EQUAZIONI E DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

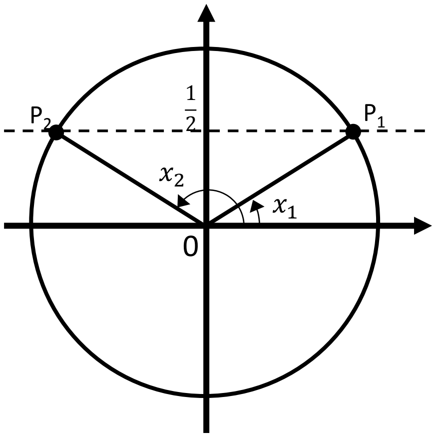
- Elementari
  - Circ. goniometrica
  - Metodo grafico
- Lineari
  - Metodo grafico
  - Angolo aggiunto
  - Form. Parametriche
- Omogenee
  - Divisione per $\cos^2(x)$
  - Form. abbassamento di grado
- Equazioni particolari
- Disequazioni fratte e prodotto

Equazioni e disequazioni elementari

$$\sin(x) \lesseqqgtr k \qquad \cos(x) \lesseqqgtr k \qquad \tan(x) \lesseqqgtr k$$

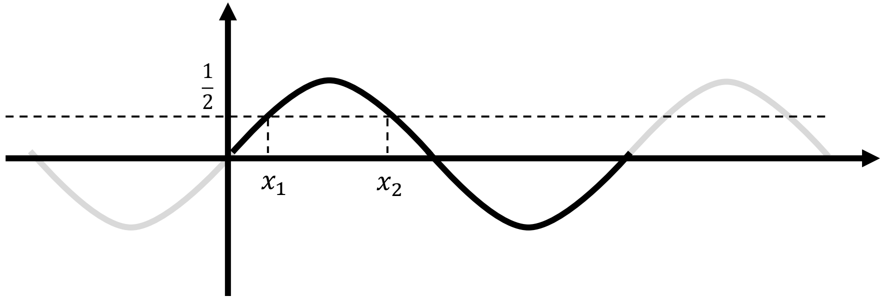
Es. 1 $\sin(x) = \frac{1}{2}$

1° metodo: CIRCOFERENZA GONIOMETRICA



$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

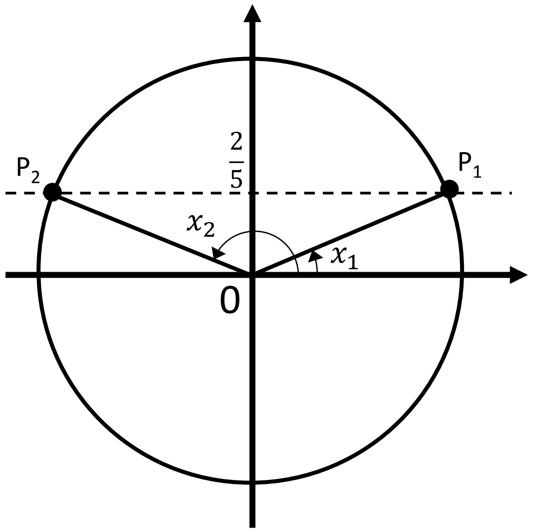
2° metodo: GRAFICO DI FUNZIONE



$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

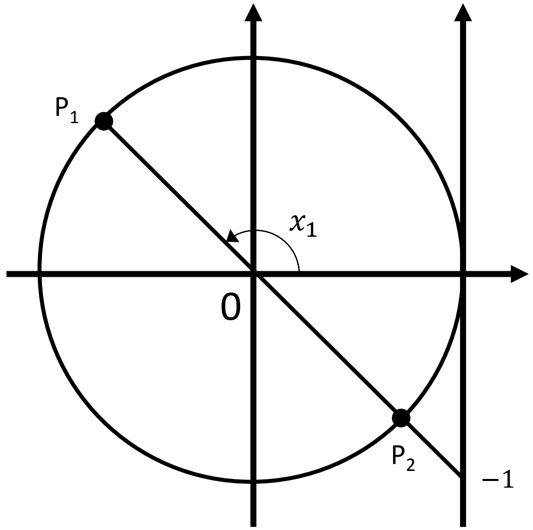
Equazioni e disequazioni elementari

Es. 2 $\sin(x) = \frac{2}{5}$



$$x = \arcsin\frac{2}{5} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi - \arcsin\frac{2}{5} + 2k\pi$$

Es. 3 $\tan(x) = -1$ C.E. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$



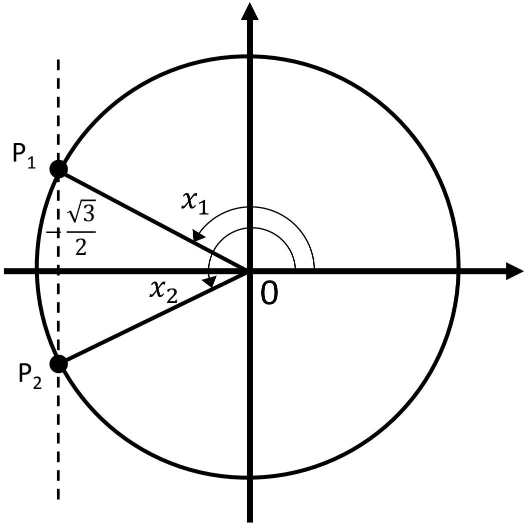
$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$$

Equazioni e disequazioni elementari

Es. 4 $\cos(2x-\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{\alpha = 2x - \pi}$$

$$\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

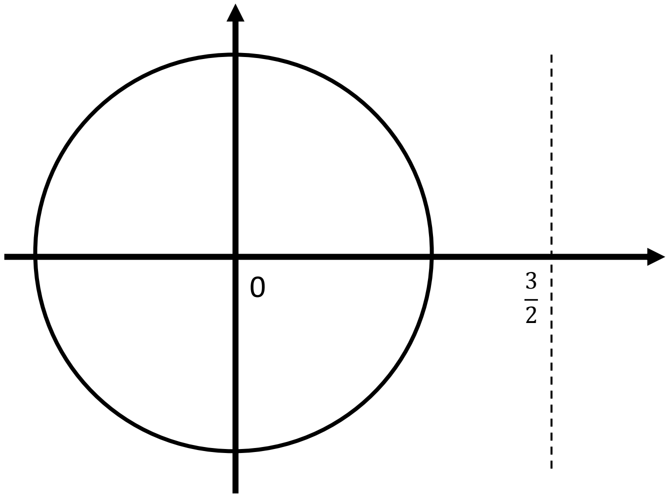


$$\alpha = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad \alpha = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

$$2x - \pi = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad 2x - \pi = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{11}{12}\pi + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{13}{12}\pi + k\pi$$

Es. 5 $\cos(x) = \frac{3}{2}$



$$S = \emptyset$$

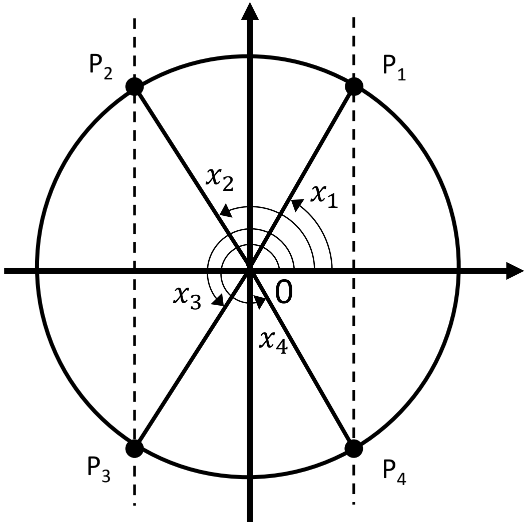
Equazioni e disequazioni elementari

Es. 6 $\sec^2(x) = 4$

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 4$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{4}$$

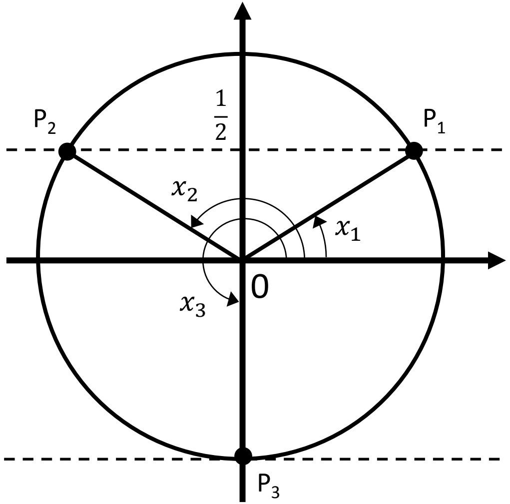
$$\cos(x) = \pm\frac{1}{2}$$



$$x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Es. 7 $2\sin^2(x) + 2\sin(x) - 1 = 0$

$$\sin(x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \sin(x) = \frac{1}{2} \\ \sin(x) = -1 \end{cases}$$

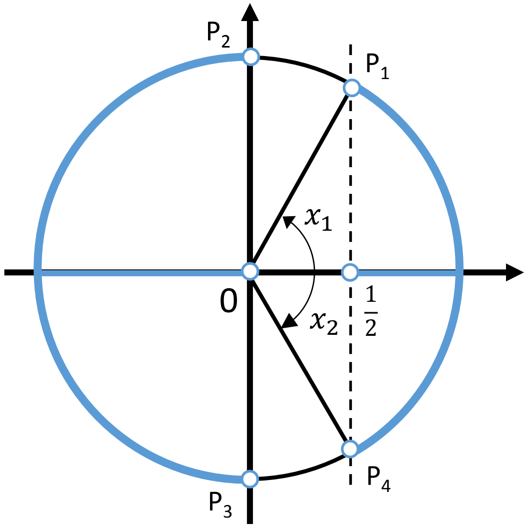


$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Equazioni e disequazioni elementari

Es. 8 $2\cos^2(x) - \cos(x) > 0$

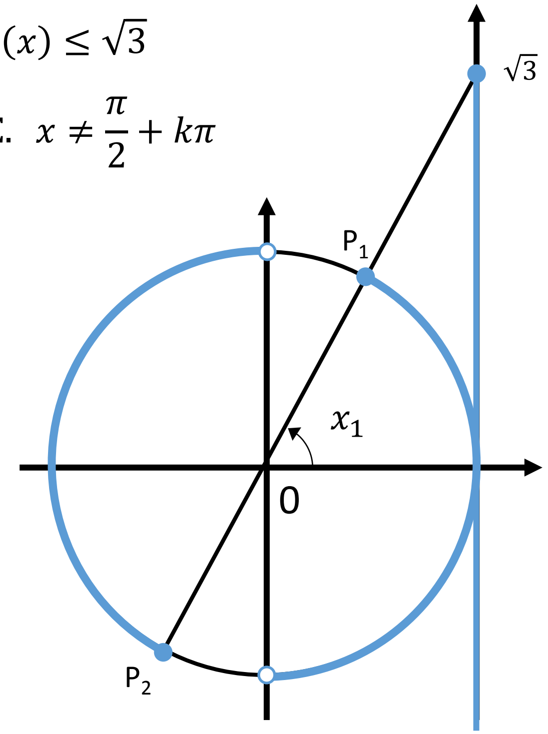
$$\cos(x) < 0 \ \vee \ \cos(x) > \frac{1}{2}$$



$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

Es. 9 $\tan(x) \leq \sqrt{3}$

$$\text{C.E.} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$



$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Equazioni e disequazioni lineari

$$a\sin(x) + b\cos(x) + c \lesseqgtr 0$$

Es. 1 $\sin(x) - \cos(x) + 1 = 0$

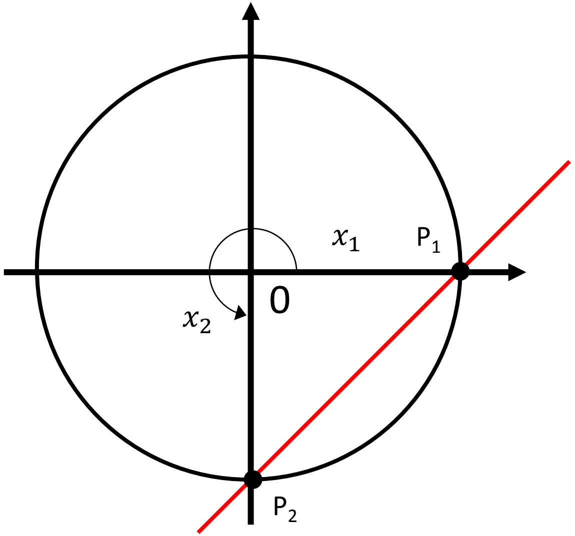
1° metodo: METODO GRAFICO

$$\boxed{\begin{matrix}\cos(x) = X \\ \sin(x) = Y\end{matrix}}$$

$$\begin{cases} Y - X + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = X - 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Risoluzione grafica del sistema: I punti di intersezione tra retta e circonferenza corrispondono alle soluzioni dell'equazione.



$$x = 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Nota Bene
Risolvendo algebricamente il sistema si ricavano i valori del coseno e del seno degli angoli che sono soluzione dell'equazione:

$$\begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} X = 0 \\ Y = -1 \end{cases}$$

Equazioni e disequazioni lineari

2° metodo: ANGOLO AGGIUNTO

$$a\sin(x) + b\cos(x) = r\sin(x+\alpha) \qquad \text{dove} \qquad r = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{b}{r} \\ \cos\alpha = \dfrac{a}{r} \end{cases}$$

$$\sin(x) - \cos(x) + 1 = 0$$

$$r = \sqrt{2} \qquad \begin{cases} \sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\alpha = +\dfrac{1}{\sqrt{2}} = +\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$$

...si riconduce ad un'equazione elementare.

Nota Bene
Il metodo dell'angolo aggiunto è utile anche per disegnare i grafici delle curve del tipo:

$$y = a\sin(x) + b\cos(x) + c$$

riconducendole alla forma:

$$y = r\sin(x+\alpha) + c$$

Equazioni e disequazioni lineari

3° metodo: FORMULE PARAMETRICHE

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

dove: $t = \tan\frac{x}{2}$ $\quad (x \neq \pi + 2k\pi)$

$$\sin(x) - \cos(x) + 1 = 0$$

Verifico se $x = \pi + 2k\pi$ è soluzione. Se lo fosse, andrebbe aggiunta alle soluzioni finali dell'equazione.

$$\sin(\pi + 2k\pi) - \cos(\pi + 2k\pi) + 1 = 0$$

$0 + 1 + 1 = 0$ ✘ (non è soluzione)

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 = 0$$

$\mathrm{C.E.}\ \ x \neq \pi + 2k\pi$

$2t^2 + 2t = 0$ …si riconduce ad un'equazione elementare.

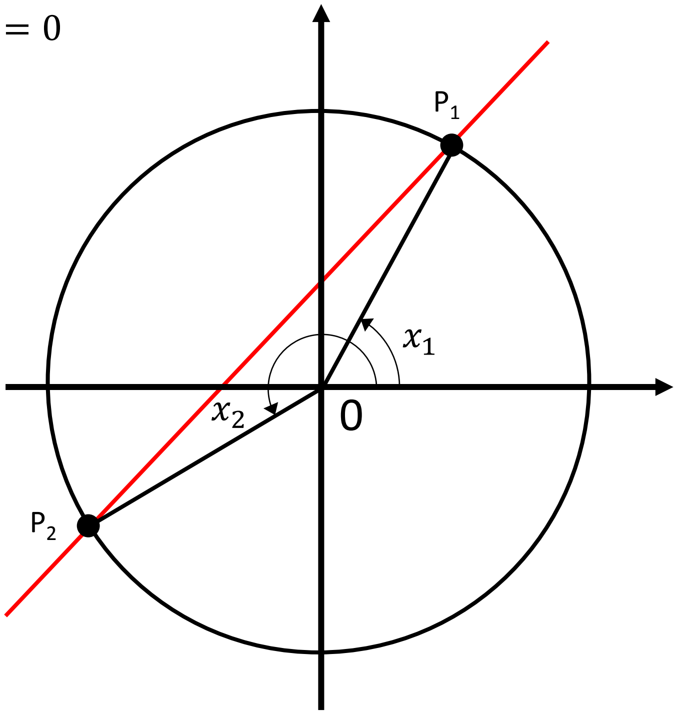
Equazioni e disequazioni lineari

Es. 2 $2\sin(3x) - 2\cos(3x) + 1 - \sqrt{3} = 0$

$$\boxed{\begin{array}{c} \cos(3x) = X \\ \sin(3x) = Y \end{array}}$$

$$\begin{cases} 2Y - 2X + 1 - \sqrt{3} = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = X + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



$$3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \quad \vee \quad x = \frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi$$

Verifica

La retta sembra passare per i punti:

$P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Verifichiamo se le coordinate di questi punti soddisfano l'equazione della retta:

P_1: $2\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{1}{2} + 1 - \sqrt{3} = 0$ ✓

P_2: $-2\frac{1}{2} + 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \sqrt{3} = 0$ ✓

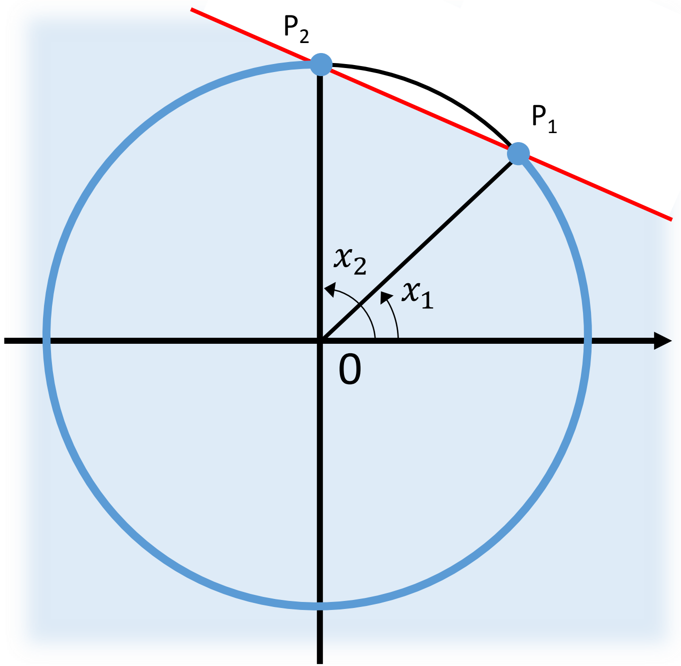
Equazioni e disequazioni lineari

Es. 3 $\quad \sin(x) + \left(\sqrt{2} - 1\right)\cos(x) - 1 \leq 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x) &= X \\ \sin(x) &= Y \end{aligned}}$$

$$\begin{cases} Y + (\sqrt{2} - 1)X - 1 \leq 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y \leq (1 - \sqrt{2})X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



Risoluzione grafica del sistema: intersezione tra un semipiano e la circonferenza goniometrica.

$$-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Nota Bene

La disequazione

$$aX + bY + c \lesseqgtr 0$$

rappresenta un semipiano avente come origine la retta di equazione

$$aX + bY + c = 0.$$

Per sapere di quale dei due semipiani si tratta, si può considerare un punto qualunque appartenente ad uno dei due semipiani (ad esempio l'origine) e sostituire le sue coordinate nella disequazione. Se la verificano, il punto appartiene al semipiano descritto dalla disequazione. Se non la verificano, il punto non vi appartiene.

Equazioni e disequazioni omogenee

$$a\sin^2(x) + b\sin(x)\cos(x) + c\cos^2(x) + d \lesseqgtr 0$$

<u>Es. 1</u> $\sin^2(x) + \left(1-\sqrt{3}\right)\sin(x)\cos(x) - \sqrt{3}\cos^2(x) = 0$

<u>1° metodo: ABBASSAMENTO DI GRADO</u>

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$\frac{1-\cos(2x)}{2} + \left(1-\sqrt{3}\right)\frac{\sin(2x)}{2} - \sqrt{3}\,\frac{1+\cos(2x)}{2} = 0$$

$$\left(1-\sqrt{3}\right)\sin(2x) - \left(1+\sqrt{3}\right)\cos(2x) + 1 - \sqrt{3} = 0$$

…si riconduce ad un'equazione lineare.

Equazioni e disequazioni omogenee

<u>2° metodo: DIVISIONE PER $\cos^2(x)$</u>

$$\sin^2(x) + \left(1-\sqrt{3}\right)\sin(x)\cos(x) - \sqrt{3}\cos^2(x) = 0$$

Verifico se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è soluzione. Se lo fosse, andrebbe aggiunta alle soluzioni finali dell'equazione.

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) + \left(1-\sqrt{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) - \sqrt{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = 0$$

$1 + 0 + 0 = 0$ ✘ (non è soluzione)

$$\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \left(1-\sqrt{3}\right)\frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)} - \sqrt{3}\,\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = 0 \qquad \mathrm{C.E.}\ \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

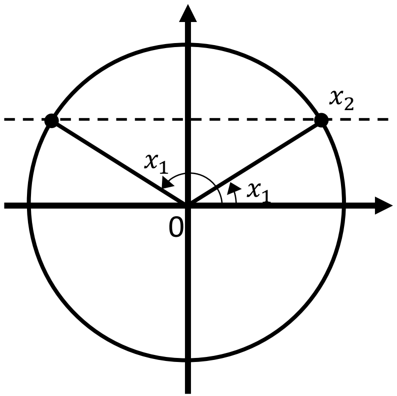
$$\tan^2(x) + \left(1-\sqrt{3}\right)\tan(x) - \sqrt{3} = 0$$

…si riconduce ad un'equazione elementare.

Nota Bene
Nel caso in cui fosse presente il termine noto ($d \neq 0$), prima di applicare questo metodo l'equazione va resa omogenea molti-plicando il termine noto per $(\cos^2(x) + \sin^2(x))$.

Equazioni particolari

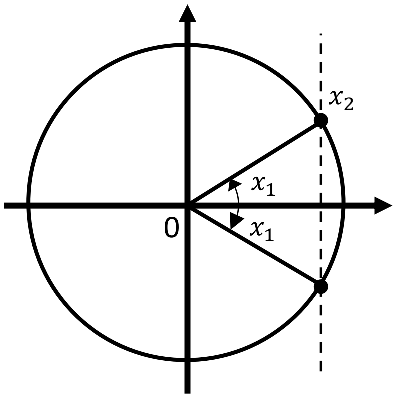
$\sin(x_1) = \sin(x_2)$



$x_1 = x_2 + 2k\pi \quad \vee$

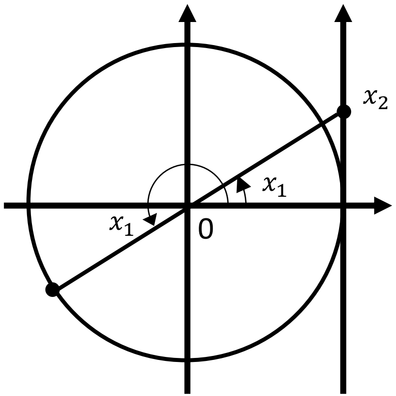
$x_1 = \pi - x_2 + 2k\pi$

$\cos(x_1) = \cos(x_2)$



$x_1 = \pm x_2 + 2k\pi$

$\tan(x_1) = \tan(x_2)$



$x_1 = x_2 + k\pi$

Altre formule utili:

- $-\sin(x) = \sin(-x)$
- $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- $-\tan(x) = \tan(-x)$
- $-\cos(x) = \cos(\pi - x)$
- $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Equazioni particolari

Es. 1 $\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(5x)$

$$3x+\frac{\pi}{2}=5x+2k\pi \;\vee\; 3x+\frac{\pi}{2}=\pi-5x+2k\pi$$

$$-2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \;\vee\; 8x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi \;\vee\; x=\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{4}$$

Es. 2 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=-\cos\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$

$$\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\pi-\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)\right)$$

$$3x+\frac{\pi}{2}=\pm\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+2k\pi$$

$$3x+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}-x+2k\pi \;\vee\; 3x+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}+x+2k\pi$$

$$4x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \;\vee\; 2x=-\frac{3}{4}\pi+2k\pi$$

$$x=-\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{2} \;\vee\; x=-\frac{3}{8}\pi+k\pi$$

Es. 3 $\cos(2x)=-\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)$

$$\cos(2x)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)$$

$$\frac{\pi}{2}-2x=\frac{2}{3}\pi-x+2k\pi \;\vee$$

$$\vee\; \frac{\pi}{2}-2x=\pi-\frac{2}{3}\pi+x+2k\pi$$

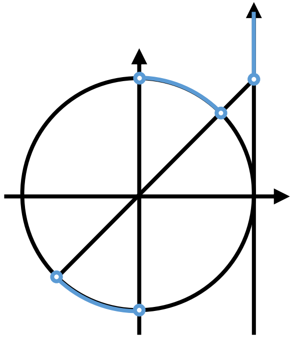
$$x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \;\vee\; x=\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi$$

Disequazioni fratte e prodotto

<u>Es. 1</u> $\dfrac{\tan(x) - 1}{2\cos(x) - 1} \geq 0$

N $\tan(x) - 1 > 0$

$\tan(x) > 1$

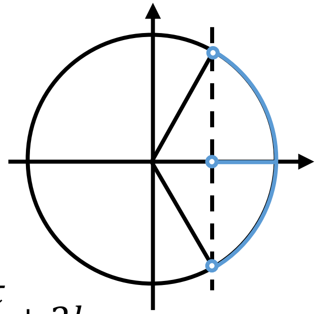


$\text{C.E.} \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

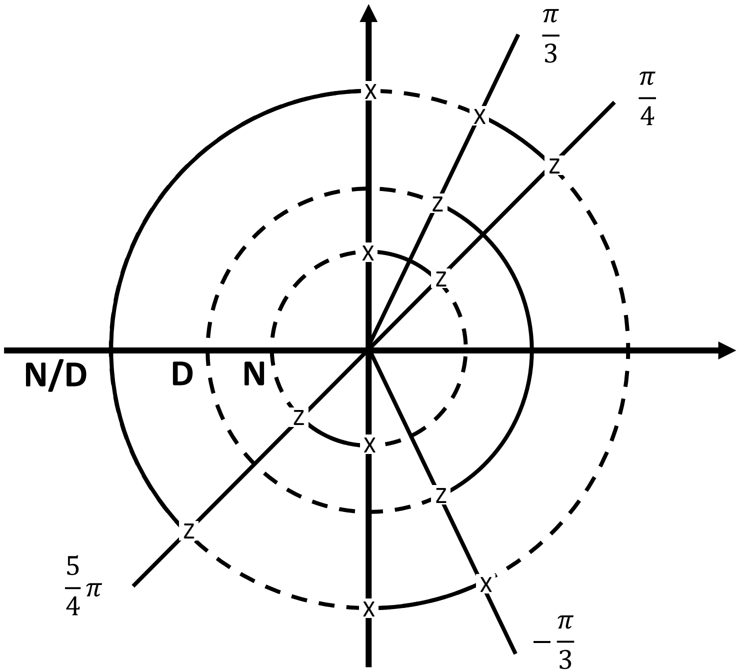
$\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

D $2\cos(x) + 1 > 0$

$\cos(x) > \dfrac{1}{2}$



$-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$



$\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\vee \quad \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \dfrac{5}{4}\pi + 2k\pi$

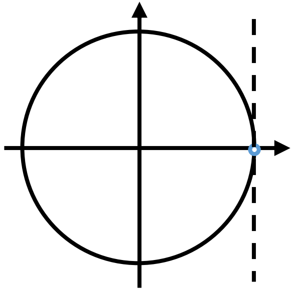
Disequazioni fratte e prodotto

<u>Es. 2</u> $$\frac{\cos(x)-1}{\cos(2x)+\sin(2x)} \geq 0$$

N $\cos(x)-1>0$

$\cos(x)>1$

$S=\emptyset$

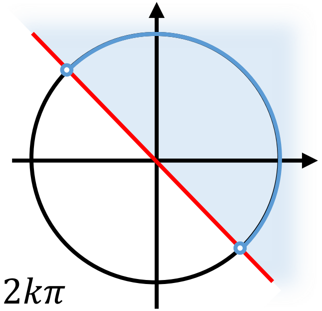


D $\cos(2x)+\sin(2x)>0$

$\boxed{\alpha = 2x}$

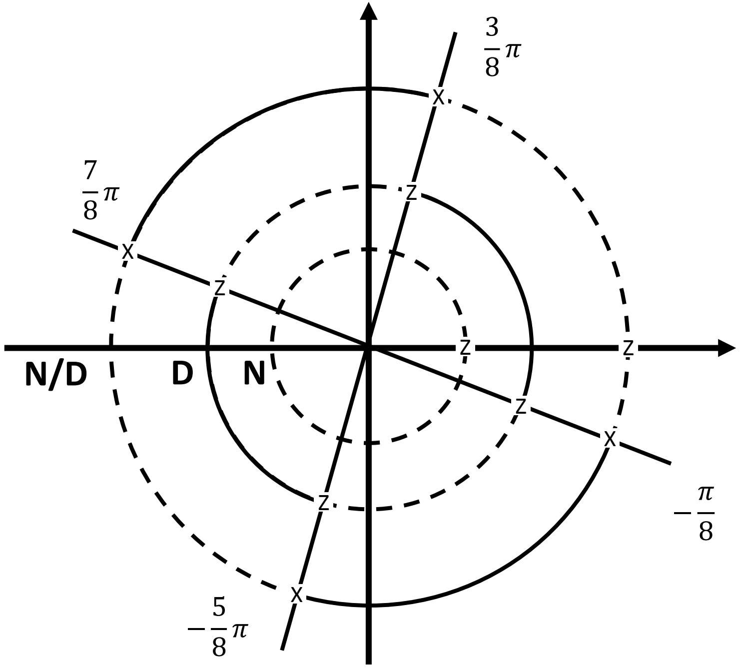
$\cos(\alpha)+\sin(\alpha)>0$

$$\begin{cases} X+Y>0 \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$$



$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi<\alpha<\frac{3}{4}\pi+2k\pi$$

$$-\frac{\pi}{8}+2k\pi<x<\frac{3}{8}\pi+2k\pi$$



$$x=2k\pi \quad \vee \quad \frac{3}{8}\pi+k\pi<x<\frac{7}{8}\pi+k\pi$$