LAT}):

$$\phi_S(\vec{E}) = \phi_{S_1}(\vec{E}) + \phi_{S_2}(\vec{E}) + \phi_{S_{LAT}}(\vec{E}) =$$

per (a) il campo sulla superficie laterale è perpendicolare a $\vec{n}$, quindi $\phi_{S_{LAT}}(\vec{E}) = 0$

per (a) il campo sulle basi è parallelo a $\vec{n}$, quindi $\phi_{S_i}(\vec{E}) = E_i \cdot n_i$

$$= E_1 \cdot n_1 + E_2 \cdot n_2 =$$

le basi si trovano alla stessa distanza dal piano, quindi per (b) $E_1 = E_2 = E$

$$= E \cdot n_1 + E \cdot n_2 = E(n_1 + n_2 + \cdots + n_N) = E \cdot (S_1 + S_2) = 2ES_1$$

2) CON IL TEOREMA DI GAUSS

Per il teorema di Gauss:

$$\phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon}$$

Uguagliando i due risultati, si ha che:

$$2ES_1 = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon}$$

$$E = \frac{Q_{INT}}{2\varepsilon S_1}$$

Le cariche sono distribuite uniformemente, quindi $\frac{Q_{INT}}{S_1} = \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \sigma$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

ALTRO SUL CAMPO ELETTRICO

Annotazioni

- **Conduttori e campo elettrico**

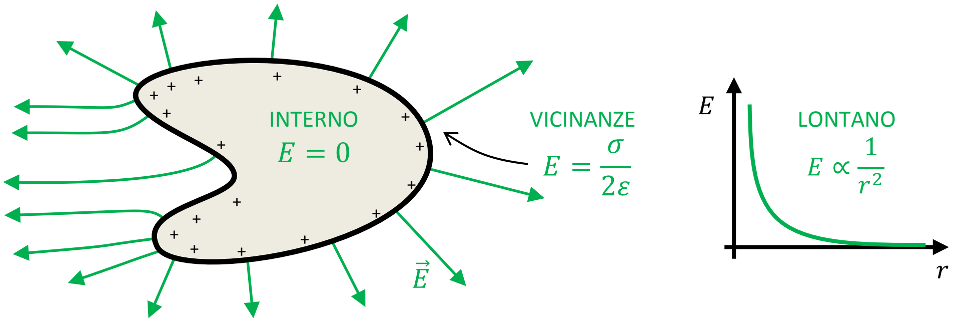
Si consideri un conduttore elettrico isolato in equilibrio elettrostatico. Allora:

- all'interno del conduttore il campo elettrico è nullo e non c'è carica netta;
- nelle immediate vicinanze della superficie all'esterno del conduttore il campo elettrico ha direzione perpendicolare alla superficie, verso uscente se la carica è positiva ed entrante se è negativa, ed ha intensità pari a:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

dove σ è la densità superficiale locale di carica, che in genere non è uniforme su tutta la superficie, ma è maggiore in prossimità di parti appuntite.

- allontanandosi molto dal conduttore, questo diventa approssimabile ad una carica puntiforme e quindi l'intensità del campo diminuisce col quadrato della distanza.

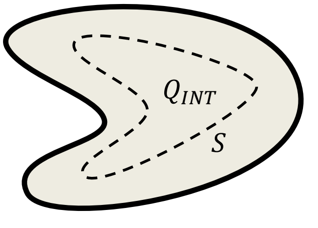


Dimostrazione

Se il conduttore è in equilibrio elettrostatico, all'interno del conduttore il campo elettrico dev'essere nullo (se per assurdo non lo fosse ci sarebbe movimento di cariche, ma il conduttore è in equilibrio elettrostatico).

Si consideri una qualsiasi superficie chiusa S interna al conduttore. Poiché $E = 0$, anche $\phi_S(\vec{E}) = 0$. Siccome, per il teorema di Gauss, il flusso del campo elettrico attraverso questa superficie è anche dato da:

$$\phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon}$$



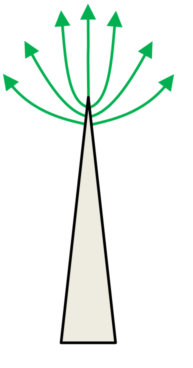
dev'essere che $Q_{INT} = 0$. Se la carica netta presente all'interno di qualunque superficie chiusa interna conduttore è nulla, allora la carica netta presente all'interno del conduttore stesso dev'essere nulla.

Nelle immediate vicinanze della superficie all'esterno del conduttore, la superficie è approssimabile ad una distribuzione piana infinita di cariche, e quindi

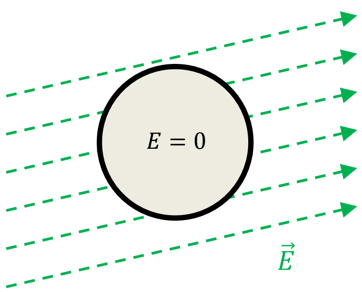
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

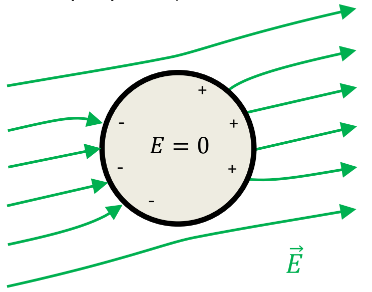
Nota Bene

- (Potere disperdente delle punte) Vista la maggior concentrazione di carica nelle punte dei conduttori, qui il campo risulta più intenso. Il potere disperdente delle punte è alla base del funzionamento del parafulmine, o di alcuni fenomeni come il vento elettrico (in cui la punta, carica ad es. positivamente, attira gli ioni dell'aria carichi negativamente e respinge quelli carichi positivamente che si allontanano generando una sorta di vento)

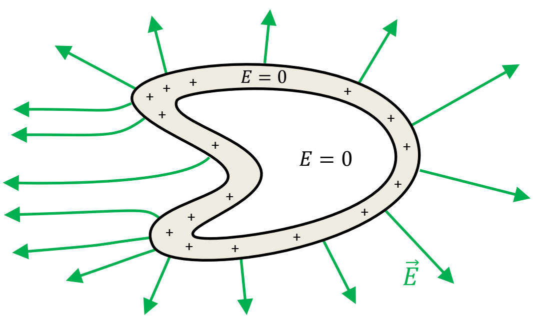


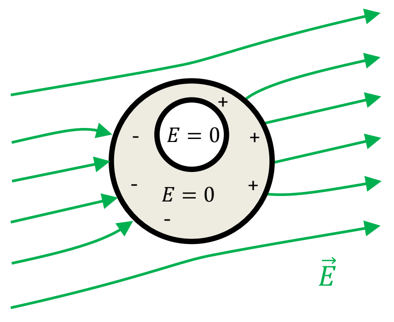
- Anche in presenza di un campo esterno, all'interno del conduttore il campo è nullo (le cariche presenti all'interno del conduttore si ridistribuiscono in modo che il campo risultante all'interno del conduttore sia nullo in qualunque punto).



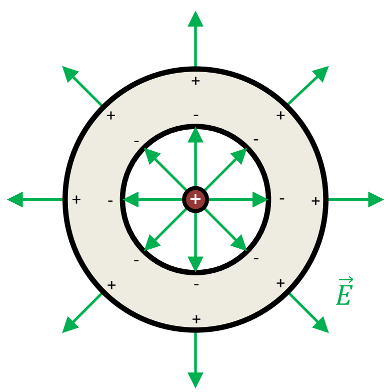


- (Gabbia di Faraday) Anche in una cavità all'interno di un conduttore (oltre che nel conduttore stesso) il campo è nullo. Questo rimane vero sia se il conduttore è carico (a sinistra), sia in presenza di un campo esterno che investe il conduttore (a destra).





Ma se viene posta una carica puntiforme o un corpo carico all'interno della cavità del conduttore, naturalmente questa genera in essa un campo elettrico (dentro al conduttore invece il campo è sempre nullo).



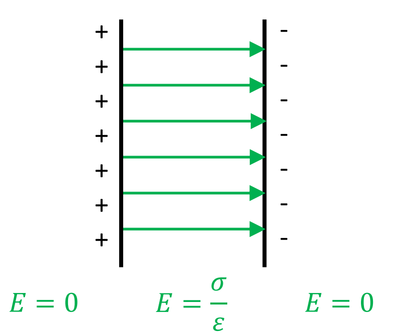
Per interpretare e prevedere questi e altri fenomeni si utilizza il teorema di Gauss. Si consideri una qualunque superficie chiusa S interna al conduttore: se la carica netta interna ad S è nulla, allora è nullo il flusso di $\vec{E}$ attraverso S, e quindi o $\vec{E}$ è nullo, oppure entra ed esce da S. Viceversa, se la carica netta interna ad S non è nulla, allora $\vec{E}$ entra oppure esce da S.

- **Condensatore ad armature piane**

Un condensatore ad armature piane è un dispositivo formato da due lastre conduttrici (dette armature) cariche di segno opposto, poste una di fronte all'altra e isolate da un dielettrico. Allora:
- nella regione esterna alle due armature il campo è nullo.
- nella regione interna alle due armature il campo è uniforme, orientato dalla lastra positiva alla negativa, e ha intensità pari a:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

dove σ è la densità superficiale di carica sulle lastre.

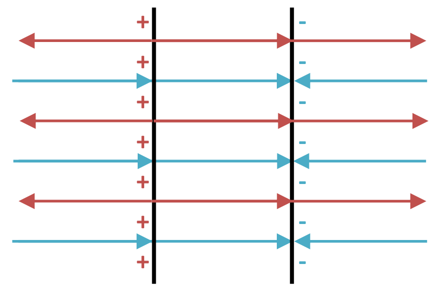


Dimostrazione

Le cariche distribuite sulle lastre possono essere considerate delle distribuzioni di cariche piane e infinite (rispetto alle dimensioni del condensatore). Ciascuna quindi genera un campo uniforme di intensità

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

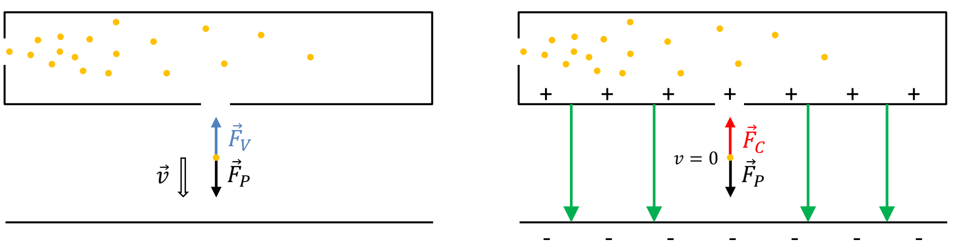
e, come si può vedere dalla figura, i versi sono discordi nelle regioni esterne al condensatore, e sono concordi nelle regioni interne. Sommando i campi in queste regioni si ottiene che all'esterno i campi si annullano, mentre all'interno l'intensità raddoppia.



$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} - \frac{\sigma}{2\varepsilon}$ $\quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} + \frac{\sigma}{2\varepsilon}$ $\quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} - \frac{\sigma}{2\varepsilon}$

- **Esperimento di Millikan**

L'esperimento si pone l'obiettivo di misurare la carica elettrica dell'elettrone.



1) Una gocciolina d'olio di raggio r, densità ρ_{OLIO} e carica q viene fatte cadere tra le due lamine di un condensatore ad armature piane, inizialmente spento. Su di essa agiscono

- la forza peso, diretta verso il basso:

$$F_P = m \cdot g = V_{OLIO} \cdot \rho_{OLIO} \cdot g = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_{OLIO} \cdot g$$

- la forza di attrito viscoso dell'aria (η_{ARIA} è la viscosità dell'aria), che dipende dalla velocità v della goccia, ed è diretta verso l'alto:

$$F_V = k \cdot v = 6\pi r \eta_{ARIA} \cdot v$$

Dopo qualche istante di accelerazione, la goccia raggiunge una velocità limite costante perché la forza d'attrito aumenta fino ad equilibrare la forza peso:

$$F_V = F_P \quad \Longrightarrow \quad 6\pi r \eta_{ARIA} \cdot v = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_{OLIO} \cdot g$$

Nell'equazione tutti i termini sono noti o misurabili eccetto r, che si può così ricavare.

2) Si accenda il condensatore. Sulla goccia ora agisce anche

- la forza elettrica, diretta verso l'alto:

$$F_C = E \cdot q$$

Regolando il campo tra le lamine, è possibile modificare l'intensità della forza elettrica fino ad arrestare la caduta della goccia. Ciò accade quando:

$$F_C = F_P \quad \Longrightarrow E \cdot q = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_{OLIO} \cdot g$$

Nell'equazione tutti i termini sono noti o misurabili eccetto q, che si può così ricavare.

3) Millikan ripeté l'esperimento con gocce di diverso raggio e regolando il campo a diverse intensità (in modo da garantire sempre l'equilibrio delle forze), ottenendo diverse misure delle cariche q presenti sulle goccioline d'olio. Notò che tutti i valori ottenuti sono multipli interi di una carica elettrica elementare (ovvero quella dell'elettrone):

$$e = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\ C$$