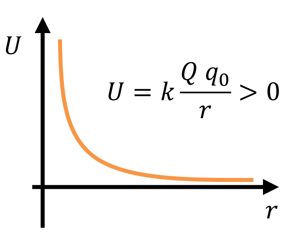
IL POTENZIALE ELETTRICO

Annotazioni

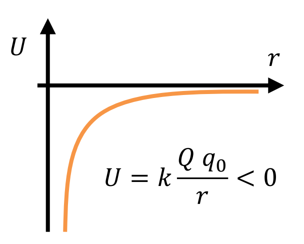
- Essendo la forza di Coulomb una forza centrale, allora è una forza conservativa (si ricorda che una forza si dice conservativa se il lavoro che compie su un corpo che si sposta da A a B non dipende dalla particolare traiettoria seguita, o equivalentemente: il lavoro che compie lungo un circuito chiuso è nullo). Come a tutte le forze conservative, ad essa è associata un'energia potenziale.

- **Energia potenziale elettrica (Def)**
  L'energia potenziale elettrica Udi una carica puntiforme q_0 dipende dal sistema di cariche con cui interagisce.
  - Se la carica è posta a distanza infinita dalle altre cariche, allora si pone
  $$U = 0$$
  - Se la carica è posta a distanza r da una carica Q, allora si pone
  $$U = k\frac{Q\,q_0}{r}$$
  - Se la carica è posta a distanza r_1 da una carica Q_1, a distanza r_2 da una carica Q_2, … a distanza r_N da una carica Q_N, allora si pone
  $$U = k\frac{Q_1\,q_0}{r_1} + k\frac{Q_2\,q_0}{r_2} + \cdots + k\frac{Q_N\,q_0}{r_N}$$

  Nota Bene
  - Come sempre, l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva. Ciò vuol dire che nella definizione è possibile aggiungere una costante c arbitraria: l'energia potenziale non ha quindi un valore assoluto, ma dipende dalla scelta di un «sistema di riferimento». Come conseguenza, l'energia della carica non sarà necessariamente nulla a distanza infinita (qui avrà valore pari a c); lo potrà essere invece in un punto arbitrario dello spazio. Ad ogni modo quello che spesso interesserà sarà la differenza di energia potenziale ΔU tra due punti dello spazio, che non dipende dalla costante c.
  - L'energia potenziale di una carica q_0 a distanza r da una carica Q è inversamente proporzionale ad r (a differenza della forza di Coulomb, che è inversamente proporzionale al quadrato di r). Attenzione al segno:

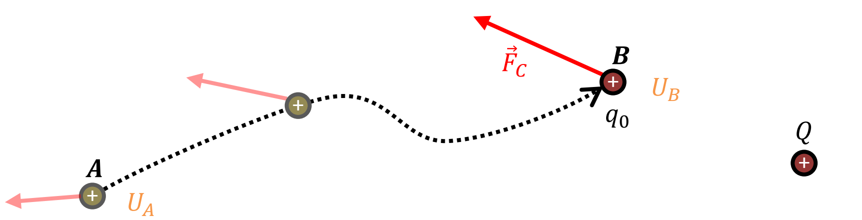


Q e q_0 concordi



Q e q_0 discordi

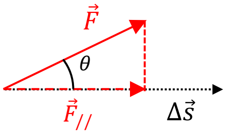
- **Teorema dell'energia potenziale elettrica**
  Il lavoro che la forza di Coulomb svolge su una carica q_0 che si sposta da un punto A ad un punto B lungo una qualunque traiettoria è pari a:
  $$L_{AB}(\vec{F}_C) = -\Delta U$$



Dimostrazione
Rimandata: è necessario l'uso degli integrali.

Nota Bene

- Si ricorda che il lavoro di una forza $\vec{F}$ che agisce su un corpo lungo uno spostamento $\Delta\vec{s}$ è definito (nel caso di forza costante e spostamento rettilineo) con il prodotto scalare:



$$L_{\Delta\vec{s}}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s} = F\cdot\Delta s\cdot\cos(\theta)$$

In particolare, se $\vec{F}$ e $\Delta\vec{s}$ sono paralleli e concordi, il lavoro è positivo.

- L'energia potenziale di una carica puntiforme q_0 in un punto P è pari all'opposto del lavoro svolto dalla forza di Coulomb su q_0 lungo lo spostamento di q_0 da distanza infinita alla sua posizione P:

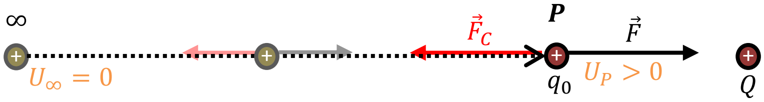
$$U_P = -L_{\infty P}(\vec{F}_C)$$

Infatti: $L_{\infty P}(\vec{F}_C) = -\Delta U = U_\infty - U_P = 0 - U_P = -U_P$

L'energia potenziale di una carica puntiforme q_0 in un punto P è pari al lavoro svolto da una forza esterna $\vec{F}$ (che si oppone alla forza di Coulomb) per portare la carica puntiforme da distanza infinita alla sua posizione P:

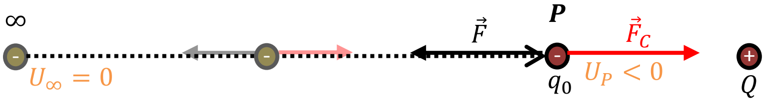
$$U_P = L_{\infty P}(\vec{F})$$

Infatti, essendo $\vec{F}$ opposta a $\vec{F}_C$, il suo lavoro sarà opposto a quello di $\vec{F}_C$.



$U_P > 0$
$L_{\infty P}(\vec{F}_C) < 0$
$L_{\infty P}(\vec{F}) > 0$

Cariche dello stesso segno: per portare q_0 in P è necessaria una forza esterna che compie un lavoro positivo ($\vec{F}$ e spostamento sono concordi) pari a U_P.



$U_P < 0$
$L_{\infty P}(\vec{F}_C) > 0$
$L_{\infty P}(\vec{F}) < 0$

Cariche di segno opposto: q_0 si sposta in P col solo effetto di $\vec{F}_C$ (moto libero), che compie un lavoro positivo ($\vec{F}_C$ e spostamento sono concordi) pari a $|U_P|$.

- **Teorema della conservazione dell'energia meccanica**

Se su un corpo che si sposta da un punto A ad un punto B agiscono solo forze conservative, detta K l'energia cinetica del corpo e U l'energia potenziale totale del corpo (gravitazionale, elastica ed elettrica), allora:

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

Se agiscono anche forze non conservative, detto L_{NC} il lavoro svolto dalle forze non conservative sul corpo dal punto A al punto B, allora:

$$U_A + K_A + L_{NC} = U_B + K_B$$

Dimostrazione

Consideriamo un corpo che, sotto l'effetto sia di forze conservative che non conservative, si sposta da A a B lungo una certa traiettoria.

Per il teorema dell'energia potenziale, il lavoro effettuato dalle forze conservative è pari a:

$$L_C = -\Delta U \qquad (1)$$

Per il teorema dell'energia cinetica, il lavoro effettuato dalle forze (conservative e non) è pari a:

$$L = \Delta K$$
$$L_C + L_{NC} = \Delta K \qquad (2)$$

Sostituendo (1) in (2) si ottiene:

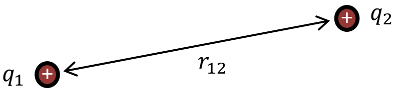
$$-\Delta U + L_{NC} = \Delta K$$
$$U_A - U_B + L_{NC} = K_B - K_A$$
$$U_A + K_A + L_{NC} = U_B + K_B$$

Nel caso agiscano solo forze conservative $L_{NC} = 0$, quindi:

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

- **Energia potenziale elettrica di un sistema di cariche (Def)**
  L'energia potenziale elettrica di un sistema di due cariche q_1 e q_2 a distanza r_{12} è data da:

$$U_{12} = k\frac{q_1\, q_2}{r_{12}}$$

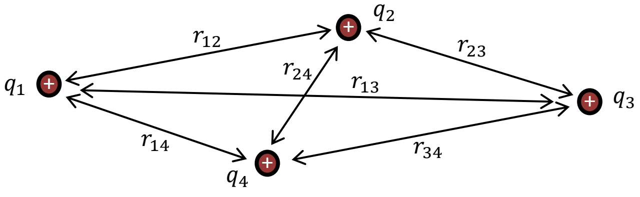


L'energia potenziale elettrica di un sistema di *n* cariche $q_1, q_2, \dots q_n$ è data dalla somma dell'energia potenziale elettrica di ogni possibile coppia di cariche che appartengono al sistema, ovvero:

se *n=3* $$U_{sist} = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

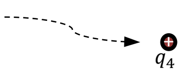
se *n=4* $$U_{sist} = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$$

caso gen. $$U_{sist} = U_{12} + U_{13} + \cdots + U_{1n} + U_{23} + U_{24} + \cdots + U_{2n} + \cdots$$

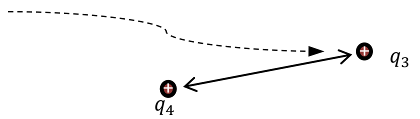


Nota Bene

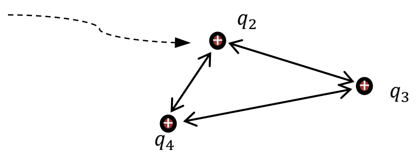
- L'energia potenziale di un sistema è pari al lavoro compiuto da una forza esterna per assemblare il sistema contro la forza di Coulomb (ovvero, al lavoro compiuto dalla forza esterna per portare ciascuna carica da distanza infinita alla propria posizione).
  Supponiamo di assemblare il sistema spostando le cariche in ordine da q_4 a q_1. Il lavoro svolto dalla forza esterna per portare la carica da distanza infinita alla posizione finale è pari all'energia potenziale che possiede la carica nella posizione finale, quindi:



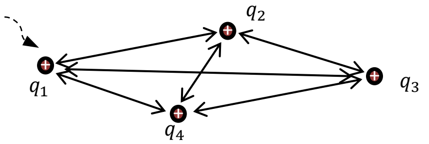
$$L_{\infty P4}(\vec{F}) = U_4 = 0$$



$$L_{\infty P3}(\vec{F}) = U_3 = U_{34}$$



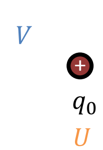
$$L_{\infty P2}(\vec{F}) = U_2 = U_{23} + U_{24}$$



$$L_{\infty P1}(\vec{F}) = U_1 = U_{12} + U_{13} + U_{14}$$

$$L_{TOT}(\vec{F}) = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34} = U_{sist}$$

- **Potenziale elettrico (Def)**
  Il potenziale elettrico V in un punto P dello spazio è il rapporto tra l'energia potenziale elettrica di una carica di prova positiva q_0 posizionata in P e la carica di prova stessa. In simboli:



$$V = \frac{U}{q_0}$$

L'unità di misura del potenziale elettrico è il Volt: $[V] = \frac{J}{C} = V$

Nota Bene

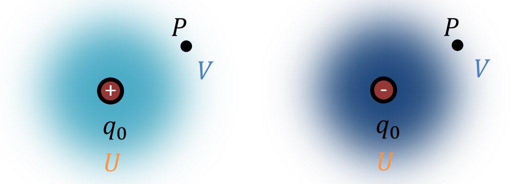
- Il potenziale elettrico non dipende dalla carica di prova q_0 scelta, ma solo dalle caratteristiche della distribuzione di cariche che determina l'energia potenziale elettrica di q_0. Si ammette che il potenziale elettrico esista nel punto P anche senza la presenza di alcuna carica di prova.

- Il potenziale elettrico è uguale all'energia potenziale elettrica di una carica unitaria nel punto P, ovvero è uguale al lavoro necessario per portare una carica unitaria da distanza infinita al punto P.

- **Potenziale elettrico generato da una carica puntiforme**

  Il potenziale elettrico generato da una carica puntiforme Q in un punto P dello spazio a distanza r dalla carica è pari a:

$$V = k\,\frac{Q}{r}$$



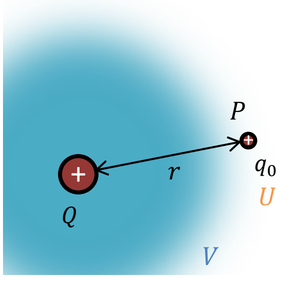
Dimostrazione

Consideriamo una carica di prova positiva q_0 posta in un punto P a distanza r da una carica puntiforme Q. La carica di prova possiede allora un'energia potenziale elettrica:

$$U = k\,\frac{Q\,q_0}{r}$$

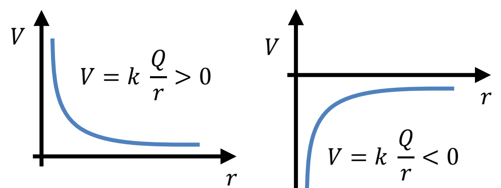
Per definizione, il potenziale elettrico in P è quindi pari a:

$$V = \frac{U}{q_0} = k\,\frac{Q\,q_0}{r} \cdot \frac{1}{q_0} = k\,\frac{Q}{r}$$



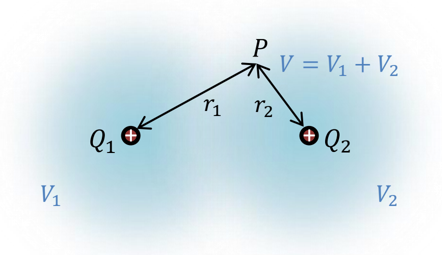
Nota Bene

- Il potenziale elettrico è inversamente proporzionale alla distanza dalla carica elettrica puntiforme che lo genera. E' positivo se la carica è positiva, negativo se la carica è negativa.



Q positiva $\qquad$ Q negativa

- (Principio di sovrapposizione) Il potenziale elettrico totale generato da più cariche in un punto P è la somma algebrica dei potenziali elettrici generati da ciascuna di esse in P, indipendentemente dalle altre.



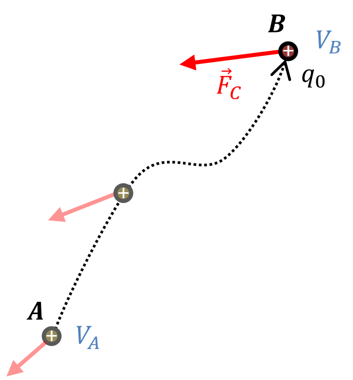
- **Differenza di potenziale**

  La differenza di potenziale (o tensione) tra due punti A e B dello spazio è pari a:

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{U_B}{q_0} - \frac{U_A}{q_0} = \frac{\Delta U}{q_0}$$

Se si considera una carica di prova positiva q_0 che si sposta da A a B lungo una qualunque traiettoria e il lavoro $L_{AB}(\vec{F}_C)$ che la forza di Coulomb svolge su di essa, per il teorema dell'energia potenziale elettrica vale anche che:

$$\Delta V = -\frac{L_{AB}(\vec{F}_C)}{q_0}$$



- **Carica in moto libero**

Se una carica q_0 è in moto libero (cioè si muove soggetta alla sola Forza di Coulomb) e si sposta da A a B:

1. Il lavoro svolto dalla Forza di Coulomb su di essa è sempre positivo
$$L_{AB}(\vec{F}_C) > 0$$
2. La propria energia potenziale elettrica diminuisce (e aumenta la cinetica)
$$U_B < U_A$$
3. Se q_0 è positiva, si sposta da punti a maggior potenziale verso punti a minor potenziale
$$V_B < V_A \quad \text{(se } q_0 \text{ è positiva)}$$
Se q_0 è negativa, si sposta da punti a minor potenziale verso punti a maggior potenziale
$$V_B > V_A \quad \text{(se } q_0 \text{ è negativa)}$$

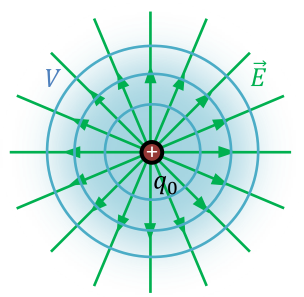
Dimostrazione

1. Se la carica è in moto libero, allora il suo spostamento sarà sempre concorde alla forza di Coulomb, quindi per definizione il lavoro è positivo.
2. Per il punto precedente si ha che $L_{AB}(\vec{F}_C) > 0$, ma per il teorema dell'energia potenziale elettrica $L_{AB}(\vec{F}_C) = -\Delta U$, quindi
$$L_{AB}(\vec{F}_C) > 0 \quad \Longrightarrow \quad -\Delta U > 0 \quad \Longrightarrow \quad U_A - U_B > 0 \quad \Longrightarrow \quad U_B < U_A$$
Per la conservazione dell'energia, se l'energia potenziale diminuisce, aumenta la cinetica.
3. Per il punto precedente si ha che $\Delta U < 0$, quindi
$$\text{Se } q_0 > 0: \quad \Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} < 0 \quad \Longrightarrow \quad V_B - V_A < 0 \quad \Longrightarrow \quad V_B < V_A$$
$$\text{Se } q_0 < 0: \quad \Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} > 0 \quad \Longrightarrow \quad V_B - V_A > 0 \quad \Longrightarrow \quad V_B > V_A$$

- **Superfici equipotenziali**

Una *superficie equipotenziale* è il luogo dei punti dello spazio in cui il potenziale assume lo stesso valore.

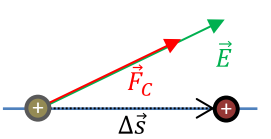
Nota Bene



- Le superfici potenziali generate da una carica puntiforme sono circonferenze.
- La differenza di potenziale tra due punti che appartengono alla stessa superficie equipotenziale è zero.
- Le linee di campo sono sempre perpendicolari alle superfici equipotenziali.

Dimostrazione

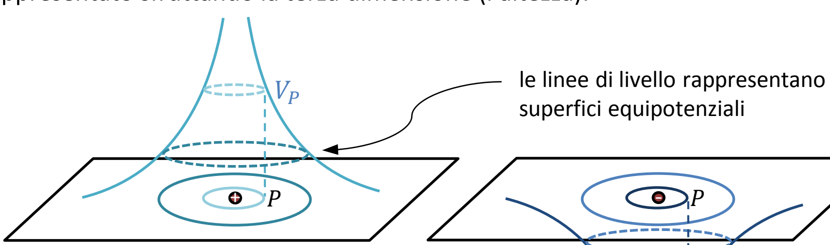
Se per assurdo il campo non fosse perpendicolare alla superficie, la forza di Coulomb compirebbe un lavoro non nullo su una carica che si sposta lungo la superficie. Quindi si avrebbe:

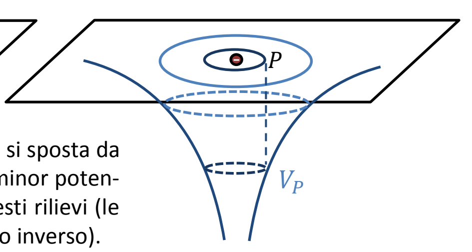


$$L_{AB}(\vec{F}_C) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta V = -\frac{L_{AB}(\vec{F}_C)}{q_0} \neq 0$$

Ma ciò è assurdo, perché tra due punti di una superficie equipotenziale $\Delta V = 0$.

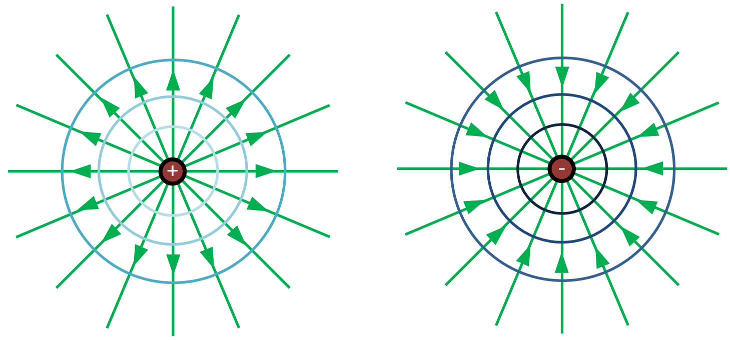
- Il potenziale elettrico, nel caso di una distribuzione di cariche su un piano, può essere rappresentato sfruttando la terza dimensione (l'altezza):





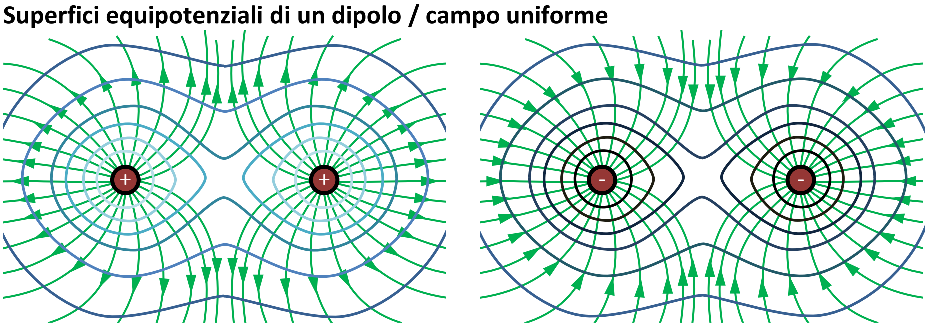
Una carica di prova positiva in moto libero si sposta da punti a maggior potenziale verso punti a minor potenziale, quindi è come se «rotolasse» su questi rilievi (le cariche negative seguono invece il percorso inverso).

Superfici equipotenziali di una carica puntiforme

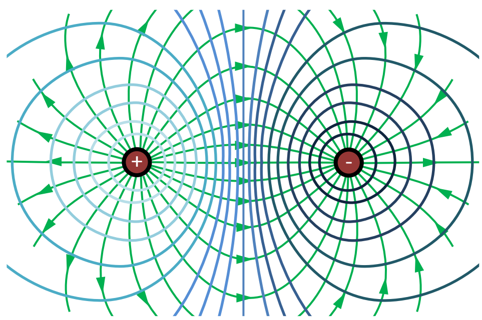


carica positiva — carica negativa

Superfici equipotenziali di un dipolo / campo uniforme



cariche positive — cariche negative

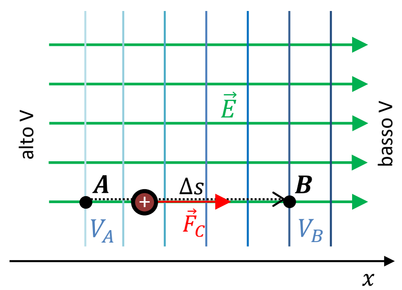


cariche di segno opposto

- **Relazione tra campo e potenziale**

  Le superfici equipotenziali di un campo uniforme E sono piani perpendicolari alle linee di campo e, considerato un cammino Δs parallelo alle linee di campo, si ha che:

$$\Delta V = -E \cdot \Delta s$$



Dimostrazione

Le superfici equipotenziali sono sempre perpendicolari alle linee di campo, quindi in questo caso hanno la forma di piani perpendicolari alle linee di campo.

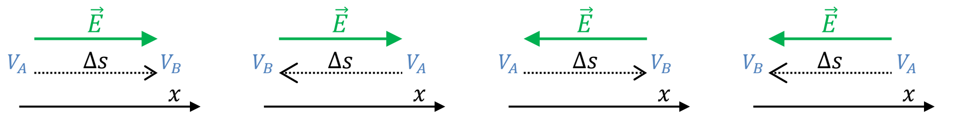
Se consideriamo una carica di prova positiva q_0 che si sposta su un cammino Δs (da A a B) parallelo alle linee di campo, si ha che:

$$\Delta V = -\frac{L_{AB}(\vec{F}_C)}{q_0} \overset{(1)}{=} -\frac{F_C \cdot \Delta s}{q_0} = -\frac{E \cdot q_0 \cdot \Delta s}{q_0} = -E \cdot \Delta s$$

(1) Per ipotesi $\vec{F}_C$ è parallela a $\Delta\vec{s}$, quindi il lavoro di $\vec{F}_C$ su q_0 lungo $\Delta\vec{s}$ è dato dal semplice prodotto tra F_C e Δs (com'è giusto che sia, il lavoro sarebbe negativo se $\vec{F}_C$ e $\Delta\vec{s}$ fossero discordi, perché uno tra F_C e Δs sarebbe orientato nel verso opposto dell'asse x, e quindi avrebbe segno negativo).

Nota Bene

- Spostandosi in direzione del campo elettrico, il potenziale decresce.



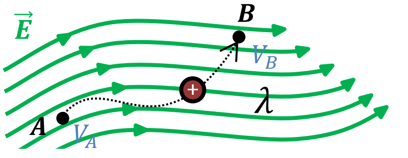
$\Delta V = -\underset{+}{E} \cdot \underset{+}{\Delta s} < 0$ $\quad$ $\Delta V = -\underset{+}{E} \cdot \underset{-}{\Delta s} > 0$ $\quad$ $\Delta V = -\underset{-}{E} \cdot \underset{+}{\Delta s} > 0$ $\quad$ $\Delta V = -\underset{-}{E} \cdot \underset{-}{\Delta s} < 0$

- La relazione si generalizza anche al caso di campi non uniformi e cammini qualunque.

  Si suddivida il cammino in *N* tratti $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_i, \dots \lambda_N$ abbastanza piccoli e tali che:
  - ciascun tratto λ_i possa essere considerato rettilineo;
  - il campo $\vec{E}_i$ che attraversa ciascun tratto λ_i possa essere considerato uniforme.

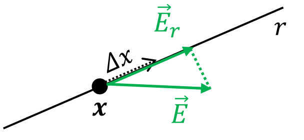
  Allora vale che:

$$\Delta V = -\sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \cdot \vec{\lambda}_i$$



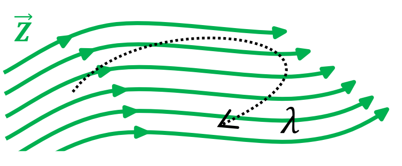
- Si consideri una retta r e un sistema di riferimento su di essa. Siano $E_r(x)$ e $V(x)$ rispettivamente l'intensità della componente del campo elettrico parallela alla retta e il potenziale sui punti della retta. Allora il campo elettrico è la derivata del potenziale rispetto allo spazio:

$$E_r(x) = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{dV}{dx}$$



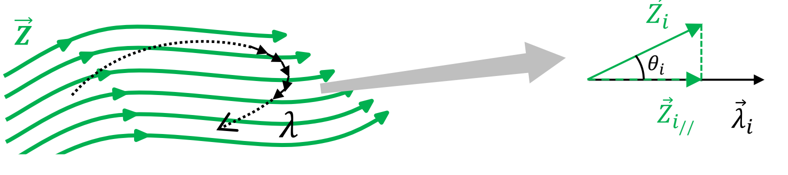
- **Circuitazione di un campo vettoriale lungo una curva orientata (Def)**

  Si consideri un campo vettoriale $\vec{Z}$ che attraversa una curva orientata γ.



Si suddivida la curva in *N* tratti $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_i, \dots \lambda_N$ abbastanza piccoli e tali che:

- ciascun tratto λ_i possa essere considerato rettilineo;
- il campo $\vec{Z}_i$ che attraversa ciascun tratto λ_i possa essere considerato uniforme.



La *circuitazione del campo* $\vec{Z}$ *lungo la curva* λ è data dalla somma delle circuitazioni calcolate lungo questi tratti:

$$\Gamma_\lambda(\vec{Z}) = \Gamma_{\lambda_1}(\vec{Z}_1) + \Gamma_{\lambda_2}(\vec{Z}_2) + \dots + \Gamma_{\lambda_N}(\vec{Z}_N) = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_{\lambda_i}(\vec{Z}_i)$$

La circuitazione lungo il generico tratto λ_i a sua volta è dato dal prodotto scalare tra il campo $\vec{Z}_i$ che lo attraversa e il vettore $\vec{\lambda}_i$ (ha verso deciso dall'orientamento della superficie e intensità pari alla lunghezza del tratto λ_i):

$$\Gamma_{\lambda_i}(\vec{Z}_i) = \vec{Z}_i \cdot \vec{\lambda}_i = Z_i \cdot \lambda_i \cdot \cos(\theta_i)$$

L'unità di misura della circuitazione è: $[\Gamma_\lambda(\vec{Z})] = [Z] \cdot m$.

Nel caso in cui il campo vettoriale sia il campo elettrico: $[\Gamma_\lambda(\vec{E})] = \frac{N}{C} \cdot m$.

Nota Bene

- Come sempre, il prodotto scalare dipende dal coseno dell'angolo θ_i formato dai due vettori. E' allora facile ricavare che:
  - La circuitazione è massima in positivo se $\theta_i = 0°$ ($\vec{Z}_i$ e $\vec{\lambda}_i$ paralleli e concordi)
  - La circuitazione è positiva se $0° \leq \theta_i < 90°$
  - La circuitazione è nulla se $\theta_i = 90°$ ($\vec{Z}_i$ e $\vec{\lambda}_i$ paralleli e concordi)
  - La circuitazione è negativa se $90° < \theta \leq 180°$
  - La circuitazione è massimo in negativa se $\theta_i = 180°$ ($\vec{Z}_i$ e $\vec{\lambda}_i$ paralleli e discordi)
- Siccome la quantità $Z_i \cdot \cos(\theta_i)$ rappresenta l'intensità di $\vec{Z}_{i_{//}}$ (proiezione di $\vec{Z}_i$ su $\vec{\lambda}_i$), si può anche dire che la circuitazione di un campo vettoriale lungo una traiettoria (purché piana e con campo uniforme) è il prodotto tra l'intensità della componente del campo parallela alla traiettoria e la lunghezza della traiettoria stessa (il segno va scelto in base all'orientamento della traiettoria):

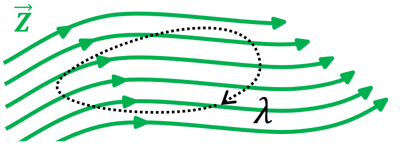
$$\Gamma_{\lambda_i}(\vec{Z}_i) = (\pm)\, Z_{i_{//}} \cdot \lambda_i$$

- La definizione di circuitazione ricorda da vicino quella di lavoro.

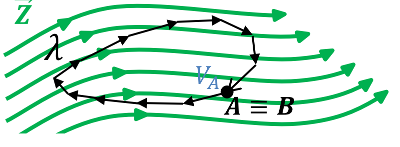
- **Teorema della circuitazione**

La circuitazione del campo elettrico lungo una qualsiasi curva chiusa λ è nullo:

$$\Gamma_\lambda(\vec{E}) = 0$$



Dimostrazione



Si suddivida λ in *N* elementi tratti $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_i, \dots \lambda_n$ abbastanza piccoli e tali che:

- ciascun tratto λ_i possa essere considerato rettilineo;
- il campo $\vec{E}_i$ che attraversa ciascun tratto λ_i possa essere considerato uniforme.

Per definizione la circuitazione lungo λ è la somma delle circuitazioni lungo questi tratti:

$$\Gamma_\lambda(\vec{E}) = \Gamma_{\lambda_1}(\vec{E}_1) + \Gamma_{\lambda_2}(\vec{E}_2) + \dots + \Gamma_{\lambda_N}(\vec{E}_N) =$$

$$= \vec{E}_1 \cdot \vec{\lambda}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{\lambda}_2 + \dots + \vec{E}_N \cdot \vec{\lambda}_N =$$

$$\Delta V = -\sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \cdot \vec{\lambda}_i$$

$$= -\Delta V =$$

Il punto di partenza e il punto di arrivo della curva coincidono ($A \equiv B$), dunque $V_A = V_B$.

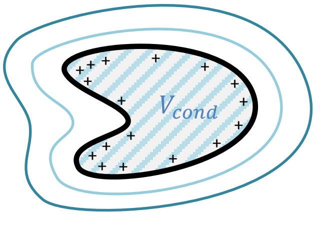
$$= 0$$

Nota Bene

- Questo risultato deriva dal fatto che la Forza di Coulomb è conservativa.
- Il teorema ricorda una proprietà delle forze conservative: *«Il lavoro svolto da una forza conservativa su un corpo che si sposta lungo una qualsiasi curva chiusa è nullo»*. Qui al posto del lavoro si trova la circuitazione, e al posto della forza si trova il campo elettrico.
- Questo risultato è valido solo per i campi elettro*statici*, cioè solo per i campi generati da cariche in quiete rispetto al sistema di riferimento considerato.

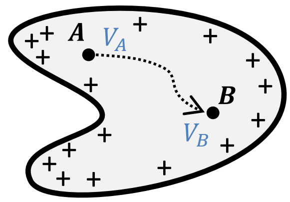
- **Conduttori e potenziale elettrico**

Si consideri un conduttore elettrico isolato in equilibrio elettrostatico: all'interno del conduttore il potenziale elettrico è costante (in altre parole, il conduttore è una superficie equipotenziale).



Dimostrazione

Basta dimostrare che la differenza di potenziale tra due qualunque punti A e B all'interno del conduttore è 0:



$$\Delta V = -\frac{L_{AB}(\vec{F}_C)}{q_0} \overset{(1)}{=} 0$$

(1) Il lavoro svolto dalla Forza di Coulomb da A a B è nullo, perché all'interno del conduttore il campo è nullo (e quindi anche la Forza di Coulomb è nulla).

- **Potenziale generato da un conduttore sferico carico**

  Si consideri un conduttore sferico (o un guscio sferico carico uniformemente) di raggio R_0 e carica totale Q. Allora:

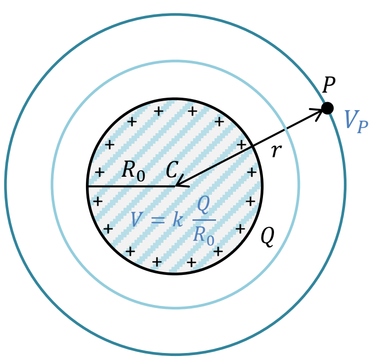
  - All'interno della sfera il potenziale è costante ed è pari a:

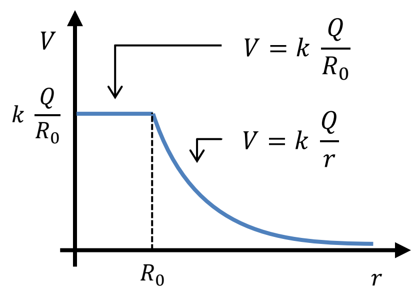
  $$V = k\,\frac{Q}{R_0}$$

  - All'esterno della sfera il potenziale in un punto P dello spazio a distanza r dal centro C della sfera è pari a:

  $$V = k\,\frac{Q}{r}$$

  (in altre parole, all'esterno il campo è uguale a quello che genererebbe una carica puntiforme Q posta al centro della sfera).





Dimostrazione

Una sfera carica genera un campo elettrico uguale a quello di una carica puntiforme Q posta al centro della sfera. Quindi anche il potenziale generato da una sfera carica dovrà essere uguale a quello generato da una carica puntiforme Q posta al centro della sfera.

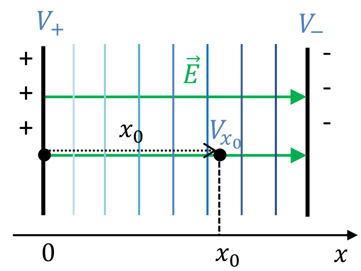
Il potenziale sulla superficie (e quindi anche quello all'interno) sarà quindi

$$V = k\,\frac{Q}{R_0}$$

- **Potenziale generato da un condensatore ad armature piane**

  Si consideri un condensatore piano formato da due lamine a distanza d, sia E l'intensità del campo tra di esse e siano V_+ e V_- il potenziale delle due lamine. Allora, fissato un opportuno sistema di riferimento avente origine sulla lamina +, il potenziale V_{x_0} in un generico punto x_0 è pari a:

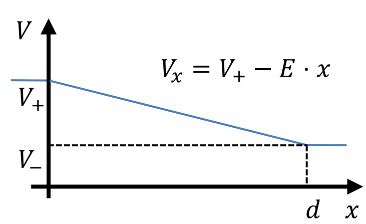
  $$V_{x_0} = V_+ - E \cdot x_0$$



Dimostrazione

Basta osservare che la differenza di potenziale tra un punto sulla lamina + (potenziale V_+) e un punto in posizione x_0 (potenziale V_{x_0}) è pari a:

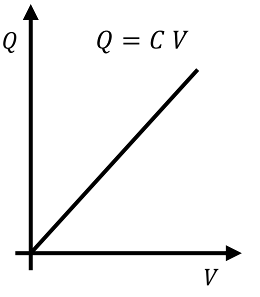
$$\Delta V = -E \cdot \Delta s = -E \cdot x_0$$



LA CAPACITÀ

Annotazioni

- **Capacità di un conduttore (Def)**
  Dato un conduttore isolato, si può verificare sperimentalmente che la carica netta Q presente su di esso è direttamente proporzionale al suo potenziale V:



$$Q = C\ V$$

  La costante di proporzionalità C si dice *capacità* del conduttore.
  L'unità di misura della capacità è il Farad: $[C] = \frac{C}{V} = F$

- **Capacità di un conduttore sferico carico**
  Si consideri un conduttore sferico (o un guscio sferico carico uniformemente) di raggio R_0 e carica totale Q. Allora la sua capacità è pari a

$$C = 4\ \pi\ \varepsilon\ R_0$$

  Dimostrazione
  Per un conduttore sferico carico vale che:

$$V = k\ \frac{Q}{R_0} \quad \Longrightarrow \quad Q = \frac{R_0}{k}\ V \quad \Longrightarrow \quad Q = 4\ \pi\ \varepsilon\ R_0\ V$$

  e quindi la costante di proporzionalità tra Q e V è $C = 4\ \pi\ \varepsilon\ R_0$.

- **Capacità di un condensatore ad armature piane (Def)**
  Dato un condensatore ad armature piane, si può verificare sperimentalmente che la carica netta Q presente (in valore assoluto) su ciascuna armatura è direttamente proporzionale alla differenza di potenziale ΔV presente tra le sue armature:

$$Q = C\ \Delta V$$

  La costante di proporzionalità C si dice *capacità del condensatore*.
  L'unità di misura della capacità è il Farad: $[C] = \frac{C}{V} = F$

- **Capacità di un condensatore ad armature piane**
  Si consideri un condensatore ad armature piane avente armature di area A e poste ad una distanza d. Allora la sua capacità è pari a

$$C = \varepsilon\ \frac{A}{d}$$

  Dimostrazione
  Per un condensatore ad armature piane vale (le seguenti relazioni sono scritte in valore assoluto):

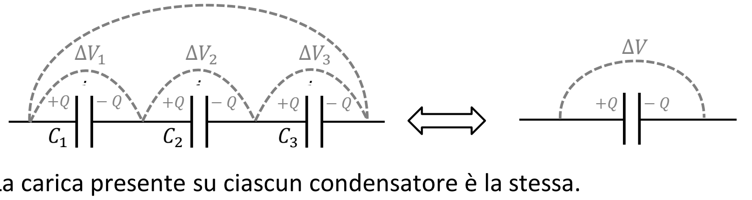
$$\Delta V = E \cdot \mathrm{d} \quad \Longrightarrow \quad \Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot d \quad \Longrightarrow \quad \Delta V = \frac{Q}{A\ \varepsilon} \cdot d \quad \Longrightarrow \quad Q = \varepsilon\ \frac{A}{d}\ \Delta V$$

  e quindi la costante di proporzionalità tra Q e ΔV è $C = \varepsilon\ \frac{A}{d}$.

  Nota Bene
  - La capacità di un conduttore sferico o di un condensatore ad armature piane dipende solo dalla geometria del conduttore (e dal dielettrico in cui si trovano).

- **Condensatori in serie**
  La capacità equivalente di più condensatori posti in serie è tale che:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots$$



$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1}$$

  La carica presente su ciascun condensatore è la stessa.

Dimostrazione
Dimostriamolo nel caso di 3 condensatori in serie. Caricando un'armatura con carica $+Q$, le cariche presenti nel tratto di filo successivo (tra il primo e il secondo condensatore) si ridistribuiscono: una carica $-Q$ si affaccia sull'armatura del primo condensatore di fronte a quella caricata, e la carica in eccesso $+Q$ si allontana andando a distribuirsi sull'armatura del secondo condensatore. A catena, il procedimento si ripete caricando tutti i condensatori. Dalla definizione di capacità discende che:

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2} \qquad \Delta V_3 = \frac{Q}{C_3}$$

da cui:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) \cdot Q$$

ovvero:

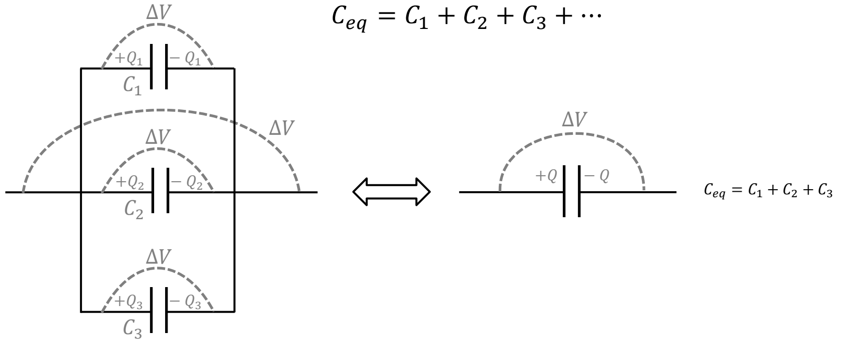
$$Q = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1} \cdot \Delta V$$

Per concludere, basta notare che ponendo $C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1}$ si ottiene $Q = C_{eq} \cdot \Delta V$.

- **Condensatori in parallelo**

  La capacità equivalente di più condensatori posti in parallelo è:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots$$



La differenza di potenziale tra le armature di ciascun condensatore è la stessa.

Dimostrazione
Dimostriamolo nel caso di 3 condensatori in parallelo. La differenza di potenziale tra le lamine di ciascun condensatore è la stessa perché tutti i punti sulle lamine a sinistra hanno lo stesso potenziale (sono collegati, quindi parte di uno stesso conduttore) e tutti i punti sulle lamine a destra hanno lo stesso potenziale (per lo stesso motivo). Dalla definizione di capacità discende che:

$$Q_1 = C_1 \cdot \Delta V \qquad Q_2 = C_2 \cdot \Delta V \qquad Q_3 = C_3 \cdot \Delta V$$

da cui, detta Q la carica complessiva che si affaccia sulle lamine a sinistra:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1 \cdot \Delta V + C_2 \cdot \Delta V + C_3 \cdot \Delta V = (C_1 + C_2 + C_3) \cdot \Delta V$$

Per concludere, basta notare che ponendo $C_{eq} = (C_1 + C_2 + C_3)$ si ottiene $Q = C_{eq} \cdot \Delta V$.

Nota Bene

- Nel caso di condensatori in serie, il condensatore che ha differenza di potenziale maggiore è quello con capacità maggiore.
- Nel caso di condensatori in parallelo, il condensatore che ha carica maggiore è quello con capacità maggiore.

ALTRO SUL POTENZIALE ELETTRICO

Annotazioni

- **Energia immagazzinata da un condensatore ad armature piane (Def)**
  L'*energia potenziale elettrica immagazzinata da un condensatore* ad armature piane è l'energia potenziale elettrica del sistema di cariche presenti sul condensatore.

  Nota Bene
  - L'energia potenziale elettrica immagazzinata da un condensatore è pari al lavoro compiuto da una forza esterna per assemblare il sistema di cariche presenti sul condensatore contro la forza di Coulomb.

- **Energia immagazzinata da un condensatore ad armature piane**
  L'energia potenziale elettrica immagazzinata da un condensatore ad armature piane con carica netta Q presente (in valore assoluto) su ciascuna armatura e differenza di potenziale ΔV tra le sue armature è:

$$U = \frac{1}{2}\, Q\, \Delta V$$

Dimostrazione

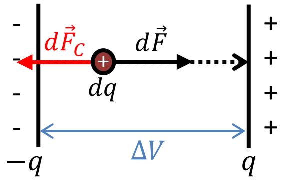
L'energia immagazzinata dal condensatore è pari al lavoro compiuto da una forza esterna per assemblare il sistema di cariche sul condensatore. A sua volta, il lavoro compiuto da una forza esterna $\vec{F}$ per assemblare il sistema di cariche sul condensatore è pari all'opposto del lavoro compiuto dalla forza di Columb $\vec{F}_C$ durante questo assemblaggio.

$$U = L(\vec{F}) = -L(\vec{F}_C)$$

In generale, il lavoro che la forza di Coulomb compie su una carica q lungo uno spostamento tra due punti A e B tra i quali è presente differenza di potenziale ΔV è pari a:

$$L(\vec{F}_C) = -\Delta V \cdot q$$

La forza di Coulomb è conservativa, cioè il lavoro da essa compiuto non dipende dalla particolare traiettoria seguita dalle cariche che si spostano. Allora, nel calcolare $L(\vec{F}_C)$, possiamo considerare una qualunque modalità di assemblaggio del condensatore: scegliamo di prelevare di volta in volta elementi di carica dq dalla prima lamina del condensatore (inizialmente neutro) e di trasportarla sulla seconda lamina, finchè la carica netta sulla prima lamina sarà $-Q$ e sulla seconda $+Q$.



Il lavoro svolto da $\vec{F}_C$ su ciascun elemento di carica dq sarà quindi pari a:

$$dL(\vec{F}_C) = -\Delta V \cdot dq$$

Si noti che durante il processo il valore di ΔV aumenta, perché dipende dalla carica presente sulle armature: $\Delta V = q/C$.

Integrando si ottiene il lavoro totale:

$$\mathrm{L}(\vec{F}_C) = \int_0^Q -\Delta V \cdot dq = \int_0^Q -\frac{q}{C} \cdot dq = -\frac{1}{C}\int_0^Q q \cdot dq = -\frac{1}{C}\left[\frac{q^2}{2}\right]_0^Q = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Cambiando segno e sostituendo $C = Q/\Delta V$ si ottiene:

$$L(\vec{F}_C) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 \Delta V}{Q} = \frac{1}{2} Q\, \Delta V$$

Nota Bene
- Il risultato può essere scritto nelle tre forme equivalenti:

$$U = \frac{1}{2}\, Q\, \Delta V \qquad U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad U = \frac{1}{2}\, C\, \Delta V^2$$

  che si ottengono dalla prima a partire dalla relazione $Q = C\,\Delta V$.
- Per caricare il condensatore è necessario «spendere» energia (il lavoro della forza $\vec{F}$ che sposta le cariche opponendosi alla forza di Coulomb). Scaricando il condensatore (ad es. connettendo le due armature), si «libera» quella stessa energia.

- **Densità di energia del campo elettrico (Def)**

  La *densità di energia* di un campo elettrico uniforme E è lo scalare:

$$u = \frac{1}{2}\ \varepsilon\, E^2$$

  L'unità di misura della densità di energia è: $[u] = \frac{J}{m^3}$

  Nota Bene

  - Nel caso del condensatore ad armature piane, la densità di energia esprime il rapporto tra l'energia U immagazzinata dal condensatore e il volume Vol racchiuso tra le due lamine:

$$\frac{U}{Vol} = \frac{\frac{1}{2}\ C\ \Delta V^2}{A \cdot d} = \frac{\frac{1}{2}\ \varepsilon\ \frac{A}{d}\Delta V^2}{A \cdot d} = \frac{\varepsilon\ \Delta V^2}{2\ d^2} = \frac{\varepsilon\ (-E \cdot d)^2}{2\ d^2} = \frac{1}{2}\ \varepsilon\ E^2 = u$$

  - La definizione di densità di energia nasce (come idea di rapporto tra energia e volume) dal condensatore ad armature piane, ma è usata in generale per qualunque campo elettrico uniforme. Suggerisce che se è presente un campo, allora esiste una distribuzione di cariche che lo genera e quindi un'energia ad essa associata