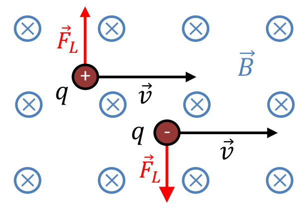
LA FORZA DI LORENTZ E IL CAMPO MAGNETICO

Annotazioni

- **Forza di Lorentz e campo magnetico (Def)**

Quando una carica q entra con velocità $\vec{v}$ in un campo magnetico $\vec{B}$ subisce una forza $\vec{F}_L$ (detta *forza di Lorentz*) definita dalla relazione:



$$\vec{F}_L = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

La forza di Lorentz ha dunque le seguenti caratteristiche:

$\vec{F}_L$:
- Direzione: perpendicolare al piano di $\vec{v}$ e $\vec{B}$
- Verso: determinato dalla regola della mano destra nel caso di cariche positive (opposto nel caso di cariche negative)
- Intensità: $F_L = q\,v\,B\sin(\theta) = q\,v_\perp\,B$

dove θ è l'angolo formato dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{B}$ e $\vec{v}_\perp$ è la componente di $\vec{v}$ perpendicolare a $\vec{B}$.
Il *campo magnetico* può essere definito a partire da $\vec{F}_L$ nel seguente modo:

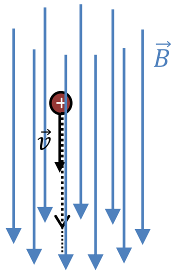
$\vec{B}$:
- Direzione: parallela alla retta lungo cui si dispone un ago magnetico
- Verso: dal polo sud al polo nord dell'ago magnetico
- Intensità: $B = \frac{F_L}{q\,v_\perp}$ dove $\vec{v}_\perp$ è la componente di $\vec{v}$ perpendicolare a $\vec{B}$

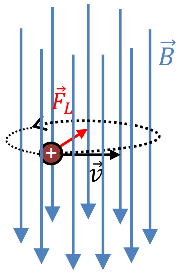
L'unità di misura del campo magnetico è il Tesla: $[B] = \frac{N}{C \cdot m/s} = T$

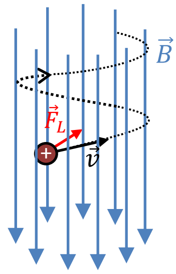
Nota Bene
- Se $q = 0$ o se $v = 0$ la forza di Lorentz è nulla.
- Se $\vec{v} \,//\, \vec{B}$ la forza di Lorentz è nulla (infatti $\sin(\theta) = 0$).
- Se $\vec{v} \perp \vec{B}$ la forza di Lorentz è massima (infatti $\sin(\theta) = 1$) e vale $F_L = q\,v\,B$.

- **Moto di una carica in un campo magnetico**

Sia q una carica che entra con velocità $\vec{v}$ in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$.
1. Se $\vec{v} \,//\, \vec{B}$ la carica prosegue con moto rettilineo uniforme.
2. Se $\vec{v} \perp \vec{B}$ la carica prosegue con moto circolare uniforme di raggio $r = \frac{mv}{qB}$.
3. Negli altri casi, la carica prosegue con moto elicoidale.







Dimostrazione
1. Se $\vec{v} \,//\, \vec{B}$ la forza di Lorentz è nulla, perciò non agiscono forze sulla carica. Per il primo principio della dinamica, il suo moto è rettilineo uniforme.
2. Se $\vec{v} \perp \vec{B}$ la forza di Lorentz è perpendicolare alla velocità, pertanto agisce come forza centripeta provocando un moto circolare uniforme. L'accelerazione centripeta è data da:

$$a_C = \frac{F_L}{m} = \frac{qvB}{m}$$

e il raggio della traiettoria si può ricavare a partire da:

$$a_C = \frac{v^2}{r} \implies r = \frac{v^2}{a_C} \implies r = \frac{v^2 m}{qvB} \implies r = \frac{mv}{qB}$$

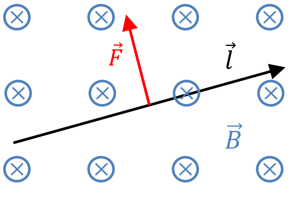
3. Negli altri casi si può scomporre il vettore $\vec{v}$ nelle sue componenti $\vec{v}_{//}$ (parallela a $\vec{B}$) e $\vec{v}_{\perp}$ (perpendicolare a $\vec{B}$). La componente parallela genera un moto rettilineo uniforme con direzione parallela a quella di $\vec{B}$. La componente perpendicolare provoca la presenza della forza di Lorentz $F_L = q\, v_{\perp}\, B$, perpendicolare anch'essa a $\vec{B}$, che causa un moto circolare uniforme di raggio $r = mv_{\perp}/qB$. La composizione dei due moti dà luogo ad un moto elicoidale.

- **Forza agente su un filo percorso da corrente**

Un filo rettilineo di lunghezza l percorso da una corrente i immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ subisce una forza

$$\vec{F} = i\, \vec{l} \times \vec{B} \qquad \text{(di intensità } F = i\, l\, B \sin\theta\text{)}$$

dove $\vec{l}$ è un vettore parallelo al filo, con verso uguale a quello della corrente, e modulo pari a l, e θ è l'angolo formato dai vettori $\vec{l}$ e $\vec{B}$.



Dimostrazione

Su ogni elettrone che si sposta all'interno del filo con velocità di deriva $\vec{v}_d$ agisce la forza di Lorentz:

$$\vec{F}_L = e\, \vec{v}_d \times \vec{B}$$

La forza $\vec{F}$ che agisce sul filo è la somma delle forze $\vec{F}_L$ che agiscono sugli N elettroni al suo interno:

$$\vec{F} = n\, \vec{F}_L = n\, e\, \vec{v}_d \times \vec{B} \overset{(1)}{=} n\, e\, \frac{\vec{l}}{\Delta t} \times \vec{B} = \frac{ne}{\Delta t}\, \vec{l} \times \vec{B} \overset{(2)}{=} i\, \vec{l} \times \vec{B}$$

(1) Supponendo che la velocità di deriva di ciascun elettrone sia costante, si può calcolarla come rapporto tra la lunghezza del filo l e il tempo Δt impiegato per percorrerlo. La relazione vale anche vettorialmente perché $\vec{v}_d$ è parallelo e concorde a $\vec{l}$.

(2) $n \cdot e$ è la carica che attraversa una sezione del filo in un intervallo di tempo Δt che ciascun elettrone impiega a percorrerlo, perciò il rapporto $ne/\Delta t$ è l'intensità di corrente nel filo.

Nota Bene

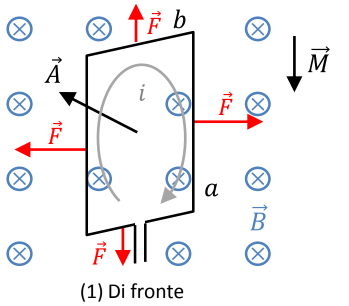
- Se $i = 0$ la forza che agisce sul filo è nulla.
- Se $\vec{l}\, //\, \vec{B}$ la forza che agisce sul filo è nulla (infatti $\sin(\theta) = 0$).
- Se $\vec{l} \perp \vec{B}$ la forza che agisce sul filo è massima (infatti $\sin(\theta) = 1$) e vale $F = i\, l\, B$.

- **Momento torcente su una spira**

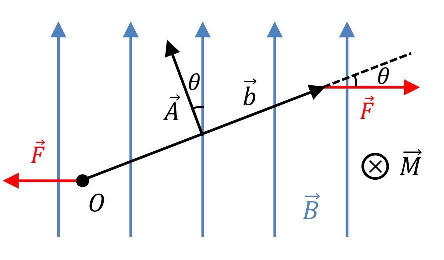
Su una spira percorsa da una corrente i immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme agisce un momento torcente pari a:

$$\vec{M} = i\, \vec{A} \times \vec{B} \qquad \text{(di intensità } M = i\, A\, B \sin\theta\text{)}$$

dove $\vec{A}$ è il vettore area della spira, avente direzione perpendicolare alla spira, verso dato dalla regola di Nerone e intensità pari all'area della spira, e θ è l'angolo formato dai vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$.



(1) Di fronte



(2) Dall'alto

Dimostrazione

(caso: spira rettangolare avente lati di lunghezza a e b, con $\vec{a}$ perpendicolare a $\vec{B}$)

Le forze che agiscono sui lati di lunghezza b della spira non sono una coppia di forze perché giacciono su una stessa retta.

Le forze che agiscono sui lati di lunghezza a della spira sono coppie di forze perché hanno stessa direzione ma agiscono su rette diverse, hanno verso opposto (si veda la regola della mano destra) e uguale intensità pari a $F = i\, a\, B$ (ricordando che $\vec{a}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari).

Scelto un centro O (vedi disegno 2), si può calcolare il momento della coppia di forze:

$$\vec{M} = \vec{b} \times \vec{F}$$

Dimostriamo l'equivalenza dei prodotti vettoriali $\vec{b} \times \vec{F}$ e $i\,\vec{A} \times \vec{B}$.

Il verso e la direzione, come si vede dal disegno 2, sono gli stessi (il motivo è che i vettori del primo prodotto vengono sostituiti nel secondo prodotto con vettori ruotati di 90°).

L'intensità è la stessa perché:

$$|\vec{b} \times \vec{F}| = b\,F\sin(\theta) \overset{(1)}{=} b\,i\,a\,B\sin(\theta) \overset{(2)}{=} i\,A\,B\sin(\theta) \overset{(3)}{=} |i\,\vec{A} \times \vec{B}|$$

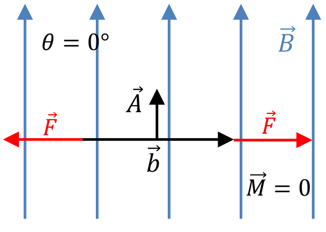
(1) $F = iaB$ perché $\vec{a}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari.

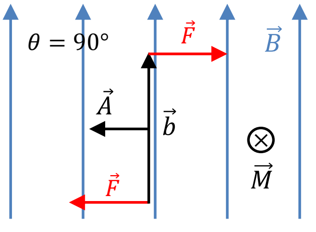
(2) Il prodotto ab è equivalente all'area A della spira.

(3) L'angolo tra $\vec{A}$ e $\vec{B}$ misura θ (vedi disegno 2).

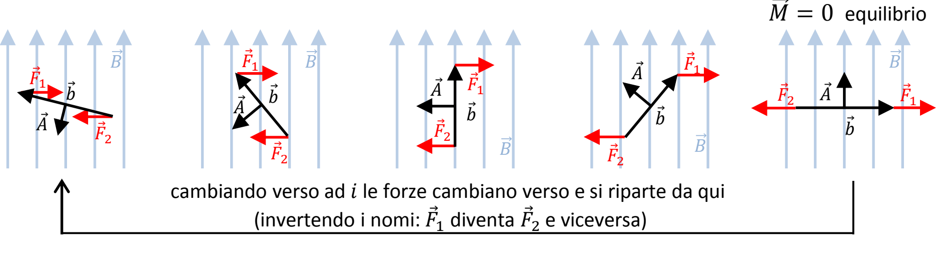
Nota Bene

- Il momento torcente delle forze che agiscono sulla spira in generale non è nullo, ma la risultante di tali forze è sempre nulla (infatti le forze che agiscono sui lati opposti della spira si annullano): $\vec{M} \neq 0$, ma $\vec{R} = 0$.
- Il risultato è valido per spire di qualsiasi forma, non solo rettangolare.
- Se $i = 0$ il momento torcente è nullo.
- Se $\vec{A} \,//\, \vec{B}$ il momento torcente è nullo (infatti $\sin(\theta) = 0$).
- Se $\vec{A} \perp \vec{B}$ il momento torcente è massimo (infatti $\sin(\theta) = 1$) e vale $M = i\,A\,B$.





- La coppia di forze tende a far ruotare la spira, ma dopo un giro di 180° questa torna in equilibrio. Per ottenere una rotazione continua, il verso della corrente va invertito ogni volta che la bobina ruota di 180° in modo che $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ cambino verso.

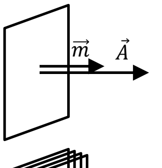


- La coppia di forze che agisce sui lati di lunghezza b non imprime rotazione alla spira.
- Per moltiplicare l'effetto del momento torcente, spesso al posto di spire si usano bobine (il filo viene avvolto su se stesso a formare più spire consecutive).
- Immergendo una bobina percorsa da corrente in un campo magnetico, si ottiene un motore elettrico.

- **Momento magnetico (Def)**

Il *momento magnetico di una spira* è

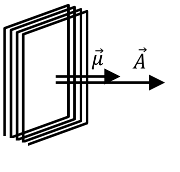
$$\vec{m} = i\,\vec{A}$$



Il momento torcente di una spira diventa allora: $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$.

Il *momento magnetico di una bobina* con N spire è

$$\vec{\mu} = N\,i\,\vec{A}$$



Il momento torcente di una bobina diventa allora: $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$.

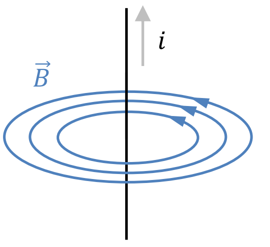
L'unità di misura del momento magnetico è $[m] = [\mu] = A \cdot m^2$.

CAMPI MAGNETICI GENERATI DA CORRENTI

Annotazioni

- **Legge di Biot-Savart**

Un filo rettilineo di lunghezza indefinita attraversato da una corrente i genera un campo magnetico le cui linee di campo sono circonferenze che giacciono su piani perpendicolari al filo. Il verso è dato dalla regola di Nerone, e l'intensità a distanza r dal filo è pari a:



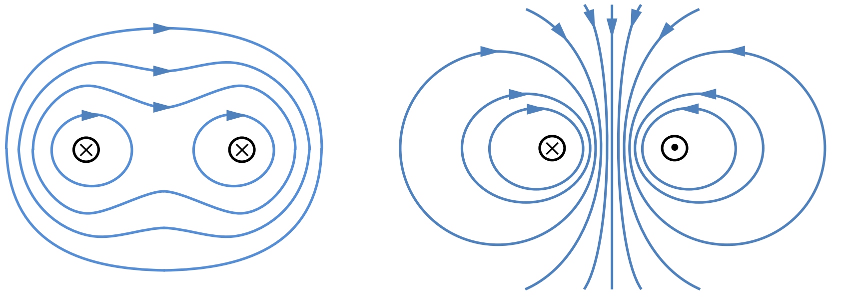
$$B = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{i}{r}$$

La costante μ si dice *permeabilità magnetica del mezzo*. Nel vuoto si pone $\mu = \mu_0$:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \, \frac{T \cdot m}{A} = 1{,}26 \cdot 10^{-6} \, \frac{T \cdot m}{A}$$

In altri mezzi si pone $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ dove μ_r si dice *permeabilità magnetica relativa del mezzo* e dipende dalle caratteristiche del mezzo.

Campo generato da due fili percorsi da corrente

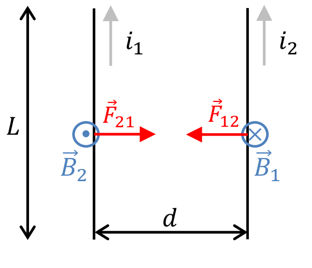


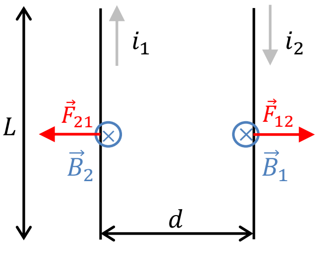
verso concorde — verso discorde

- **Interazione tra fili percorsi da corrente**

Due fili rettilinei paralleli di lunghezza L percorsi da correnti i_1 e i_2 posti a distanza d esercitano l'uno sull'altro delle forze tali che:

$\vec{F}$ {
- Direzione: parallela al piano dei due fili e perpendicolare ad essi
- Verso: attrattiva se le correnti hanno lo stesso verso
  repulsiva se le correnti hanno verso opposto
- Intensità: $F_{12} = F_{21} = \dfrac{\mu}{2\pi} \cdot \dfrac{i_1 i_2}{d} \cdot L$





Dimostrazione

Sul secondo filo agisce la forza:

$$\vec{F}_{21} = i_2 \, \vec{L} \times \vec{B}_1$$

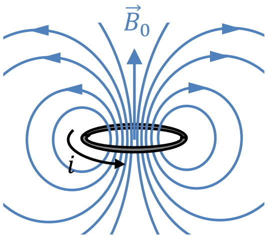
perpendicolare al filo, verso determinato dalla regola della mano destra, e avente intensità:

$$F_{21} = i_2 \, L \, B_1 = i_2 \, L \, \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{i_1}{d} = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{i_1 i_2}{d} \cdot L$$

Per il terzo principio della dinamica, sul primo filo agisce una forza uguale e opposta.

- **Campo magnetico generato da una spira**

Una spira genera un campo magnetico avente linee di campo simmetriche rispetto all'asse della spira e più dense all'interno della spira. In particolare, al centro della spira il campo è perpendicolare al piano su cui giace la spira, ha verso determinato dalla regola di Nerone e intensità pari a:



$$B_0 = \frac{\mu}{2} \cdot \frac{i}{r}$$

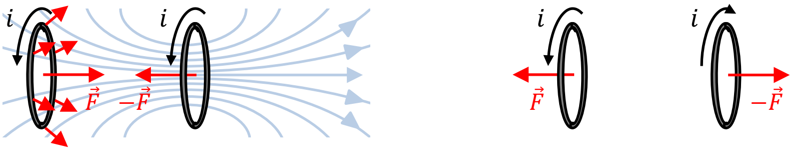
Dimostrazione

Rimandata: è necessario l'uso degli integrali.

Nota Bene

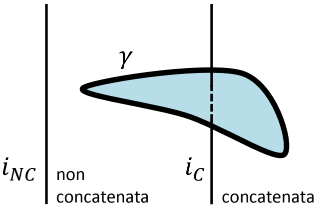
- Ogni tratto di spira genera un campo magnetico (in accordo con la legge di Biot-Savart). Il campo risultante è la somma vettoriale di tutti questi contributi.
- Una spira percorsa da corrente si comporta come un dipolo magnetico.

- Due spire percorse da corrente (o due dipoli) si attraggono se le correnti scorrono nello stesso verso (o se i poli N e S sono orientati nello stesso modo); si respingono se le correnti scorrono in verso opposto (o se i poli N e S sono orientati in modo opposto). Le forze responsabili dell'attrazione sono la risultante delle forze con cui il campo magnetico di un dipolo attira o respinge ogni tratto di filo dell'altro dipolo.



- **Corrente concatenata ad una curva chiusa γ (Def)**

Data una curva chiusa γ, si dice che una corrente è concatenata a γ se attraversa qualsiasi superficie che ha come bordo γ.

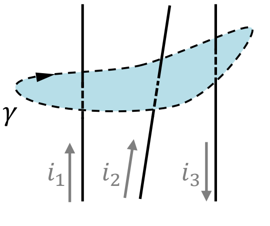


- **Teorema di Ampere**

La circuitazione del campo magnetico lungo una curva chiusa e orientata γ è pari a:

$$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu \, i_C$$

dove i_C è la somma algebrica delle correnti concatenate alla curva.



Dimostrazione

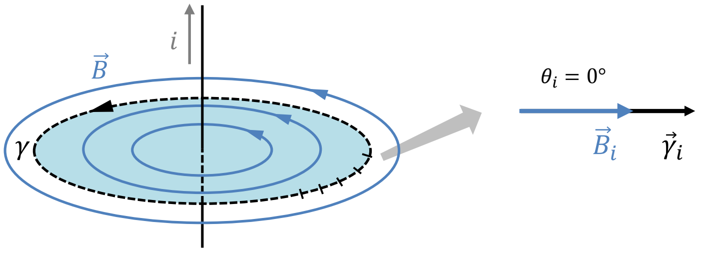
(caso: curva γ circolare attraversata perpendicolarmente da una corrente i passante per il centro)

Si suddivida γ in N tratti $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_i, \dots \gamma_N$ abbastanza piccoli e tali che:

- ciascun tratto γ_i possa essere considerato rettilineo;
- il campo $\vec{B}_i$ che attraversa ciascun tratto γ_i possa essere considerato uniforme.

Per definizione la circuitazione lungo γ è la somma delle circuitazioni lungo questi tratti:

$$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \Gamma_{\gamma_1}(\vec{B}_1) + \Gamma_{\gamma_2}(\vec{B}_2) + \cdots + \Gamma_{\gamma_N}(\vec{B}_N) =$$



$$= B_1 \cdot \gamma_1 \cdot \cos(\theta_1) + B_2 \cdot \gamma_2 \cdot \cos(\theta_2) + \cdots + B_N \cdot \gamma_N \cdot \cos(\theta_N) =$$

$$\cos(\theta_i) = 1$$

perché le linee del campo magnetico generato da un filo percorso da corrente sono circonferenze, e quindi il campo è parallelo a ciascun tratto ($\theta_i = 0°$).

$$= B_1 \cdot \gamma_1 + B_2 \cdot \gamma_2 + \cdots + B_N \cdot \gamma_N =$$

$$B_1 = B_2 = \cdots = B_N = B$$

perché il campo magnetico generato da un filo percorso da corrente è costante ad uguale distanza, e i tratti della curva si trovano alla stessa distanza dal filo.

$$= B \cdot \gamma_1 + B \cdot \gamma_2 + \cdots + B \cdot \gamma_N =$$

$$= B(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_N) =$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_N = 2r\pi$$

perché la somma delle lunghezze di ciascun tratto dà il perimetro della circonferenza.

$$= B \cdot 2r\pi =$$

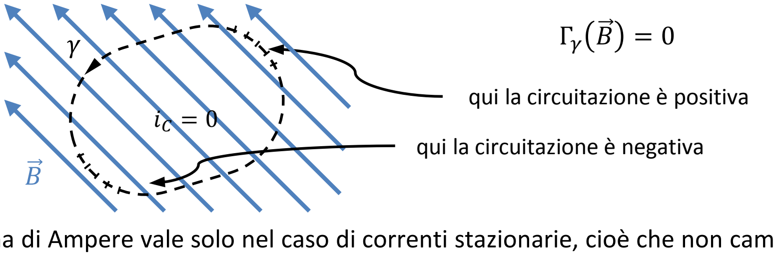
$$B = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{i}{r}$$

perché è questa l'intensità del campo magnetico generato da un filo percorso da corrente i nei punti a distanza r (in questo caso pari al raggio di γ) da esso.

$$= \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{i}{r} \cdot 2r\pi = \mu\, i$$

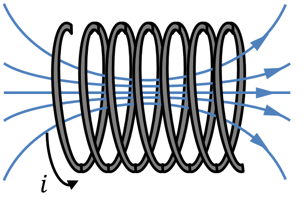
Nota Bene

- Si sceglie il segno delle correnti in funzione del verso di percorrenza della curva: sono positive le correnti che generano un campo magnetico che ha lo stesso verso con cui viene percorsa la curva; negative quelle che hanno verso opposto.
- La circuitazione lungo una curva chiusa è nulla se $i_C = 0$, cioè se non sono presenti correnti concatenate o se la loro somma algebrica è zero.
- Se il campo magnetico che attraversa la curva è generato da correnti non concatenate (quindi $i_C = 0$) la sua circuitazione lungo essa è nulla (spiegazione intuitiva: suddividendo la curva in piccoli tratti, la circuitazione attraverso questi sarà in alcuni casi positiva, in altri negativa… sommando questi contributi, si ottiene una circuitazione complessiva nulla).



- Il teorema di Ampere vale solo nel caso di correnti stazionarie, cioè che non cambiano nel tempo. Se la corrente non è stazionaria, si veda il teorema di Ampere-Maxwell.

- **Solenoide (Def)**
  Un *solenoide* è un avvolgimento di filo molto compatto che ha una certa estensione spaziale (una lunghezza maggiore del diametro delle spire). Quando è percorso da corrente, il solenoide genera un campo magnetico.



- **Campo magnetico generato da un solenoide**

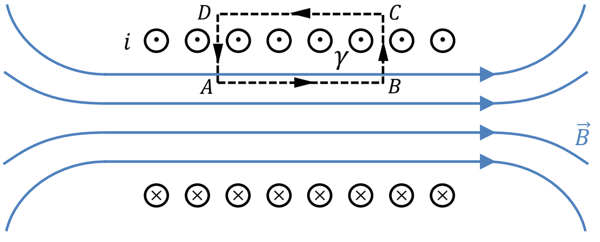
  Un solenoide percorso da una corrente i genera un campo magnetico con le seguenti caratteristiche:

  - All'interno del solenoide il campo magnetico è uniforme, parallelo all'asse del solenoide, verso dato dalla regola di Nerone e intensità pari a:

  $$B = \mu\, n\, i$$

  dove $n = N/L$ è il numero di spire del solenoide per unità di lunghezza.

  - All'esterno del solenoide il campo magnetico è trascurabile.



Dimostrazione

Il campo magnetico generato dal solenoide è la somma vettoriale dei campi magnetici generati da ciascun tratto del filo.

All'interno del solenoide, i campi hanno la stessa direzione e stesso verso, per cui si sommano in modo costruttivo: si ottiene un campo parallelo all'asse del solenoide di intensità costante.

All'esterno del solenoide, i campi hanno la stessa direzione ma verso opposto, per cui tendono ad annullarsi: fuori dal solenoide il campo è trascurabile.

Si consideri ora un circuito chiuso γ di forma rettangolare, con le basi di lunghezza L parallele alle linee di campo (vedi figura). Calcoliamo la circuitazione del campo magnetico lungo γ in due modi:

1) CON LA DEFINIZIONE

La circuitazione di $\vec{B}$ attraverso γ è data dalla somma delle circuitazioni attraverso la base inferiore AB, la base superiore CD e le due altezze BC e DA:

$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \Gamma_{AB}(\vec{B}) + \Gamma_{BC}(\vec{B}) + \Gamma_{CD}(\vec{B}) + \Gamma_{DA}(\vec{B}) =$

all'interno del solenoide il campo è parallelo e concorde ad $\overrightarrow{AB}$, quindi $\Gamma_{AB}(\vec{B}) = B \cdot AB$

all'esterno del solenoide il campo è trascurabile, quindi $\Gamma_{CD}(\vec{B}) = 0$

il campo è perpendicolare a $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{DA}$, quindi $\Gamma_{BC}(\vec{B}) = \Gamma_{DA}(\vec{B}) = 0$

$= B \cdot AB$

2) CON IL TEOREMA DI AMPERE

Per il teorema di Ampere:

$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu \cdot i_C$

Uguagliando i due risultati si ha che:

$$B \cdot AB = \mu \cdot i_C$$

$$B = \mu \cdot \frac{i_C}{AB}$$

I fili sono collocati a distanza uniforme, quindi $\frac{i_C}{AB} = \frac{N \cdot i}{L} = n \cdot i$

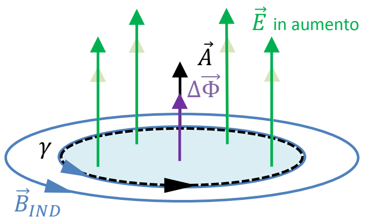
$$B = \mu \cdot n \cdot i$$

Nota Bene

- Il campo magnetico generato da un solenoide non dipende dal diametro del solenoide, ma solo dalla densità delle sue spire e dall'intensità della corrente che lo percorre.

- **Teorema di Ampere-Maxwell**

  Si consideri un curva chiusa e orientata γ in cui il flusso $\Phi_S(\vec{E})$ del campo elettrico che attraversa una qualunque superficie S che ha come bordo γ stia variando. Allora si genera un campo magnetico che viene detto *campo magnetico indotto,* la cui circuitazione lungo γ è pari a:



$$\Gamma_\gamma(\vec{B}_{IND}) = \varepsilon_o \mu_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{E})}{\mathrm{d}t}$$

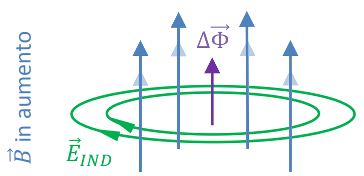
Si orienti in maniera arbitraria il vettore area $\vec{A}$ della curva. Definiamo il vettore $\Delta\vec{\Phi}$ parallelo ad $\vec{A}$, avente lo stesso verso di $\vec{A}$ quando il suo flusso è in aumento e verso opposto quando il suo flusso è in diminuzione, e intensità pari a $\mathrm{d}\Phi_S(\vec{E})/\mathrm{d}t$. Allora il verso della corrente indotta è quello indicato dalla regola di Nerone prendendo come riferimento il vettore $\Delta\vec{\Phi}$.

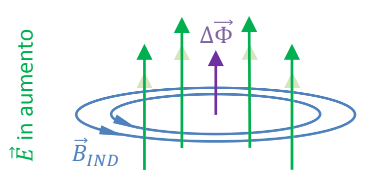
Considerando anche il teorema di Ampere, si conclude che la circuitazione di un campo magnetico (sia esso generato da una filo percorso da corrente, o da un campo elettrico variabile) lungo una curva chiusa e orientata γ è pari a:

$$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 i_C + \varepsilon_o \mu_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{E})}{\mathrm{d}t}$$

Nota Bene

- A differenza di quanto accade con il campo elettrico indotto nella legge di Faraday-Neumann-Lenz, il campo magnetico indotto ha verso dato dalla regola di Nerone (e non l'opposto) prendendo come riferimento il vettore $\Delta\vec{\Phi}$.





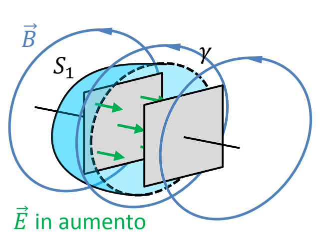
- Si definisce corrente di spostamento il termine:

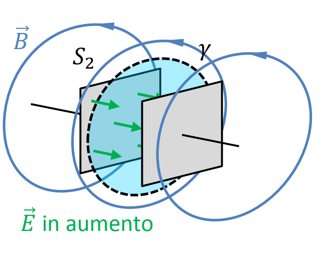
$$i_S = \varepsilon_o \frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{E})}{\mathrm{d}t}$$

  In questo modo la circuitazione del campo magnetico può essere espressa così (i_C è la corrente di conduzione, i_S è la corrente di spostamento):

$$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu_0(i_C + i_S)$$

- Si consideri un condensatore ad armature piane in carica (o scarica): una corrente i_C arriva all'armatura positiva e riparte da quella negativa, interrompendosi nel mezzo tra le due armature. Tuttavia, si può immaginare che nel mezzo esista una corrente di spostamento i_S uguale in intensità a i_C e avente lo stesso verso se $\vec{E}$ è in aumento, verso opposto altrimenti (in generale, la somma delle due correnti rimane costante). Se non si tenesse conto di questa corrente e dei suoi effetti sul campo magnetico, sembrerebbe che la circuitazione di $\vec{B}$ lungo la curva γ in figura dipenda dalla superficie presa in considerazione (sarebbe non nulla per S_1 perché c'è corrente concatenata, ma nulla per S_2 perché non c'è corrente concatenata che la attraversa).





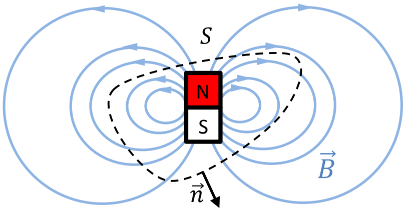
ALTRO SUL CAMPO MAGNETICO

Annotazioni

- A differenza del campo elettrico, per il campo magnetico non esistono monopoli magnetici isolati, ovvero particelle aventi una «carica magnetica» dalla quale escano o entrino le linee del campo magnetico (nel caso del campo elettrico, una carica puntiforme è un monopolo elettrico): i poli N sono inseparabili dai poli S.

- **Flusso del campo magnetico**
  Il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa S orientata verso l'esterno è pari a zero:

$$\phi_S(\vec{B}) = 0$$



Dimostrazione
Dipende dal fatto che non esistono monopoli magnetici, e che quindi le linee del campo magnetico sono sempre chiuse. Per questo motivo qualsiasi linea di campo magnetico che esce dalla superficie S dovrà anche poi rientrarvi, contribuendo prima in maniera positiva e poi in maniera negativa (e quindi in definitiva nulla) al calcolo del flusso.

Nota Bene
- Le linee del campo magnetico sono sempre chiuse.
- Spezzando a metà un magnete a barra non si separano i suoi poli N e S (sarebbe come ottenere due monopoli magnetici): si ottengono due nuovi magneti a barra.
- Il teorema di Gauss per il campo elettrico dice che il flusso attraverso S dipende dalla somma algebrica dei monopoli elettrici (le cariche) interne alla superficie. Ciò potrebbe essere esteso per analogia anche al campo magnetico, dove la somma algebrica dei monopoli magnetici interni alla superficie è sempre nulla (ogni monopolo N è legato indissolubilmente al suo monopolo opposto S perché non esistono monopoli magnetici isolati).

- **Campo vettoriale conservativo (Def)**
  Un campo vettoriale $\vec{Z}$ si dice *conservativo* se esiste una funzione (detta *potenziale*) $V(x, y, z)$ tale che:

$$\vec{Z}(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ -\dfrac{\partial V}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ -\dfrac{\partial V}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

Nota Bene
- In una dimensione, la relazione diventa:

$$Z(x_0) = -\frac{dV}{dx}(x_0)$$

- Il campo gravitazionale G è conservativo:

$$G(r) = -G\,\frac{M}{r^2} \qquad\qquad V(r) = -G\,\frac{M}{r}$$

- Il campo elettrico E è conservativo:

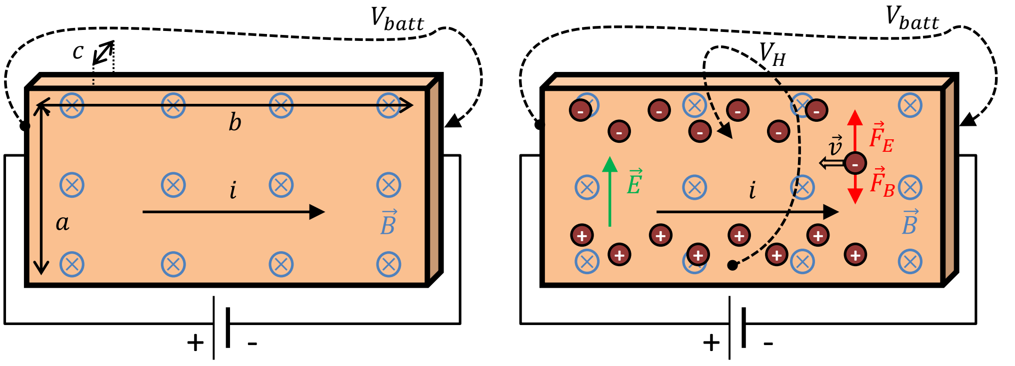
Carica puntiforme: $E(r) = k\,\dfrac{Q}{r^2}$ $\qquad$ $V(r) = k\,\dfrac{Q}{r}$

Condensatore: $E(r) = E\ (cost)$ $\qquad$ $V(r) = V_+ - E \cdot r$

- Si può dimostrare che la circuitazione di un campo vettoriale conservativo lungo una curva chiusa è sempre nulla.
- Il campo magnetico non è conservativo, infatti la sua circuitazione lungo una linea chiusa non è nulla.

- **Effetto Hall**

L'esperimento (John Hall, 1879) si pone l'obiettivo di determinare il segno della carica in movimento quando scorre una corrente elettrica in un conduttore.



Una batteria genera una tensione V_{batt} ai capi di un conduttore di dimensioni $a \times b$ e spessore c immerso in un campo magnetico perpendicolare alla corrente. Per effetto della tensione V_{batt} si genera nel conduttore una corrente i:

$$i \overset{(1)}{=} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \overset{(2)}{=} \frac{Nq}{\Delta t} \overset{(3)}{=} \frac{Nq}{b/v} = \frac{Nqv}{b} \overset{(4)}{=} \frac{n\mathcal{V}qv}{b} = \frac{n(abc)qv}{b} = n(ac)qv \overset{(5)}{=} nSqv$$

(1) La corrente può essere calcolata come rapporto tra la carica complessiva ΔQ presente nel conduttore in un certo istante, e il tempo Δt che impiega ad attraversare la sezione posta più a destra del conduttore.

(2) Detto N il numero di cariche presenti nel conduttore in un certo istante e q la carica di ciascuna di esse, $\Delta Q = Nq$.

(3) Il tempo impiegato dalle cariche per attraversare il conduttore è uguale al rapporto tra la distanza percorsa (lunghezza del conduttore) e la velocità di deriva: $\Delta t = \Delta s/v = b/v$.

(4) Detto n il numero di cariche per unità di volume, $n = N/\mathcal{V}$ e quindi $N = n\mathcal{V}$.

(5) Sia $S = ac$ l'area della sezione del conduttore.

Le cariche che si spostano generando la corrente sono soggette alla forza di Lorentz. Si possono avere due casi:
1) Se a muoversi sono le cariche positive (dal polo + al polo -, quindi da sinistra verso destra in figura), queste si spostano verso l'alto, mentre in basso rimangono altrettante cariche negative.
2) Se a muoversi sono le cariche negative (dal polo - al polo +, quindi da destra verso sinistra in figura), queste si spostano verso l'alto, mentre in basso rimangono altrettante cariche positive.
Questo accumulo di cariche genera a sua volta un campo elettrico longitudinale E_H di verso opposto alla forza di Lorentz e una nuova differenza di potenziale V_H (detta tensione di Hall) che aumenta all'aumentare del numero di cariche accumulate. L'equilibrio viene raggiunto quando la forza elettrica del campo E_H equilibra la forza di Lorentz. Ciò ci permette di calcolare il valore di V_H all'equilibrio:

$$\vec{F}_E = -\vec{F}_B \quad \Longrightarrow \quad qE_H = qvB \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \frac{V_H}{a} = vB \quad \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad \frac{V_H}{a} = \frac{iB}{nSq} \quad \overset{(3)}{\Longrightarrow} \quad V_H = \frac{iB}{ncq}$$

(1) In valore assoluto vale che $\Delta V = E \cdot \Delta s$. Calcolando la differenza di potenziale tra agli estremi superiore e inferiore della lastra ($\Delta s = a$) si trova che $V_H = E_H \cdot a$ e quindi $E_H = V_H/a$.

(2) Dalla relazione dimostrata in precedenza $i = nSqv$ e quindi $v = i/nSq$.

(3) Basta ricordare che $S = ac$.

Per determinare se a muoversi sono le cariche positive o negative, si può misurare la differenza di potenziale V_H tra la parte inferiore e la parte superiore del conduttore: si otterrà una differenza di potenziale negativa, da cui si deduce la presenza di cariche negative nella parte superiore e positive nella parte inferiore: si è verificato il caso 2 (a muoversi sono le cariche negative).

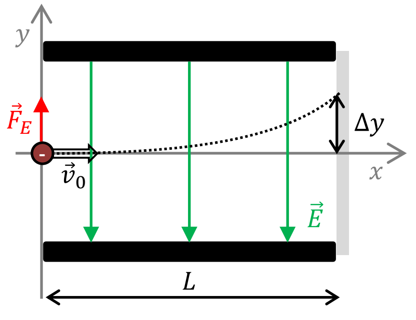
- **Esperimento di Thomson**

L'esperimento (Thomson, 1897) si pone l'obiettivo di determinare il rapporto tra la carica e la massa dell'elettrone (dopo l'esperimento di Millikan del 1909 che ne determina la carica, sarà possibile così scoprire il valore della massa dell'elettrone).

In un tubo a raggi catodici gli elettroni vengono sparati a velocità v_0 dentro ad un campo elettrico $\vec{E}$ perpendicolare a $\vec{v}_0$. Per effetto del campo elettrico, gli elettroni acquistano un'accelerazione verso l'alto pari a:

$$a = \frac{F_E}{m} = \frac{qE}{m}$$

La traiettoria dell'elettrone diventa così una parabola e l'elettrone, dopo aver attraversato la regione in cui è presente il campo elettrico per una lunghezza complessiva L, viene fatto scontrare contro uno schermo da cui è possibile misurare la deflessione verticale Δy dell'elettrone.



Scriviamo le leggi orarie delle componenti orizzontale e verticale del moto dell'elettrone (nel sistema di riferimento scelto $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{0_x} = v_0$ e $v_{0_y} = 0$):

$$\begin{cases} x = v_0 t \quad \Longrightarrow \quad t = \dfrac{x}{v_0} \\ y = \dfrac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$

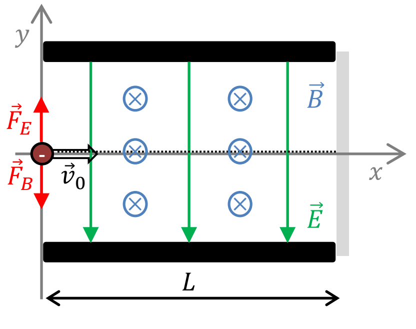
da cui è possibile ricavare l'equazione della traiettoria (parabolica) dell'elettrone:

$$y = \frac{1}{2} a \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{a}{2v_0^2}\, x^2 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{qE}{2mv_0^2}\, x^2$$

Sostituendo il valore dell'ascissa dello schermo ($x = L$) si ottiene l'ordinata, cioè la deflessione Δy:

$$\Delta y = \frac{qE}{2mv_0^2}\, L^2$$

Ora il tubo viene immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ perpendicolare a $\vec{E}$ e $\vec{v}_0$.



L'intensità di $\vec{B}$ viene regolata in modo che la forza di Lorentz $\vec{F}_B$ che agisce sull'elettrone equilibri la forza $\vec{F}_E$. In tali condizioni si può vedere che il rapporto tra E e B è pari alla velocità dell'elettrone:

$$F_B = F_E \quad \Longrightarrow \quad qv_0B = qE \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \frac{E}{B}$$

Sostituendo quest'ultima relazione nell'espressione trovata in precedenza si ottiene:

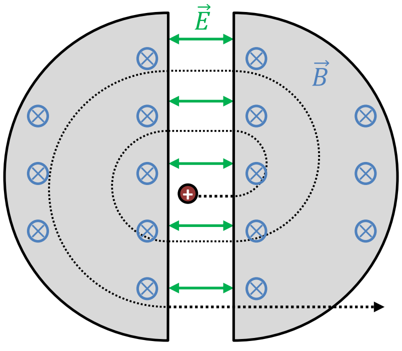
$$\Delta y = \frac{qB^2}{2mE}\, L^2$$

Isolando q/m si ottiene un'espressione che permette di calcolare il valore del rapporto cercato, note le grandezze E, B, L e Δy (tutte misurabili sperimentalmente):

$$\frac{q}{m} = \frac{E\,\Delta y}{(B\,L)^2}$$

- **Il ciclotrone**

Il ciclotrone è una macchina utilizzata per accelerare protoni. E' costituito da due elettrodi cavi a forma di D, che vengono utilizzati per creare un campo elettrico $\vec{E}$ con verso variabile nella regione $\mathcal{R}$ posta tra di essi. Nelle cavità dei due elettrodi è presente un campo magnetico $\vec{B}$ perpendicolare a quello elettrico.



Un protone di massa m e carica e viene inizialmente inserito nella regione $\mathcal{R}$ e viene accelerato dal campo elettrico verso un elettrodo. Una volta entrato a velocità v_1 nella cavità dell'elettrodo il protone percorre, per effetto del campo magnetico, a velocità costante una traiettoria semicircolare di raggio:

$$r_1 = \frac{mv_1}{eB}$$

E' possibile calcolare il tempo Δt impiegato dal protone per percorrere la traiettoria semicircolare come metà del periodo del moto circolare uniforme:

$$T_1 = \frac{2r_1\pi}{v_1} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta t = \frac{T_1}{2} = \frac{r_1\pi}{v_1} = \frac{mv_1\pi}{eBv_1} = \frac{m\pi}{eB}$$

Come si nota, il tempo impiegato Δt non dipende né dalla velocità del protone né dal raggio della traiettoria.

Dopo questo tempo il protone fuoriesce dall'elettrodo e si ritrova ancora nella regione $\mathcal{R}$. Qui viene nuovamente accelerato dal campo elettrico, il cui verso nel frattempo è stato invertito, verso il secondo elettrodo. Il protone entrerà dunque nel secondo elettrodo con velocità $v_2 > v_1$, percorrerà una traiettoria semicircolare in un tempo Δt uguale a quello precedente (infatti Δt non dipendeva né dalla velocità del protone né dal raggio della traiettoria), uscirà dall'elettrodo e nella regione $\mathcal{R}$ verrà di nuovo accelerato verso l'altro elettrodo dal campo elettrico che nel frattempo è stato invertito… e così via. Ad ogni passaggio nella regione $\mathcal{R}$, la velocità del protone viene aumentata fino a che non raggiunge la velocità desiderata.

Per il corretto funzionamento del macchinario è necessario che il campo elettrico cambi verso con la stessa frequenza con cui il protone si ritrova nella regione $\mathcal{R}$ dopo essere uscito da un elettrodo, ovvero (trascurando il tempo impiegato ad attraversare la regione $\mathcal{R}$ stessa):

$$f = \frac{1}{\Delta t}$$