Funzioni

- **Funzione**

Una *funzione* è una corrispondenza che associa ad ogni elemento di un insieme D (detto *dominio*) uno e un solo elemento di un insieme B (detto *insieme d'arrivo*).

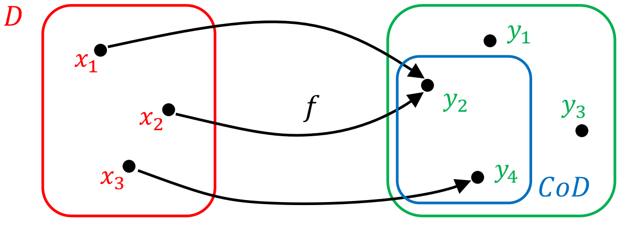
Se $x \in D$ è associato ad $y \in B$, si dice che y è *immagine di* x e si indica con:

$$y = f(x)$$

Il sottoinsieme di D (eventualmente vuoto) costituito dagli elementi la cui immagine è $y \in B$ si dice *anti-immagine di* y e si indica con:

$$f^{-1}(y)$$

L'insieme delle immagini di tutti gli elementi del dominio si dice *codominio*.



$$f(x_1) = y_2$$
$$f(x_2) = y_2$$
$$f^{-1}(y_2) = \{x_1, x_2\}$$
$$f^{-1}(y_1) = \emptyset$$
$$CoD = \{y_2, y_4\}$$

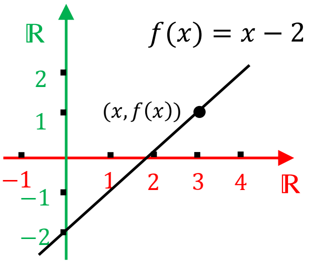
Una relazione è una funzione se tutte le x sparano una freccia, e ne sparano una sola. Invece le y possono essere colpite da più frecce o non essere colpite affatto. Il codominio è l'insieme delle y colpite.

- **Funzioni numeriche**

Una funzione numerica è una funzione in cui D e B sono insiemi numerici. Le funzioni numeriche spesso possono essere definite tramite un'espressione algebrica che esplicita a quale y è associata una generica x:

$$\begin{aligned} f\colon D &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Ad una funzione numerica può essere associato un grafico sul piano cartesiano: ogni corrispondenza tra una x e una y è rappresentata da un punto di coordinate (x, y).



$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = x - 2 \end{aligned}$$

Se non è specificato altrimenti, il dominio di una funzione numerica è il campo di esistenza di $f(x)$, e l'insieme d'arrivo è $\mathbb{R}$.

- **Funzioni suriettive**

Una funzione si dice suriettiva se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento del dominio.

Una funzione è suriettiva se ogni y è colpita almeno una volta (o in altre parole se B coincide col codominio).

NB: Una funzione può sempre essere resa suriettiva restringendo opportunamente B.

- **Funzioni iniettive**

Una funzione si dice iniettiva se ogni elemento di B è immagine di al massimo un elemento del dominio.

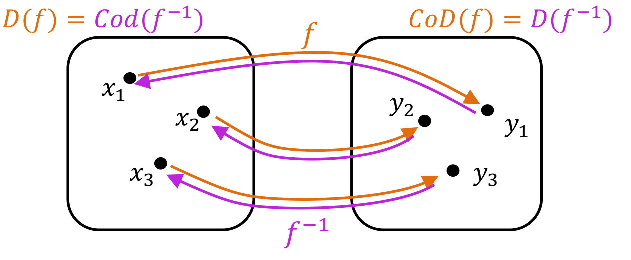
Una funzione è iniettiva se non esistono y colpite più di una volta.

- **Funzioni biiettive**

Una funzione si dice biiettiva se è sia suriettiva che iniettiva.

Funzione inversa

Una funzione f si dice *invertibile* se «invertendo il verso» delle corrispondenze tra gli elementi del dominio e dell'insieme d'arrivo si ottiene ancora una funzione. In questo caso, la funzione che si ottiene è detta *funzione inversa* di f e si indica con f^{-1}.



Una funzione è invertibile se e solo se è biiettiva.
Invertendo il verso delle frecce di una funzione non biiettiva non si ottiene una funzione (se f non è suriettiva, ci sarebbero elementi di $D(f^{-1})$ che non sparano frecce; se f non è iniettiva, ci sarebbero elementi di $D(f^{-1})$ che sparano più frecce). Talvolta si decide di restringere B per rendere la funzione suriettiva e di restringere $D(f)$ per rendere la funzione iniettiva.

Il dominio della funzione inversa coincide con il codominio della funzione diretta, e viceversa.

La legge della funzione inversa si ottiene scambiando le variabili x e y che compaiono nella legge della funzione diretta. Dopo lo scambio, la variabile y va nuovamente isolata.

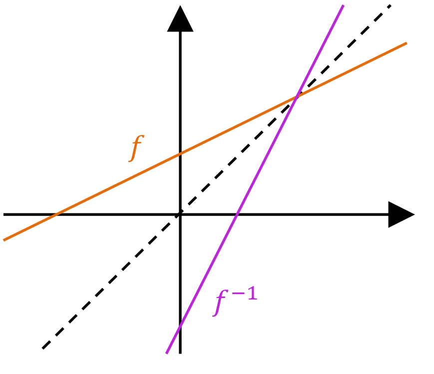
$$f: \quad y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$f^{-1}: \quad x = \frac{1}{2}y + 1$$

$$\frac{1}{2}y = x - 1$$

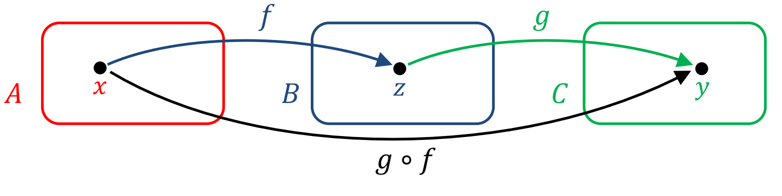
$$y = 2x - 2$$

Il grafico della funzione inversa si ottiene riflettendo il grafico della funzione diretta rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



Composizione di funzioni

Date due funzioni $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$, si definisce *funzione composta* $g \circ f$ quella funzione che associa ogni elemento di A ad un elemento di C applicando prima f e poi g.



La composizione di funzioni è l'operazione che applica una funzione al risultato di un'altra funzione. Dunque, se $f(x) = z$ e $g(z) = y$, allora $g \circ f(x) = z$ (si può scrivere anche $g\big(f(x)\big) = z$).

NB: La composizione di funzioni non è commutativa perché in generale $g\big(f(x)\big) \neq f\big(g(x)\big)$.

Esempio:

$f(x) = x + 2$ $\qquad$ $g\big(f(x)\big) = f^2(x) - f(x) = (x+2)^2 - (x+2) = x^2 + 3x + 2$

$g(x) = x^2 - x$ $\qquad$ $f\big(g(x)\big) = g(x) + 2 = x^2 - x + 2$

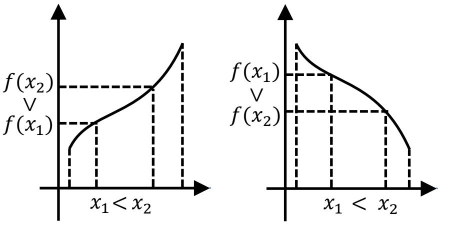
• Monotonia di una funzione

Una funzione f si dice *strettamente crescente* in un intervallo I se:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in I$$

Una funzione f si dice *strettamente decrescente* in un intervallo I se:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in I$$

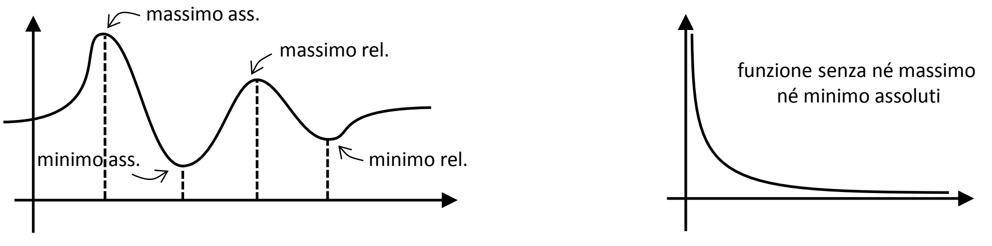


NB: Una funzione strettamente crescente (o decrescente) in un intervallo è iniettiva in quell'intervallo.

• Massimi e minimi di una funzione

Il *massimo assoluto* (risp. minimo assoluto) di una funzione è, qualora esista, il massimo (risp. minimo) elemento del codominio di quella funzione. Le $x \in D(f)$ che sono antimmagine del massimo assoluto (risp. minimo assoluto) sono dette *punti di massimo assoluto* (risp. punti di minimo assoluto) .

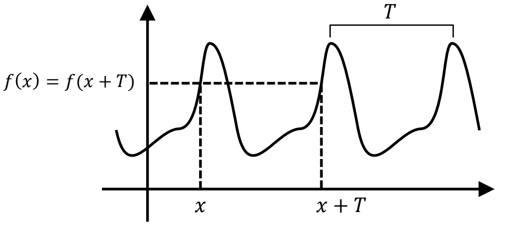
Un punto $c \in D(f)$ si dice *punto di massimo relativo* (risp. punto di minimo relativo) se esiste un intorno di c tale che c è punto di massimo assoluto (risp. minimo assoluto) per la funzione ristretta a quell'intorno. L'ordinata $f(c)$ si dice *massimo relativo* (risp. minimo relativo).



• Funzione periodica

Una funzione si dice *periodica* di periodo T se:

$$f(x) = f(x+T) \qquad \forall x \in D(f)$$

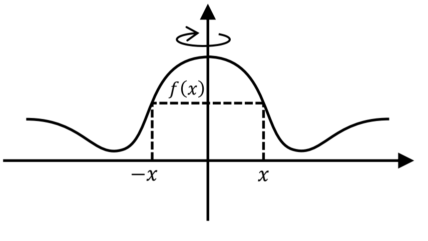


• Funzione pari o dispari

Una funzione si dice *pari* se:

$$f(x) = f(-x) \qquad \forall x \in D(f)$$

Una funzione pari è simmetrica rispetto all'asse y.



Una funzione si dice *dispari* se:

$$f(x) = -f(-x) \qquad \forall x \in D(f)$$

Una funzione dispari è simmetrica rispetto all'origine.