Limite di una funzione

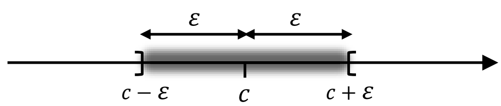
• Intorno

Dato un numero reale c, si dice intorno di c un qualunque intervallo aperto contenente c:

$$I_c =]a, b[\qquad \text{(con } a < c < b\text{)}$$

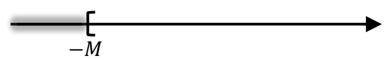
L'intorno si dice circolare (ed ε si dice raggio dell'intorno) se:

$$I_c =]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\qquad \text{(con } \varepsilon > 0\text{)}$$



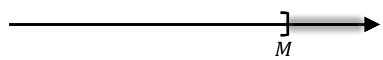
Si definiscono inoltre (con $\varepsilon > 0$ ed $M > 0$):

$$I_{-\infty} =] - \infty, -M[$$



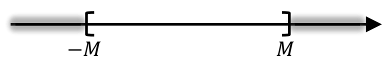
(illimitato inferiormente)

$$I_{+\infty} =] + M, +\infty[$$

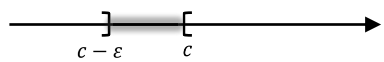


(illimitato superiormente)

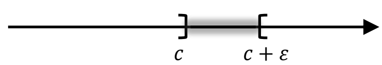
$$I_{\infty} =] - \infty, -M[\cup] + M, +\infty[$$



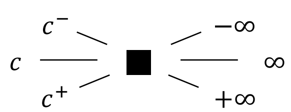
$$I_{c^-} =]c - \varepsilon, c[$$

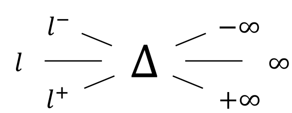


$$I_{c^+} =]c, c + \varepsilon[$$



Di seguito, si utilizzeranno i simboli ■ e Δ per indicare:





• Punto di accumulazione

Dato un insieme A, si dice che ■ è punto di accumulazione per A se qualsiasi intorno di ■ contiene almeno un elemento di A, oltre a ■ stesso.

$$\forall\, I_{\blacksquare} \quad \exists\; a \in A, a \neq \blacksquare \quad t.c. \quad a \in I_{\blacksquare}$$

Si può dimostrare che, se ■ è punto di accumulazione per A, in realtà ogni suo intorno contiene infiniti elementi di A, oltre a ■ stesso.

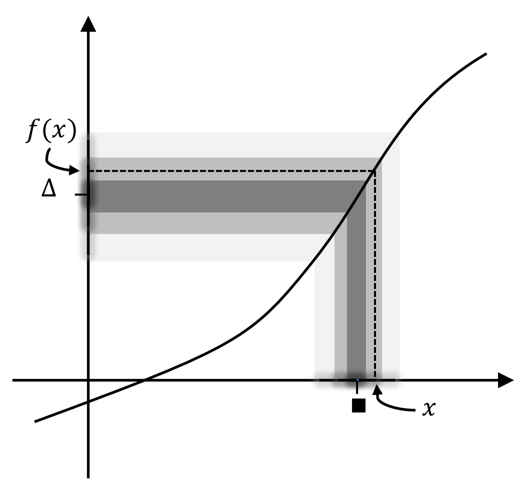
• Limite di una funzione

Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale di dominio $D(f)$, e sia ■ un punto di accumulazione per $D(f)$.

$$\lim_{x \to \blacksquare} f(x) = \Delta$$

significa:

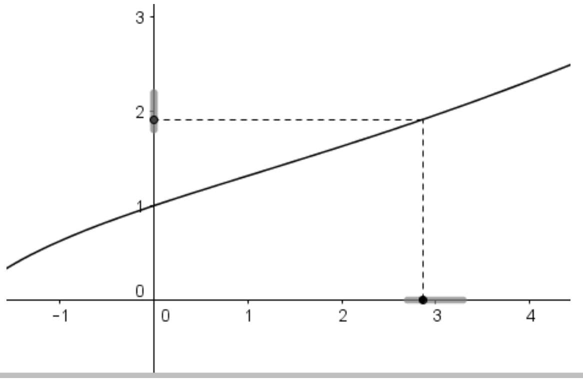
$$\forall\, I_\Delta \quad \exists I_{\blacksquare} \quad t.c. \quad \begin{cases} x \in I_{\blacksquare} \\ x \neq \blacksquare \end{cases} \Longrightarrow \quad f(x) \in I_\Delta$$



Il limite di $f(x)$ per x tendente a ■ è Δ se, qualsiasi intorno di Δ si consideri, si può trovare un intorno di ■ tale che tutti gli elementi appartenenti a questo intorno, escluso al più ■, hanno immagine che appartiene all'intorno di Δ.

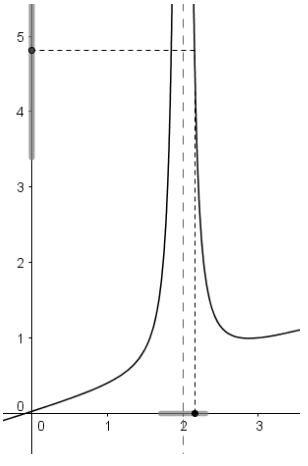
Significa che, man mano che x tende a ■ (senza raggiungerlo), le immagini $f(x)$ tendono a Δ.

Esempi



Limite finito per x tendente ad un valore finito

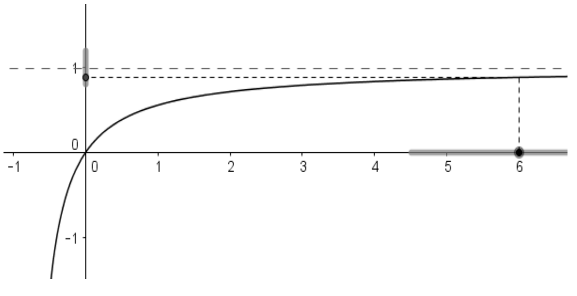
$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$$



Limite infinito per x tendente ad un valore finito

$$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$$

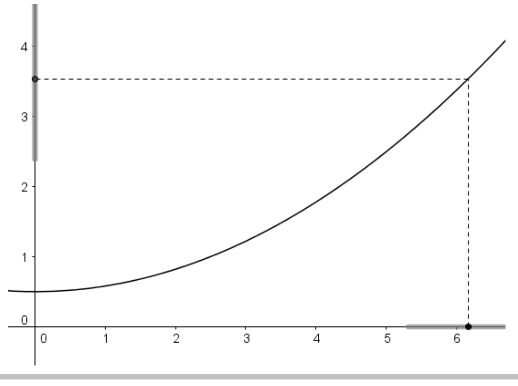
Asintoto verticale



Limite finito per x tendente ad un valore infinito

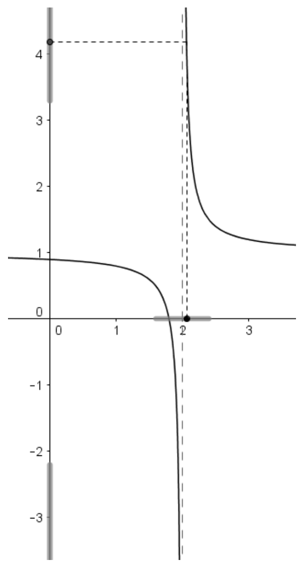
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

Asintoto orizzontale



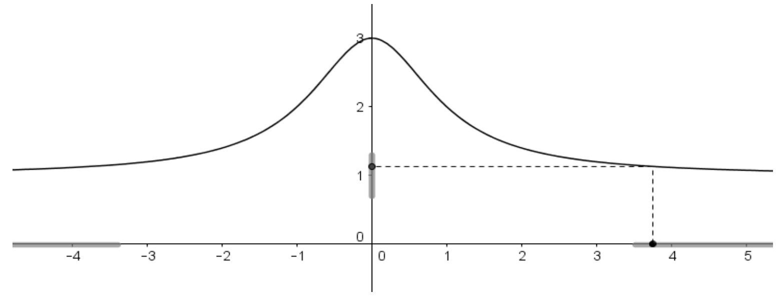
Limite infinito per x tendente ad un valore infinito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



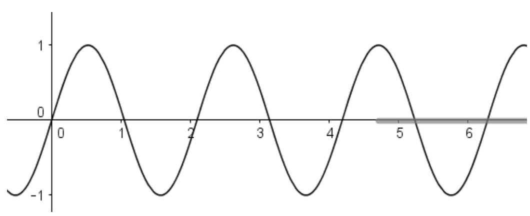
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$$

Asintoto verticale

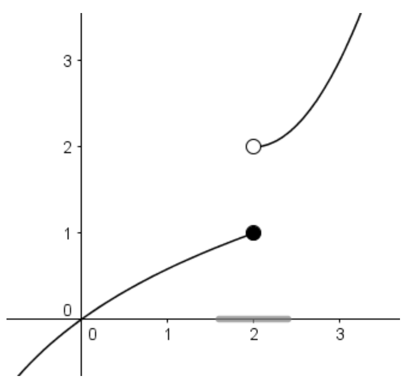


$$\lim_{x\to \infty} f(x) = 1$$

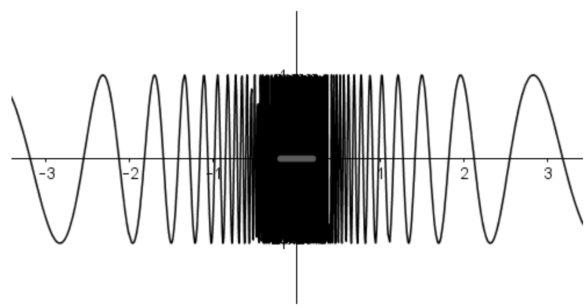
Asintoto orizzontale



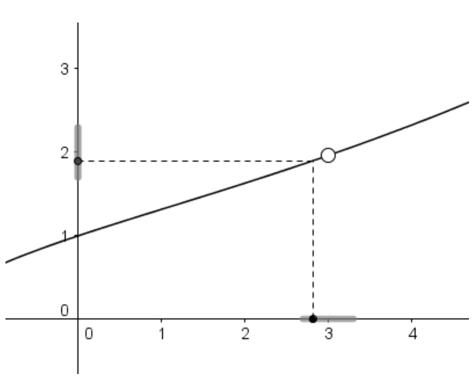
$$\lim_{x\to \infty} f(x) = NE$$



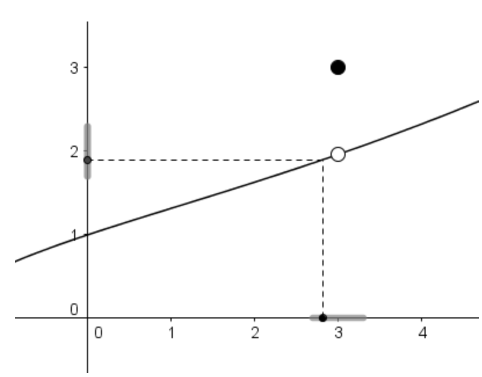
$$\lim_{x\to 2} f(x) = NE$$



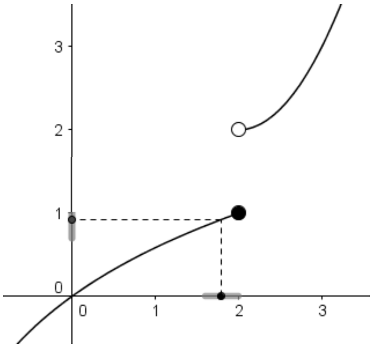
$$\lim_{x\to 0} f(x) = NE$$



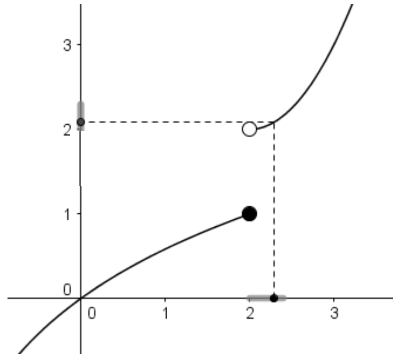
$$\lim_{x\to 3} f(x) = 2$$



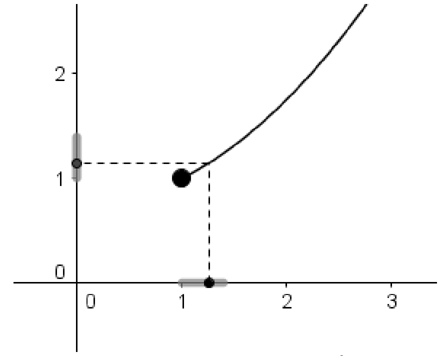
$$\lim_{x\to 3} f(x) = 2$$



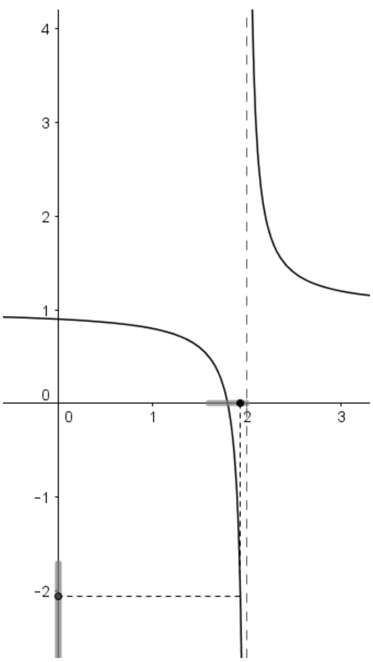
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1^-$



$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2^+$

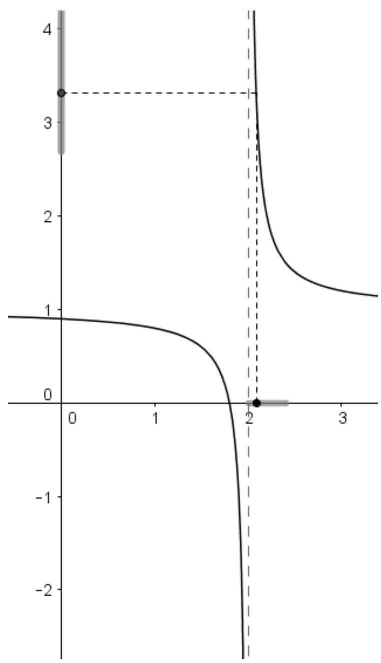


$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1^+$



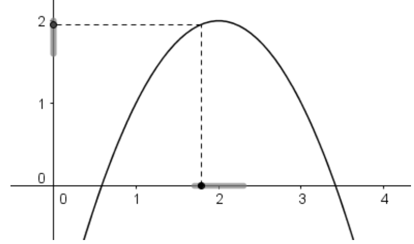
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

Asintoto verticale (sinistro)

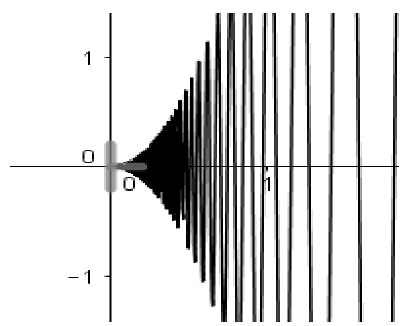


$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

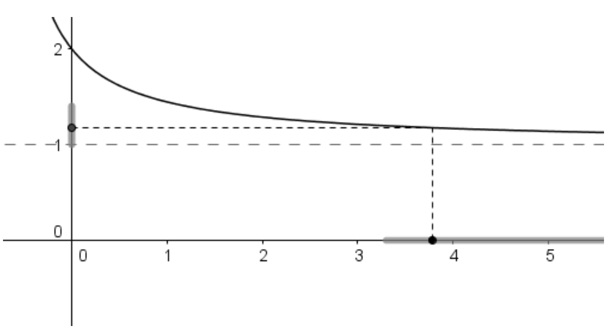
Asintoto verticale (destro)



$\lim_{x\to 2} f(x) = 2^-$

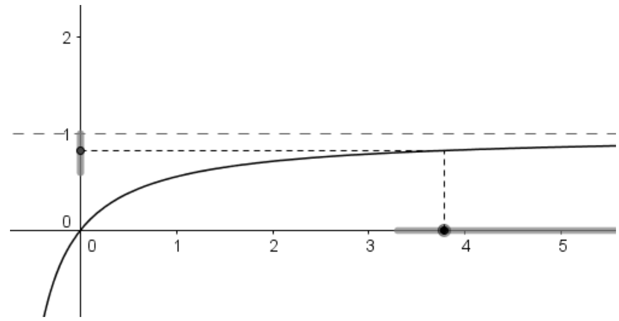


$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$



$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1^+$

Asintoto orizzontale (dall'alto)



$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1^-$

Asintoto orizzontale (dal basso)

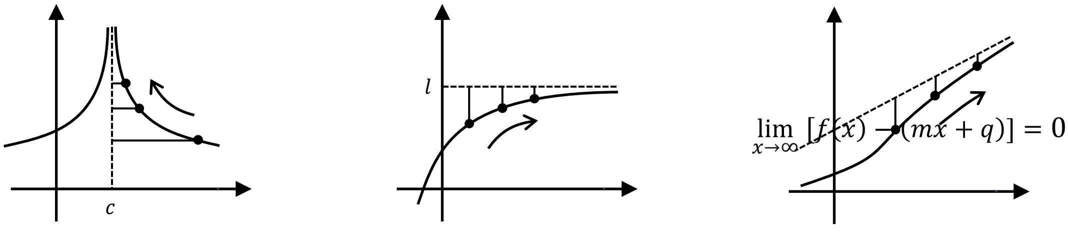
• Asintoti di una funzione

Si dice che la retta $x = c$ è asintoto verticale per il grafico di $f(x)$ se $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$

Si dice che la retta $y = l$ è asintoto verticale per il grafico di $f(x)$ se $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$

Si dice che la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per il grafico di $f(x)$ se
ovvero se esistono i seguenti limiti, finiti:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{e} \qquad q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$



Una funzione razionale fratta $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ avente $\mathrm{gr}(N) \geq \mathrm{gr}(D)$ si può scrivere nella forma:

$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

as. orizz. o obl. scarto

dove $Q(x)$ è il quoziente e $R(x)$ è il denominatore della divisione polinomiale $N(x) \colon D(x)$.

Teoremi sui limiti

- **Teorema di unicità del limite**

  Se una funzione $f(x)$ ammette il limite

$$\lim_{x\to\blacksquare} f(x) = \Delta,$$

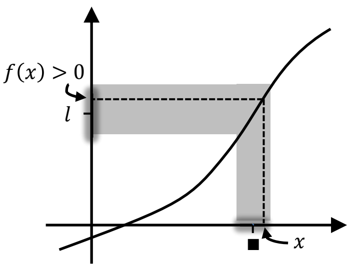
  allora questo è unico.

- **Teorema della permanenza del segno**

  Se una funzione $f(x)$ ammette un limite positivo:

$$\lim_{x\to\blacksquare} f(x) = l > 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to\blacksquare} f(x) = +\infty$$

  allora esiste un intorno di ■ in cui la funzione (eccetto al più ■) è positiva. Analogamente, se $f(x)$ ammette un limite negativo allora esiste un intorno di ■ in cui la funzione (eccetto al più ■) è negativa.



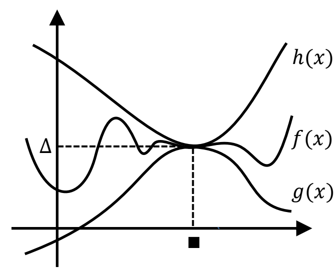
- **Teorema del confronto**

  Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tre funzioni tali che:

  1. $\lim_{x\to\blacksquare} g(x) = \lim_{x\to\blacksquare} h(x) = \Delta$
  2. Esiste un intorno di ■ nel quale (eccetto al più ■): $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

  Allora anche

$$\lim_{x\to\blacksquare} f(x) = \Delta$$



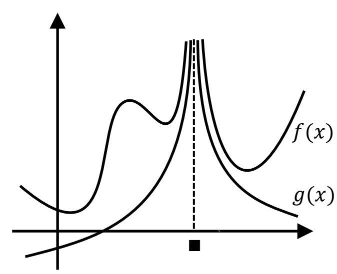
- **Teorema del confronto 2**

  Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che:

  1. $\lim_{x\to\blacksquare} g(x) = +\infty$
  2. Esiste un intorno di ■ nel quale (eccetto al più ■): $f(x) \geq g(x)$

  Allora anche

$$\lim_{x\to\blacksquare} f(x) = +\infty$$

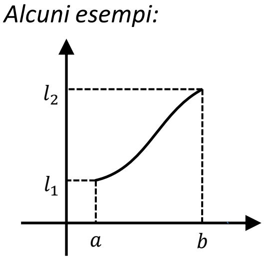


  Analogamente, se $\lim_{x\to\blacksquare} g(x) = -\infty$ e in un intorno di ■ si ha che $f(x) \leq g(x)$, allora anche $\lim_{x\to\blacksquare} f(x) = -\infty$.

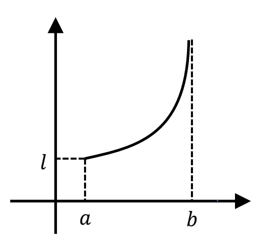
- **Teorema di esistenza del limite per funzioni monotone**

  Se $f(x)$ è monotona in un intervallo $]a, b[$ allora esistono sempre (finiti o infiniti) i limiti per $x \to b^-$ e $x \to a^+$.
  Se $f(x)$ è monotona in un intervallo $]a, +\infty[$ allora esiste sempre (finito o infinito) il limite per $x \to +\infty$.
  Se $f(x)$ è monotona in un intervallo $]-\infty, b[$ allora esiste sempre (finito o infinito) il limite per $x \to -\infty$.

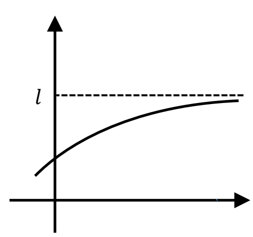
  Alcuni esempi:



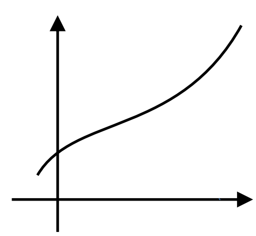
$\lim_{x\to b^-} f(x) = l_2$



$\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$



$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

• Algebra dei limiti

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni. Le seguenti tabelle mostrano il risultato del limite:

$$\lim_{x\to\blacksquare} f(x) * g(x)$$

a seconda dell'operazione $*$ e del risultato dei limiti di $f(x)$ e $g(x)$ (rispettivamente per riga e per colonna) per x tendente a $\blacksquare$:

$$\lim_{x\to\blacksquare} f(x) + g(x) = \cdots$$

+	l_2	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
l_1	$l_1 + l_2$	l_1	l_1	$+\infty$	$-\infty$
0^+	l_2	0^+	0	$+\infty$	$-\infty$
0^-	l_2	0	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$F.I.$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$F.I.$	$-\infty$

$$\lim_{x\to\blacksquare} f(x) \cdot g(x) = \cdots$$

·	l_2	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
l_1	$l_1 \cdot l_2$	0	0	$\pm\infty^*$	$\pm\infty^*$
0^+	0	0^+	0^-	$F.I.$	$F.I.$
0^-	0	0^-	0^+	$F.I.$	$F.I.$
$+\infty$	$\pm\infty^*$	$F.I.$	$F.I.$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty^*$	$F.I.$	$F.I.$	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x\to\blacksquare} f(x)/g(x) = \cdots$$

/	l_2	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
l_1	l_1/l_2	$\pm\infty^*$	$\pm\infty^*$	0	0
0^+	0	$F.I.$	$F.I.$	0^+	0^-
0^-	0	$F.I.$	$F.I.$	0^-	0^+
$+\infty$	$\pm\infty^*$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I.$	$F.I.$
$-\infty$	$\pm\infty^*$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I.$	$F.I.$

* $+\infty$ o $-\infty$ a seconda della regola dei segni

$$\lim_{x\to\blacksquare} f(x)^{g(x)} = \cdots$$

^	$0 < l_2 < 1$	1	$l_2 > 1$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$0 < l_1 < 1$	$l_1^{l_2}$	l_1	$l_1^{l_2}$	1	1	0^+	$+\infty$
1	1	1	1	1	1	$F.I.$	$F.I.$
$l_1 > 1$	$l_1^{l_2}$	l_1	$l_1^{l_2}$	1	1	$+\infty$	0^+
0^+	0^+	0^+	0^+	$F.I.$	$F.I.$	0^+	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$F.I.$	$F.I.$	$+\infty$	0^+

In particolare, si riconoscono le seguenti forme indeterminate:

$$[+\infty - \infty] \quad [0 \cdot \infty] \quad \left[\frac{0}{0}\right] \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad [1^\infty] \quad [0^0] \quad [\infty^0]$$

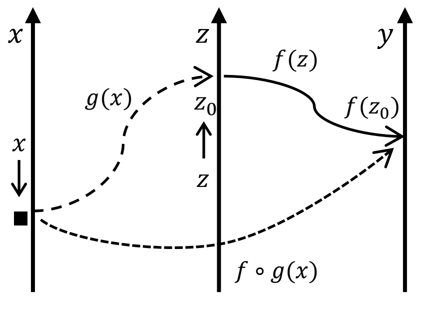
• Limite di funzioni composte

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che:

1. $f(x)$ è continua in z_0, ovvero $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$
2. $\lim_{x\to\blacksquare} g(x) = z_0$

Allora:

$$\lim_{x\to\blacksquare} f\big(g(x)\big) = f(\lim_{x\to\blacksquare} g(x)) = f(z_0)$$

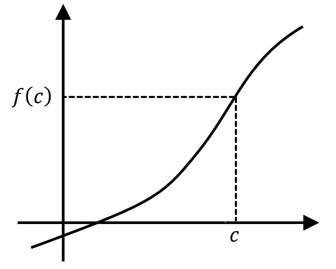


Continuità di una funzione

- **Continuità in un punto**

Una funzione $f(x)$ si dice continua in un punto c se:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$



Se $f(x)$ è continua in x_0 valgono implicitamente le seguenti condizioni:

1. $c \in D(f)$ (perché sia possibile calcolare $f(c)$)

2. c è punto di accumulazione di $D(f)$ (perché sia possibile calcolare il limite)

3. Il limite è finito (perché è uguale a $f(c)$ che è un numero)

Significa che il valore a cui tendono le immagini $f(x)$ man mano che x tende a c è proprio il valore assunto dalla funzione in c, ovvero $f(c)$.

Si dice che $f(x)$ è continua a sinistra di c se:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

Si dice che $f(x)$ è continua a destra di c se:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

- **Continuità in un intervallo**

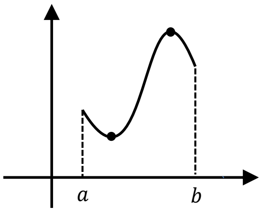
Una funzione $f(x)$ si dice continua in un intervallo se è continua in ogni punto di quell'intervallo.

- **Teorema di Weierstrass**

Se valgono le seguenti ipotesi:

1. $[a, b]$ è un intervallo chiuso e limitato
2. La funzione $f(x)$ è continua in $[a, b]$

allora $f(x)$ assume massimo e minimo assoluti in $[a, b]$.

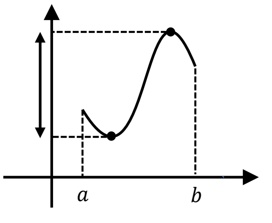


- **Teorema dei valori intermedi**

Se valgono le seguenti ipotesi:

1. $[a, b]$ è un intervallo chiuso e limitato
2. La funzione $f(x)$ è continua in $[a, b]$

allora $f(x)$ assume almeno una volta tutti i valori compresi tra il suo massimo assoluto e il suo minimo assoluto.

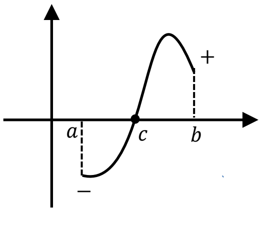


- **Teorema di esistenza degli zeri**

Se valgono le seguenti ipotesi:

1. $[a, b]$ è un intervallo chiuso e limitato
2. La funzione $f(x)$ è continua in $[a, b]$
3. $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno discorde

allora esiste almeno un punto $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$.

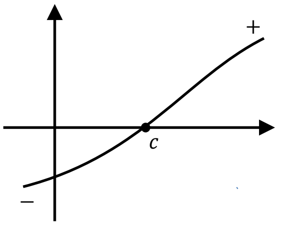


- **Teorema di esistenza degli zeri (generalizzato)**

Se valgono le seguenti ipotesi:

1. La funzione $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$
2. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ hanno segno discorde

allora esiste almeno un punto $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(c) = 0$.



● Continuità delle funzioni elementari

Le funzioni elementari sono continue in $\mathbb{R}$ (a parte la logaritmica, che è continua soltanto per $x > 0$):

$$y = x \qquad y = \cos(x) \qquad y = \sin(x) \qquad y = a^x \qquad y = \log_a(x)$$

● Teoremi sulle funzioni continue

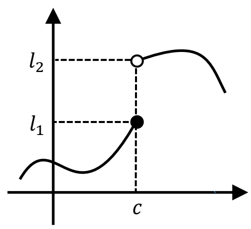
Somma e prodotto di funzioni continue in D è una funzione continua in D.
Quoziente di funzioni continue in D è una funzione continua nei punti di D che non annullano il denominatore.
La composizione di funzioni continue $g: D \to E$ e $f: E \to F$ è una funzione continua in D.
L'inversa di una funzione continua (invertibile) $f: D \to E$ è una funzione continua in $f(D)$.

● Tipi di discontinuità

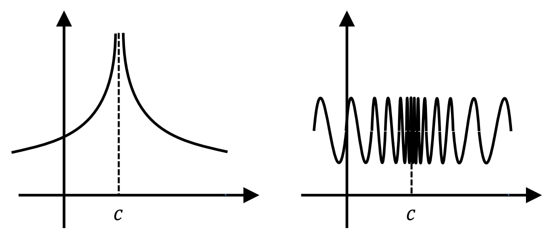
Una funzione si dice <u>discontinua di I specie</u> in un punto c se:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l_1 \neq l_2 = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

La quantità $l_2 - l_1$ di dice salto della funzione.



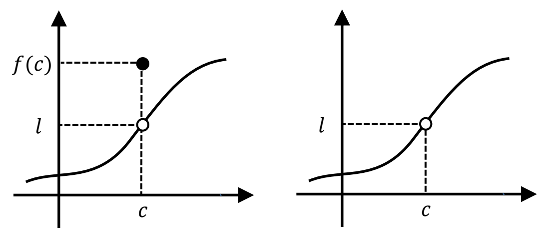
Una funzione si dice <u>discontinua di II specie</u> in un punto c se (almeno uno tra) il limite destro o il limite sinistro non esistono o sono infiniti.



Una funzione si dice <u>discontinua di III specie</u> in un punto c se:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

ma $f(c) \neq l$ oppure $c \notin D(f)$.



● Studio della continuità di una funzione

Data una funzione $y = f(x)$:

- ● Se $c \notin D(f)$, allora la funzione è sicuramente discontinua in c.
- ■ Se $c \in D(f)$ è un punto di raccordo, allora la funzione è continua in c se e solo se:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

- ♠ Se $c \in D(f)$ è un punto di frontiera, ovvero se la funzione è definita solo in un intorno sinistro (risp. destro) di c, allora la funzione è continua da sinistra (risp. da destra) se

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c) \qquad \left(\text{risp. } \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)\right)$$

- ♥ In tutti gli altri punti appartenenti al dominio, se la funzione è somma, prodotto, quoziente o composizione di funzioni continue, allora la funzione è continua.

E' possibile dedurre il tipo di discontinuità che la funzione presenta in un punto c di discontinuità a partire dal calcolo del limite sinistro e destro di $f(x)$ per x tendente a c.