Algebra

- **Condizioni di Esistenza**

$\dfrac{N(x)}{D(x)}$	$\Longrightarrow$	$D(x) \neq 0$	$\tan f(x)$	$\Longrightarrow$	$f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$\sqrt[n]{A(x)}$ con n pari	$\Longrightarrow$	$A(x) \geq 0$	$\sec f(x)$	$\Longrightarrow$	$f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$\log_{A(x)} B(x)$	$\Longrightarrow$	$\begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) \neq 1 \\ B(x) > 0 \end{cases}$	$\operatorname{cosec} f(x)$	$\Longrightarrow$	$f(x) \neq k\pi$
$f(x)^{\alpha}$ con $\alpha > 0$ irraz.	$\Longrightarrow$	$f(x) \geq 0$	$\operatorname{cotan} f(x)$	$\Longrightarrow$	$f(x) \neq k\pi$
$f(x)^{\alpha}$ con $\alpha < 0$ irraz.	$\Longrightarrow$	$f(x) > 0$	$\arccos f(x)$	$\Longrightarrow$	$-1 \leq f(x) \leq 1$
$f(x)^{g(x)}$	$\Longrightarrow$	$f(x) > 0$	$\arcsin f(x)$	$\Longrightarrow$	$-1 \leq f(x) \leq 1$

Non hanno particolari condizioni:

$f^2(x) \qquad \sqrt[3]{f(x)} \qquad |f(x)| \qquad \cos f(x) \qquad \sin f(x) \qquad 2^{f(x)} \qquad \arctan f(x)$

- **Equazioni di secondo grado**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

Se $\Delta > 0$: due soluzioni distinte $\quad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Se $\Delta = 0$: due soluzioni coincidenti $\quad x_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$

Se $\Delta < 0$: equazione impossibile

- **Scomposizione di un trinomio di secondo grado**

Se $\Delta > 0$: $\quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Se $\Delta = 0$: $\quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \qquad$ (il trinomio è un quadrato)

Se $\Delta < 0$: $\quad ax^2 + bx + c \quad$ non si può scomporre in $\mathbb{R}$

- **Definizione di valore assoluto**

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x) & \text{se } A(x) \geq 0 \\ -A(x) & \text{se } A(x) < 0 \end{cases}$$

Equazioni e disequazioni con un valore assoluto

Scorciatoie

$$|A(x)| = k \quad \Longrightarrow \quad A(x) = -k \ \vee \ A(x) = k$$

$$|A(x)| > k \quad \Longrightarrow \quad A(x) < -k \ \vee \ A(x) > k$$

$$|A(x)| < k \quad \Longrightarrow \quad -k < A(x) < k$$

Caso generale

$$|A(x)| \gtreqless B(x) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) \gtreqless B(x) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) \gtreqless B(x) \end{cases}$$

Teorema d'oro

Elevando entrambi i membri di un'equazione o disequazione ad un esponente *dispari* si ottiene un'equazione o disequazione equivalente.

Elevando entrambi i membri di un'equazione o disequazione ad un esponente *pari* si ottiene un'equazione o disequazione equivalente *solo se entrambi i membri sono positivi o nulli*.

Teorema d'argento

Estraendo una radice ad indice *dispari* di entrambi i membri di un'equazione o disequazione si ottiene un'equazione o disequazione equivalente.

Estraendo una radice ad indice *pari* di entrambi i membri di un'equazione o disequazione si ottiene un'equazione o disequazione equivalente *solo se entrambi i membri sono positivi o nulli*.

Attenzione ai moduli: se n è pari, $\sqrt[n]{A^n(x)} = |A(x)|$.

Equazioni e disequazioni irrazionali con radici quadrate

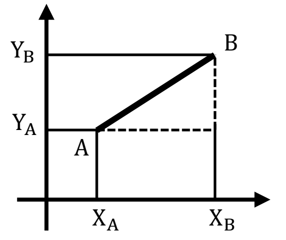
$$\sqrt{A(x)} = B(x) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} (A(x) \geq 0) \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = B^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > B^2(x) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) < B^2(x) \end{cases}$$

Geometria Analitica

- **Lunghezza di un segmento di estremi $\mathbf{A(X_A, Y_A)}$ e $\mathbf{B(X_B, Y_B)}$**



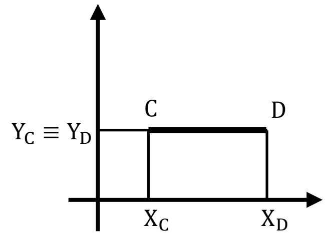
$$\overline{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

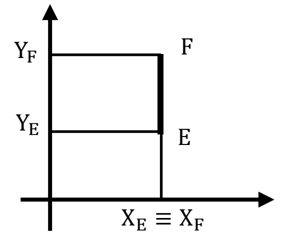
Caso particolare: il segmento è orizzontale

$$\overline{CD} = |X_D - X_C|$$

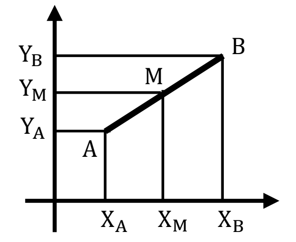
Caso particolare: il segmento è verticale

$$\overline{EF} = |Y_F - Y_E|$$



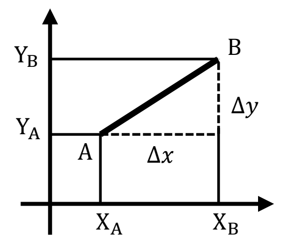


- **Punto medio di un segmento di estremi $\mathbf{A(X_A, Y_A)}$ e $\mathbf{B(X_B, Y_B)}$**



$$X_M = \frac{X_A + X_B}{2} \qquad Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2}$$

- **Coefficiente angolare di un segmento di estremi $\mathbf{A(X_A, Y_A)}$ e $\mathbf{B(X_B, Y_B)}$**



$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

- **Equazione della retta**

Equazione implicita: $ax + by + c = 0$

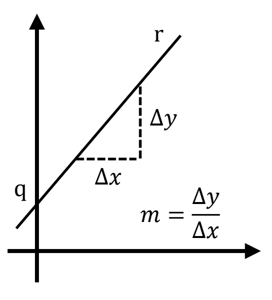
Equazione esplicita: $y = mx + q$

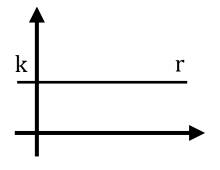
Caso particolare: retta orizzontale $y = k$

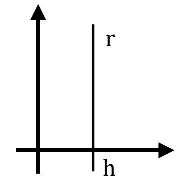
Caso particolare: retta verticale $x = h$

Due rette sono parallele se e solo se $m_1 = m_2$

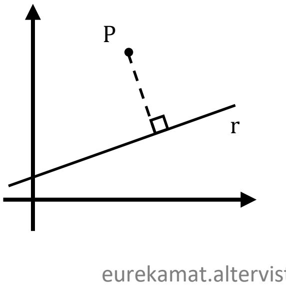
Due rette sono perpendicolari se e solo se $m_1 = -\frac{1}{m_2}$







- **Distanza del punto $\mathbf{P(X_P, Y_P)}$ dalla retta $\mathbf{r}$: $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$**



$$d(P, r) = \frac{|a\,X_P + b\,Y_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- **Equazione della retta dati due punti di passaggio $\mathbf{A(X_A, Y_A)}$ e $\mathbf{B(X_B, Y_B)}$**

$$\frac{x - X_A}{X_B - X_A} = \frac{y - Y_A}{Y_B - Y_A}$$

- **Equazione della retta dato il coefficiente angolare m e un punto di passaggio $\mathbf{P(X_P, Y_P)}$**

$$y - Y_P = m(x - X_P)$$

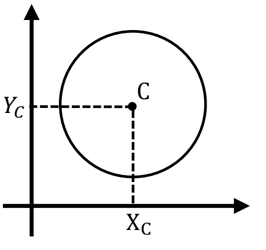
- **Equazione della circonferenza**

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

rappresenta una circonferenza se $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0$

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

$$r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$



- **Equazione di una circonferenza dato il centro $\mathbf{C(X_C, Y_C)}$ e il raggio r**

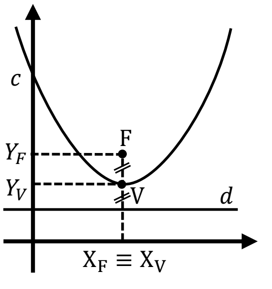
$$(x - X_C)^2 + (y - Y_C)^2 = r^2$$

- **Equazione della parabola**

Parabola con asse verticale: $y = ax^2 + bx + c$

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \qquad \overline{FV} = \frac{1}{|4a|}$$

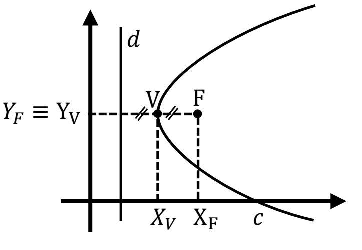
$$F\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}\right) \qquad d\colon\ y = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}$$



Parabola con asse orizzontale: $x = ay^2 + by + c$

$$V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right) \qquad \overline{FV} = \frac{1}{|4a|}$$

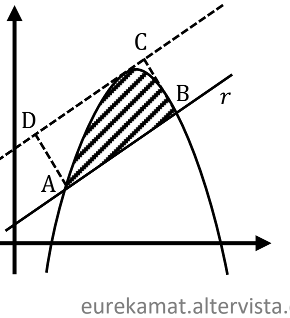
$$F\left(-\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}, -\frac{b}{2a}\right) \qquad d\colon x = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}$$



Due parabole sono congruenti se e solo se $|a_1| = |a_2|$

- **Area di un segmento parabolico**

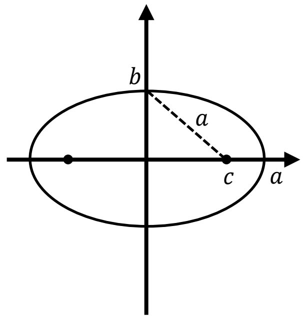
$$A = \frac{2}{3}\, A_{ABCD}$$



• Equazione dell'ellisse

Ellisse coi fuochi sull'asse x

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{con } a>b$$



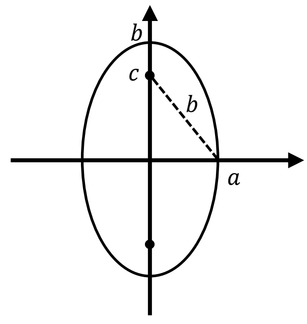
$cost=2a$ $\quad V_1(a,0) \quad V_2(-a,0)$

$0\le e=\dfrac{c}{a}<1$ $\quad V_3(0,b) \quad V_4(0,-b)$

$a^2=b^2+c^2$ $\quad F_1(c,0) \quad F_2(-c,0)$

Ellisse coi fuochi sull'asse y

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{con } b>a$$



$cost=2b$ $\quad V_1(a,0) \quad V_2(-a,0)$

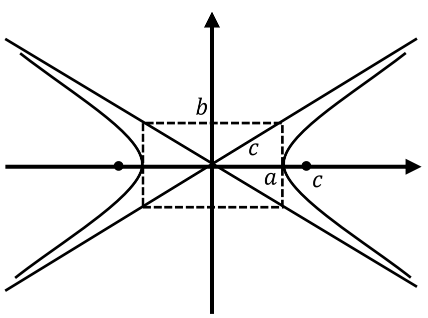
$0\le e=\dfrac{c}{b}<1$ $\quad V_3(0,b) \quad V_4(0,-b)$

$b^2=a^2+c^2$ $\quad F_1(0,c) \quad F_2(0,-c)$

• Equazione dell'iperbole riferita ai propri assi di simmetria

Iperbole coi fuochi sull'asse x

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



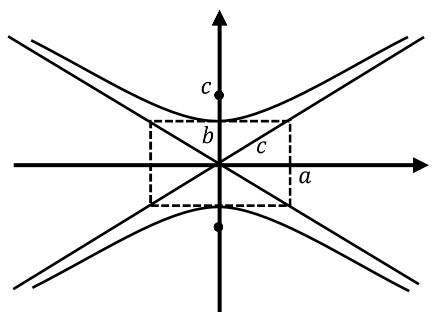
$cost=2a$ $\quad V_1(a,0) \quad V_2(-a,0)$

$e=\dfrac{c}{a}>1$ $\quad F_1(c,0) \quad F_2(-c,0)$

$c^2=a^2+b^2$ $\quad$ asintoti: $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

Iperbole coi fuochi sull'asse y

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$cost=2b$ $\quad V_1(0,b) \quad V_2(0,-b)$

$e=\dfrac{c}{b}>1$ $\quad F_1(0,c) \quad F_2(0,-c)$

$c^2=a^2+b^2$ $\quad$ asintoti: $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

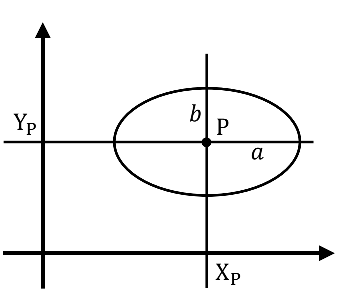
Un'iperbole si dice equilatera se e solo se i suoi asintoti sono perpendicolari

se e solo se i suoi asintoti sono le bisettrici $y=\pm x$

se e solo se $a=b$

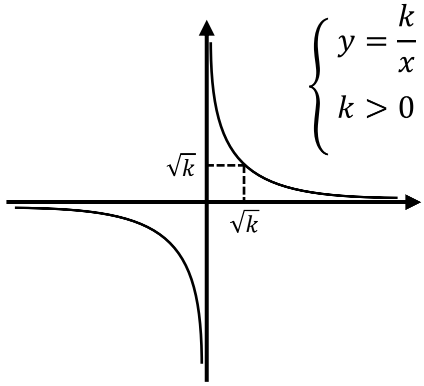
• Equazione di ellissi o iperboli traslate con centro nel punto $\mathbf{P(X_P,Y_P)}$

$$\pm\frac{(x-X_P)^2}{a^2}\pm\frac{(y-Y_P)^2}{b^2}=1$$

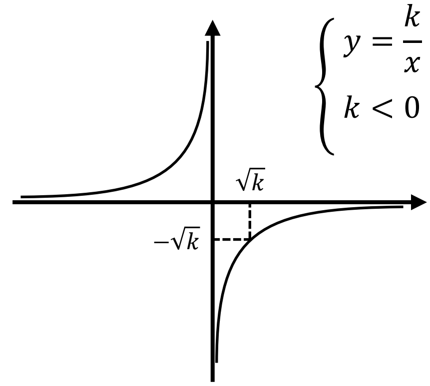


- **Equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti**

$$\begin{cases} y = \dfrac{k}{x} \\ k > 0 \end{cases}$$



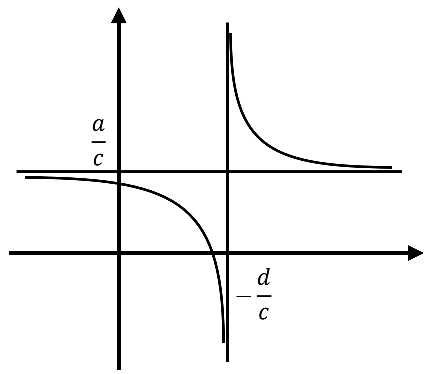
$$\begin{cases} y = \dfrac{k}{x} \\ k < 0 \end{cases}$$



- **Equazione della funzione omografica**

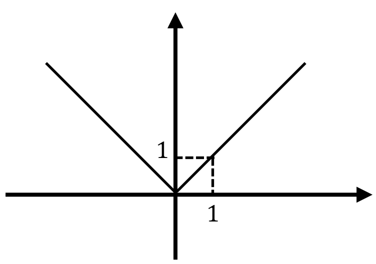
$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

con $c \neq 0$ e $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$

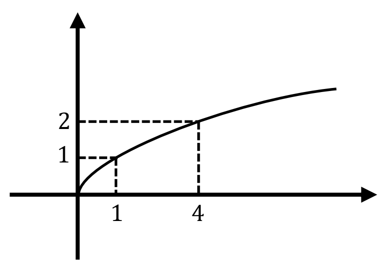


- **Altre curve**

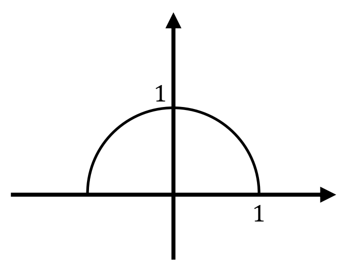
$y = |x|$



$y = \sqrt{x}$

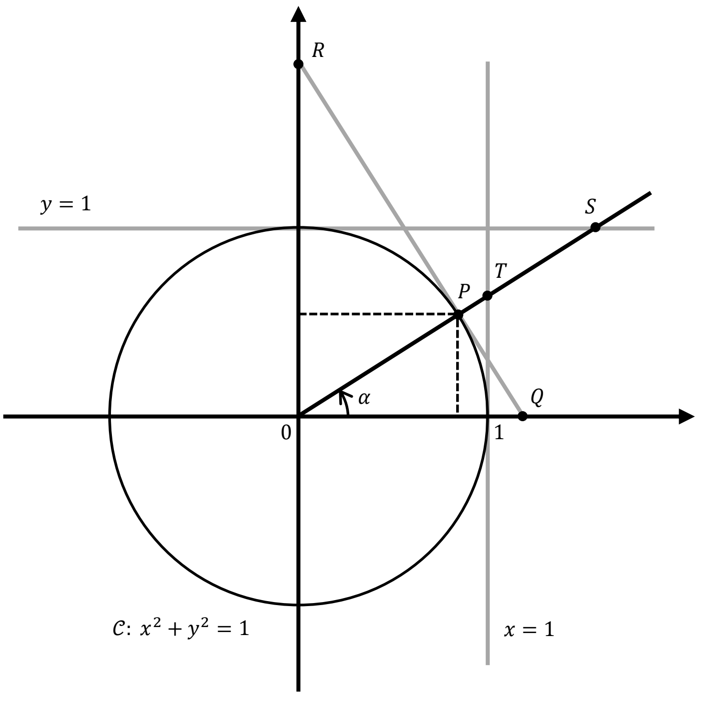


$y = \sqrt{1 - x^2}$



Goniometria e Trigonometria

• Principali funzioni goniometriche



$$\cos(\alpha) = X_P$$

$$\sin(\alpha) = Y_P$$

$$\tan(\alpha) = Y_T$$

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = X_Q$$

$$\mathrm{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)} = Y_R$$

$$\mathrm{cotan}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = X_S$$

• Prima proprietà fondamentale

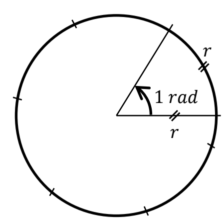
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

• Seconda proprietà fondamentale

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

• Radiante

Un radiante è l'ampiezza dell'angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di circonferenza avente la stessa lunghezza del raggio.

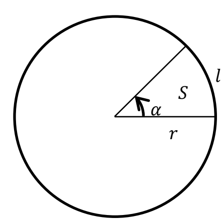


$$1\, rad \approx 57{,}3°$$

Vale la seguente proporzione tra la misura in gradi e in radianti di uno stesso angolo α:

$$\alpha(°) : \alpha(rad) = 180° : \pi$$

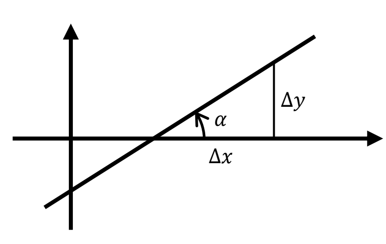
• Lunghezza dell'arco e area del settore circolare



$$\alpha : l = 2\pi : 2r\pi$$

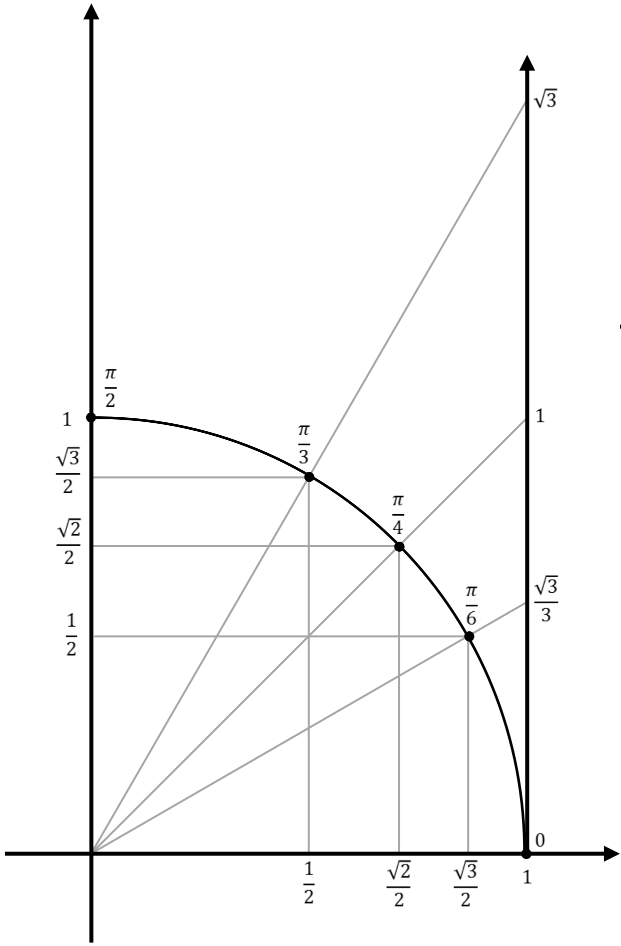
$$\alpha : S = 2\pi : \pi r^2$$

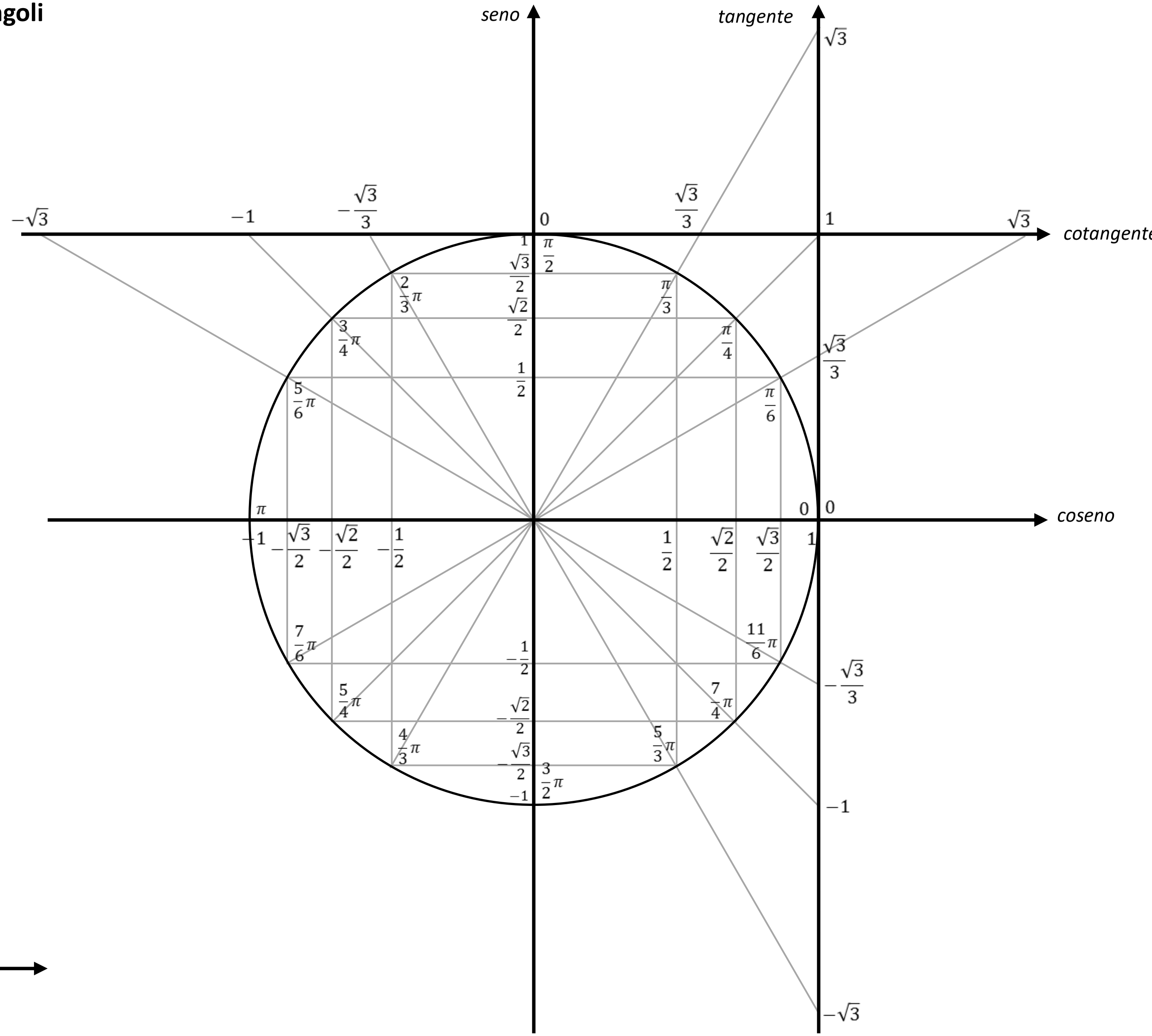
• Relazione tra angolo e coefficiente angolare di una retta



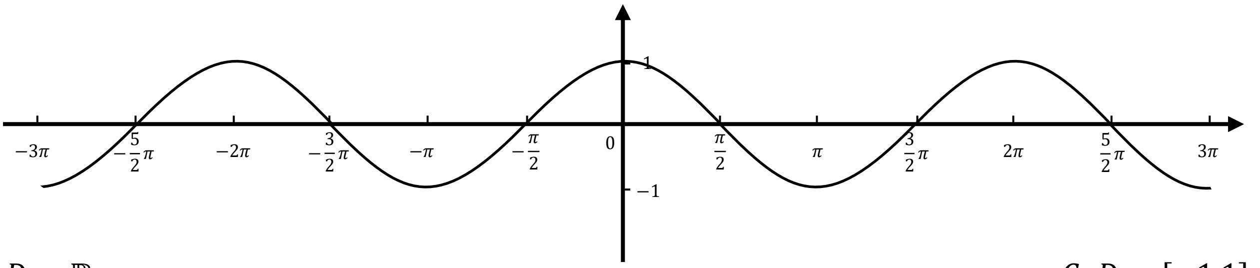
$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

- **Funzioni goniometriche dei principali angoli**



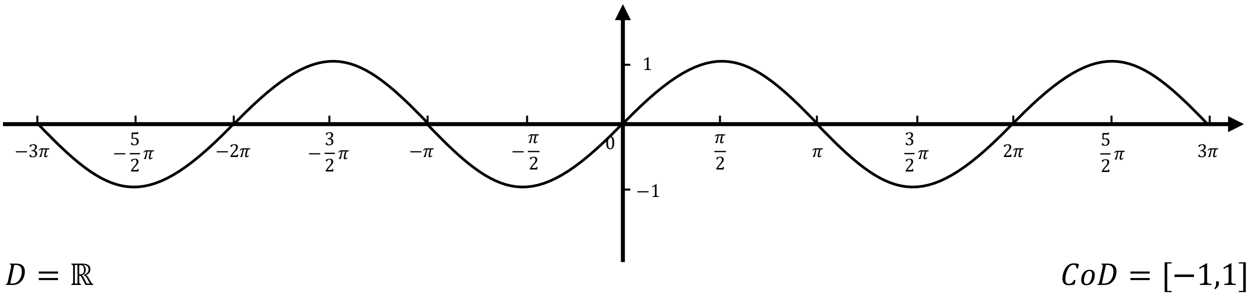


● **Grafico della funzione Coseno** $y = \cos(x)$



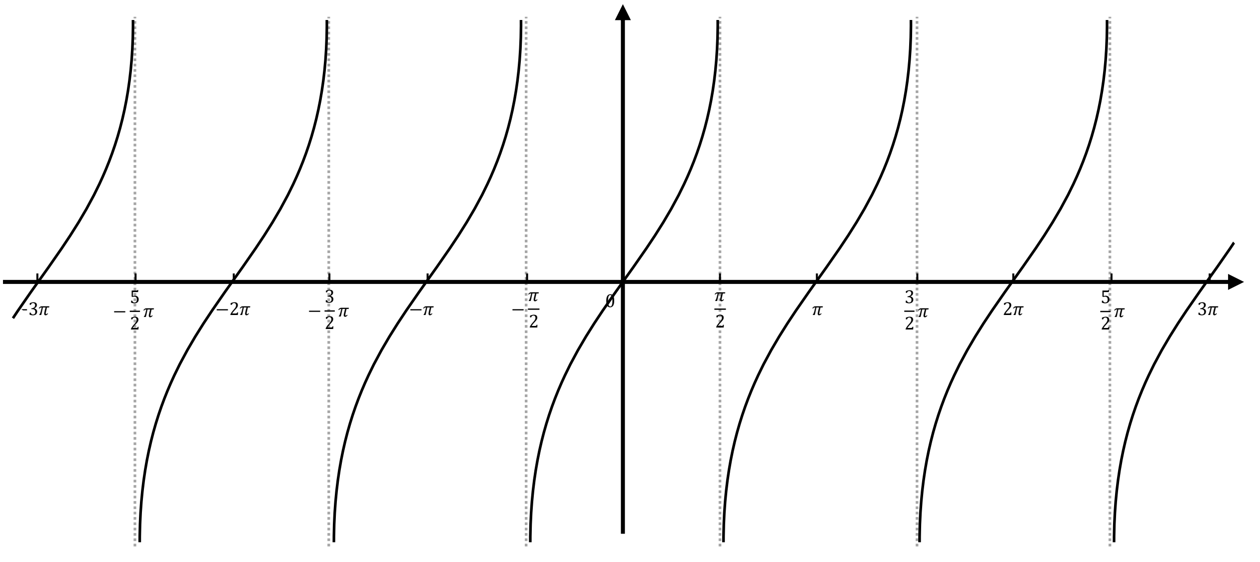
$D = \mathbb{R}$ $CoD = [-1,1]$

● **Grafico della funzione Seno** $y = \sin(x)$



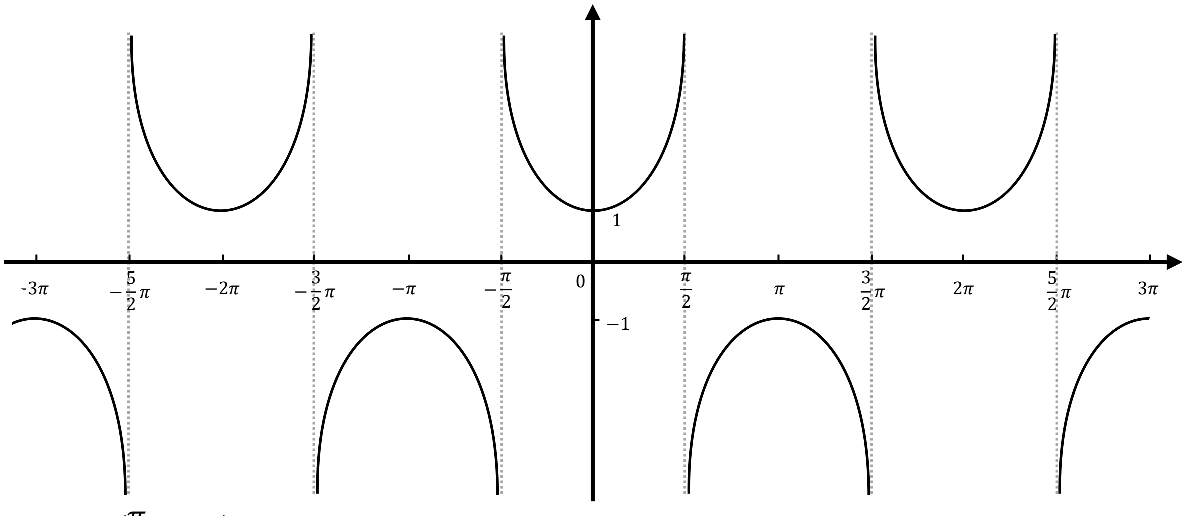
$D = \mathbb{R}$ $CoD = [-1,1]$

● **Grafico della funzione Tangente** $y = \tan(x)$



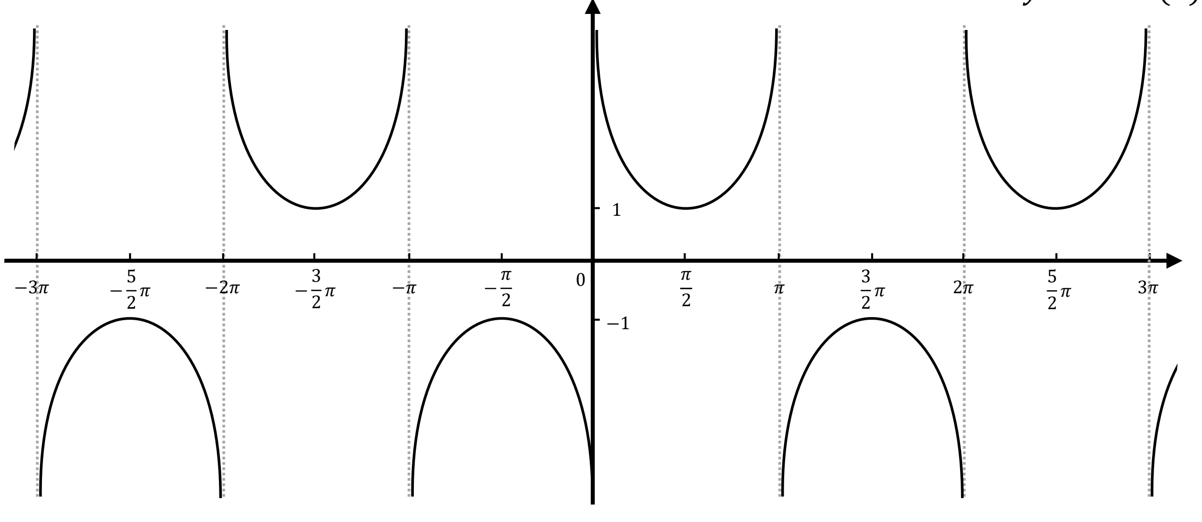
$D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $CoD = \mathbb{R}$

- **Grafico della funzione Secante** $y = \sec(x)$



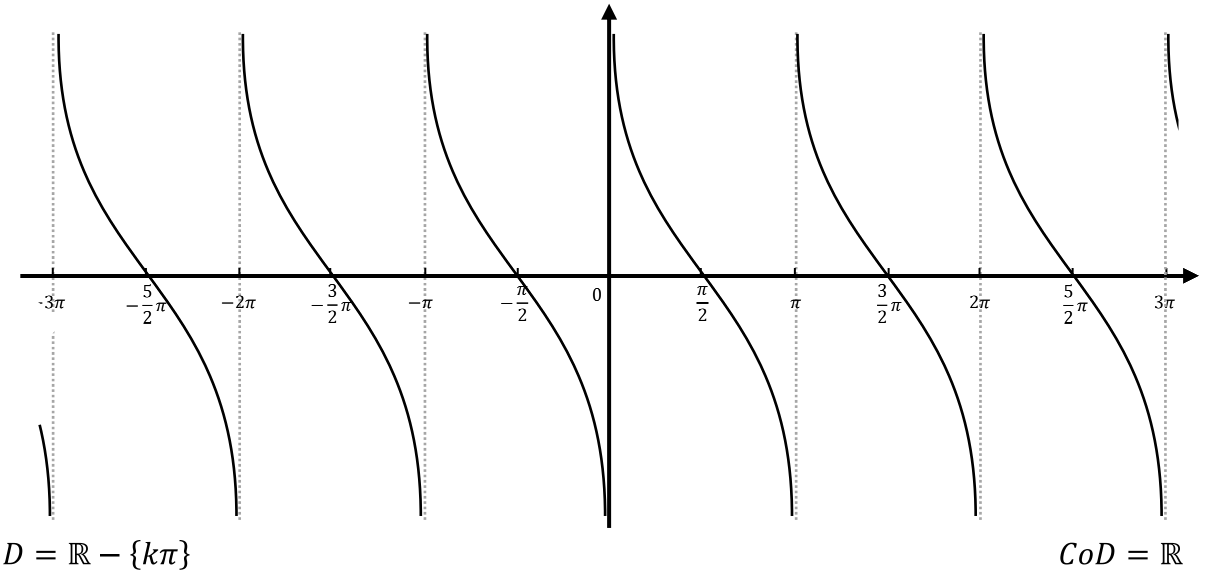
$D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $CoD =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

- **Grafico della funzione Cosecante** $y = \text{cosec}(x)$



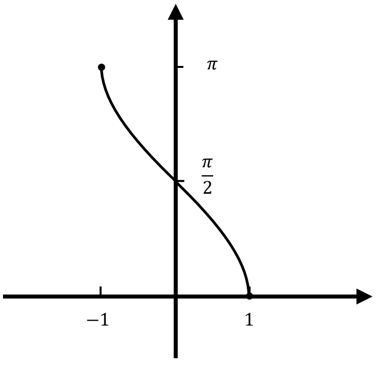
$D = \mathbb{R} - \{k\pi\}$ $CoD =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

- **Grafico della funzione Cotangente** $y = \text{cotan}(x)$



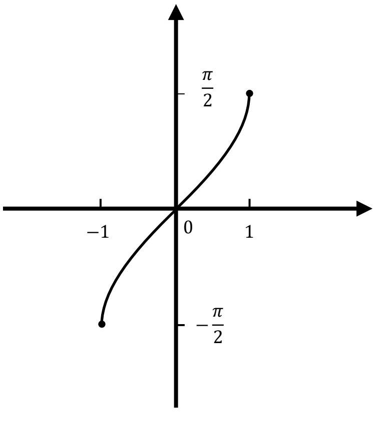
$D = \mathbb{R} - \{k\pi\}$ $CoD = \mathbb{R}$

- **Grafico della funzione Arcocoseno** $y = \arccos(x)$



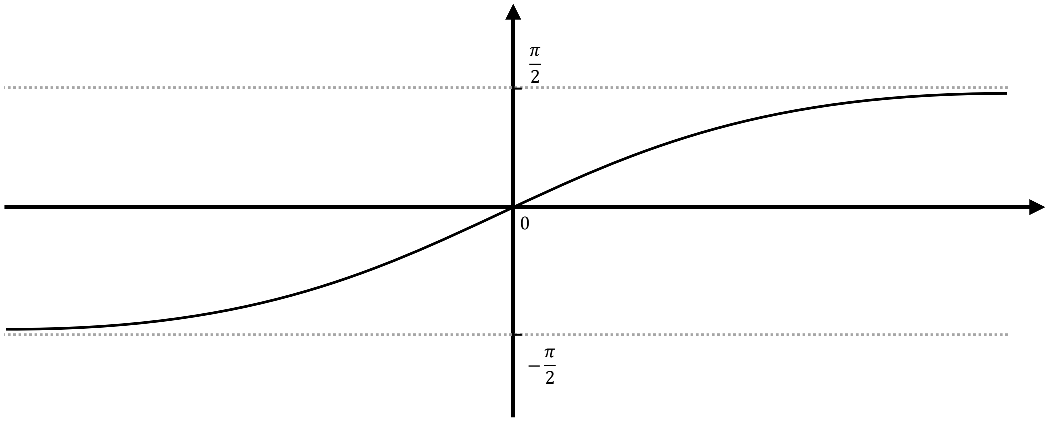
$D = [-1,1]$ $CoD = [0, \pi]$

- **Grafico della funzione Arcoseno** $y = \arcsin(x)$



$D = [-1,1]$ $CoD = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

- **Grafico della funzione Arcotangente** $y = \arctan(x)$



$D = \mathbb{R}$ $CoD = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

- **Formule di addizione e sottrazione**

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

- **Formule di duplicazione**

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ &= 2\cos^2\alpha-1\\ &= 1-2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

- **Formule di bisezione**

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

- **Formule per l’abbassamento di grado**

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

- **Formule parametriche**

$$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$$

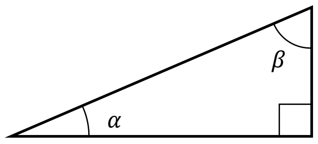
dove $t=\tan\frac{\alpha}{2}$

- **Triangoli rettangoli**

$$\cos\alpha=\frac{cat.adiacente}{ipotenusa}$$

$$\sin\alpha=\frac{cat.opposto}{ipotenusa}$$

$$\tan\alpha=\frac{cat.opposto}{cat.adiacente}$$

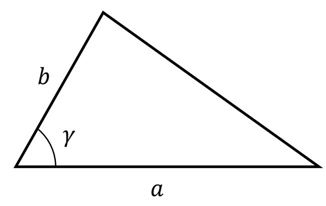


$$\cos\alpha=\sin\beta$$

$$\sin\alpha=\cos\beta$$

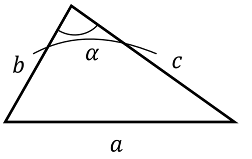
- **Area di un triangolo qualunque**

$$A=\frac{1}{2}a\,b\sin\gamma$$



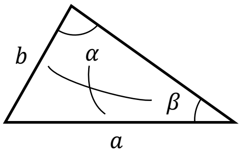
- **Teorema del coseno**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,a\,b\cos\alpha$$



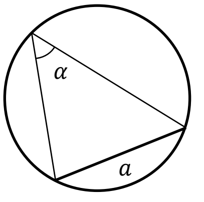
- **Teorema del seno**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

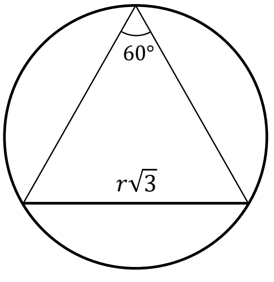


- **Teorema della corda**

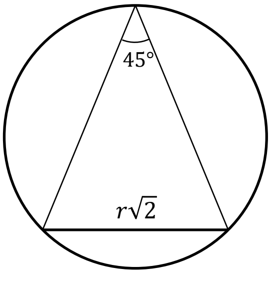
$$a = 2r\sin\alpha$$



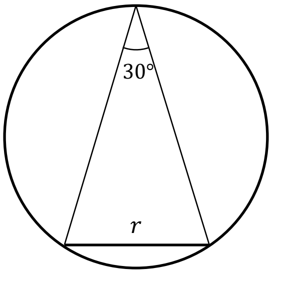
- **Corde notevoli e rispettivi angoli alla circonferenza**



Triangolo equilatero



Quadrato



Esagono regolare

Esponenziali e logaritmi

- **Proprietà delle potenze**

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

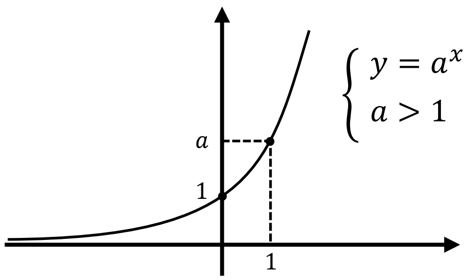
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$

3) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

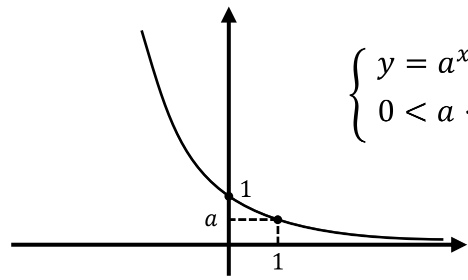
4) $a^n : b^n = (a : b)^n$

5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

- **Grafico della funzione esponenziale**



$$\begin{cases} y = a^x \\ a > 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = a^x \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

- **Definizione di logaritmo**

Il logaritmo in base a di b è quel numero c a cui va elevato a per ottenere b.

$$c = \log_a b \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$$

- **Proprietà dei logaritmi**

1) $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$

2) $\log_a b - \log_a c = \log_a (b : c)$

3) $n \cdot \log_a b = \log_a b^n$

3a) $\log_a b = -\log_a \dfrac{1}{b}$

4) $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$

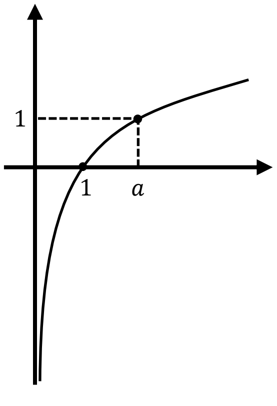
4a) $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

4b) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

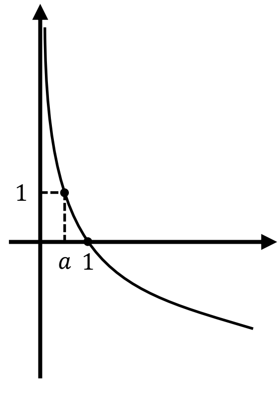
5) $\log_a b = \log_{a^n} b^n$

5a) $\log_a b = \log_{\frac{1}{a}} \dfrac{1}{b}$

- **Grafico della funzione logaritmica**



$$\begin{cases} y = \log_a x \\ a > 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = \log_a x \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

- **Formula per equazioni e disequazioni esponenziali**

$$b = a^{\log_a b}$$

Esempio: $a^x = b \quad \Longrightarrow \quad a^x = a^{\log_a b} \quad \Longrightarrow \quad x = \log_a b$

- **Formula per equazioni e disequazioni logaritmiche**

$$b = \log_a a^b$$

Esempio: $\log_a x = b \quad \Longrightarrow \quad \log_a x = \log_a a^b \quad \Longrightarrow \quad x = a^b$

- **Teorema per le disequazioni esponenziali**

Siano $a, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e sia $a > 1$. Allora:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x_2$$

Siano $a, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e sia $0 < a < 1$. Allora:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 > x_2$$

- **Teorema per le disequazioni logaritmiche**

Siano $a, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (con $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$), e sia $a > 1$. Allora:

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x_2$$

Siano $a, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (con $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$), e sia $0 < a < 1$. Allora:

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 > x_2$$

Geometria nello spazio

• Operazioni con i vettori

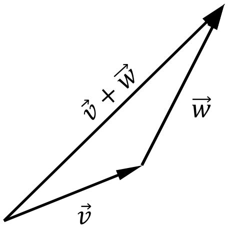
Siano dati due vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, e $k \in \mathbb{R}$.

<u>Modulo di un vettore</u>

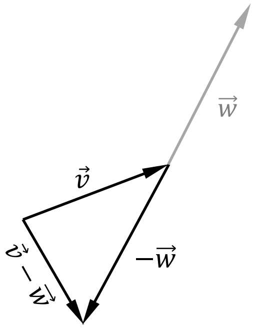
$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$$

<u>Addizione e sottrazione</u>

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$$



$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ v_3 - w_3 \end{pmatrix}$$

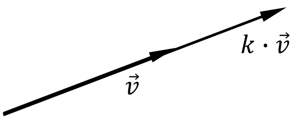


Se $\vec{v} \parallel \vec{w}$: $\quad |\vec{v} + \vec{w}| = |\vec{v}| + |\vec{w}|$

Se $\vec{v} \perp \vec{w}$: $\quad |\vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2}$

<u>Prodotto per uno scalare</u>

$$k \cdot \vec{v} = k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ k \cdot v_2 \\ k \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

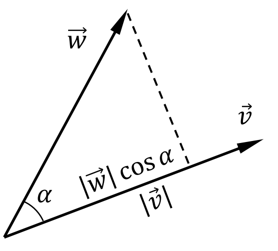


$$|k \cdot \vec{v}| = |k| \cdot |\vec{v}|$$

Due vettori sono paralleli se e solo se esiste $k \in \mathbb{R}_0$ tale che $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$

<u>Prodotto scalare</u>

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$$



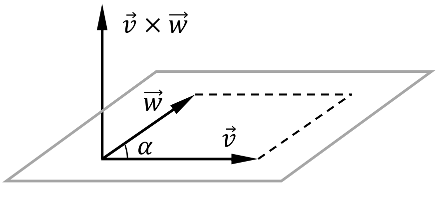
$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha$$

Due vettori sono perpendicolari se e solo se $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

(è il prodotto tra la lunghezza di un vettore e la lunghezza della proiezione dell'altro vettore su di esso)

<u>Prodotto vettoriale</u>

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$



$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin\alpha$$

Due vettori sono paralleli se e solo se $\vec{v} \times \vec{w} = 0$

(è un vettore di intensità pari all'area del parallelogramma generato dai due vettori e perpendicolare ad esso - regola mano dx)

• Lunghezza di un segmento di estremi A e B

$$\overline{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2} = \left|\vec{B} - \vec{A}\right|$$

Se il segmento è parallelo all'asse x: $\quad \overline{AB} = |X_B - X_A|$

Se il segmento è parallelo all'asse y: $\quad \overline{AB} = |Y_B - Y_A|$

Se il segmento è parallelo all'asse z: $\quad \overline{AB} = |Z_B - Z_A|$

• Punto medio di un segmento di estremi $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$

$$X_M = \frac{X_A + X_B}{2} \qquad Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2} \qquad Z_M = \frac{Z_A + Z_B}{2}$$

• Equazione del piano

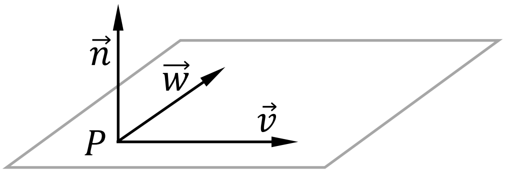
<u>Equazione cartesiana</u> $\quad ax + by + cz + d = 0$

<u>Equazione vettoriale</u>

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

<u>Equazione parametrica</u>

$$\begin{cases} x = X_P + sv_1 + tw_1 \\ y = Y_P + sv_2 + tw_2 \\ z = Z_P + sv_3 + tw_3 \end{cases}$$



Se il piano è perpendicolare all'asse x: $\quad x = k$

Se il piano è perpendicolare all'asse y: $\quad y = k$

Se il piano è perpendicolare all'asse z: $\quad z = k$

Da equazione cartesiana a parametrica: porre due variabili rispettivamente uguali a s e t, ricavare x, y e z.

Da equazione parametrica a cartesiana: ricavare s e t e sostituirli nella terza equazione del sistema.

Vettore normale al piano: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

• Equazione del piano dati un punto P e due generatori $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$$\pi\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• Equazione del piano dati tre punti P, Q e R

Siano $\vec{v} = Q - P$
$\vec{w} = R - P$

$$\pi\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• Equazione del piano dati un punto P e il vettore normale $\vec{n}(a, b, c)$

$$\pi\colon\ ax + by + cz + d = 0$$

(dove d viene determinato imponendo il passaggio per P)

• Perpendicolarità e parallelismo tra piani

Due piani sono perpendicolari se e solo se lo sono i loro vettori normali.
Due piani sono paralleli se e solo se lo sono i loro vettori normali.

• Vettore perpendicolare a due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$

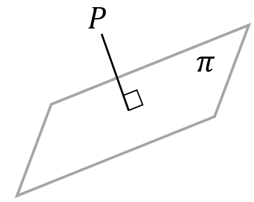
<u>Metodo 1</u> $\quad \vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$

<u>Metodo 2</u> $\quad$ Ricavare il vettore $\vec{n}$ normale ad un piano generato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

• Vettori perpendicolari a un vettore $\vec{n}$

Ricavare i vettori generatori di un piano avente vettore normale $\vec{n}$ (esistono infinite soluzioni).

Distanza di un punto P da un piano $\boldsymbol{\pi: ax + by + cz + d = 0}$



$$d(P,\pi) = \frac{|a\,X_P + b\,Y_P + c\,Z_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

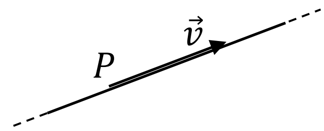
Equazione della retta

<u>Equazione cartesiana</u>

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

<u>Equazione vettoriale</u>

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$



<u>Equazione parametrica</u>

$$\begin{cases} x = X_P + tv_1 \\ y = Y_P + tv_2 \\ z = Z_P + tv_3 \end{cases}$$

Da equazione cartesiana a parametrica: porre una variabile uguale a t, ricavare x, y e z.

Da equazione parametrica a cartesiana: ricavare t e sostituirla nelle altre equazioni del sistema.

Equazione della retta dati un punto P e il generatore $\vec{v}$

$$r:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Equazione della retta dati due punti P e Q

Sia $\vec{v} = Q - P$

$$r:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Equazione della retta dati un punto P e il piano perpendicolare $\boldsymbol{\pi}$

Sia $\vec{n}$ la normale al piano

$$r:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Perpendicolarità e parallelismo tra piani

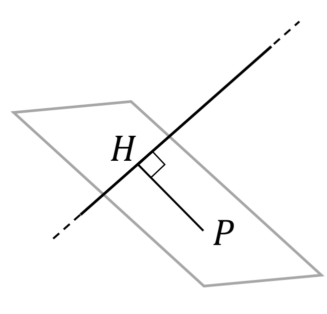
Due rette sono perpendicolari se e solo se lo sono i loro vettori generatori.

Due rette sono parallele se e solo se lo sono i loro vettori generatori.

Distanza di un punto P da una retta $\boldsymbol{r}$

Determinare H, il punto della retta di minima distanza da r: è il punto di intersezione tra r e il piano passante per P e perpendicolare a r.

$$d(P,r) = \overline{PH}$$



Equazione della superficie sferica

Equazione esplicita: $(x - X_C)^2 + (y - Y_C)^2 + (z - Z_C)^2 = r^2$

Equazione esplicita: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right) \qquad r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{c}{2}\right)^2 - d}$$

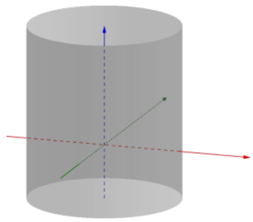
se $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{c}{2}\right)^2 - d \geq 0$

- **Equazione del cilindro di raggio r**

$x^2 + y^2 = r^2$ (asse: asse z)

$y^2 + z^2 = r^2$ (asse: asse y)

$z^2 + x^2 = r^2$ (asse: asse x)

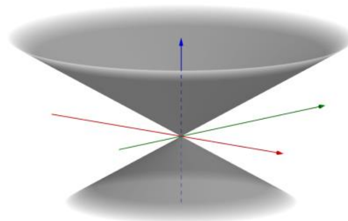


- **Equazione del cono**

$x^2 + y^2 = k^2 z^2$ (asse: asse z)

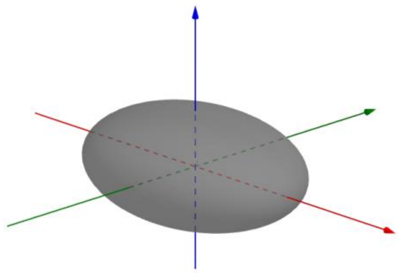
$y^2 + z^2 = k^2 x^2$ (asse: asse y)

$z^2 + x^2 = k^2 y^2$ (asse: asse x)



- **Equazione dell'ellissoide**

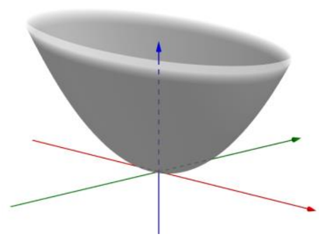
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



- **Equazione del paraboloide ellittico**

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ (asse: asse z)

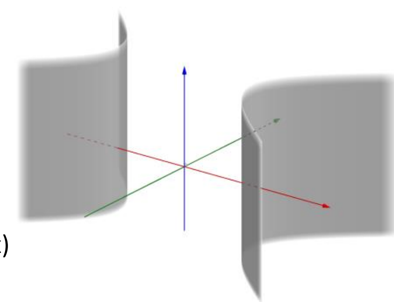
$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 2x$ (asse: asse y) $\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 2y$ (asse: asse x)



- **Equazione del paraboloide iperbolico (sella)**

$\pm\frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2} = 1$ (asse: asse z)

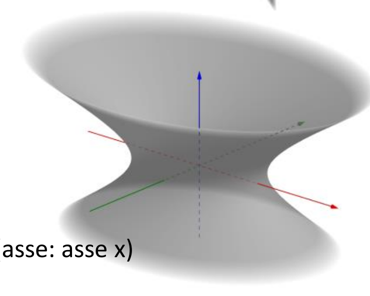
$\pm\frac{y^2}{a^2} \mp \frac{z^2}{b^2} = 1$ (asse: asse y) $\pm\frac{z^2}{a^2} \mp \frac{x^2}{b^2} = 1$ (asse: asse x)



- **Equazione dell'iperboloide a una falda**

$+\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (asse: asse z)

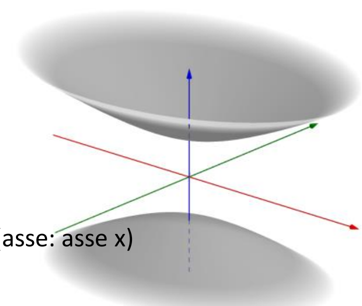
$+\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (asse: asse y) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (asse: asse x)



- **Equazione dell'iperboloide a una falda**

$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (asse: asse z)

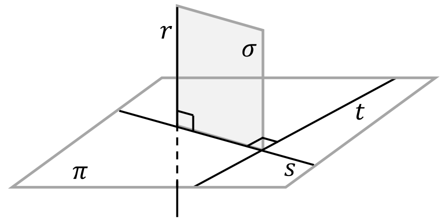
$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (asse: asse y) $+\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (asse: asse x)



- **Teorema delle tre perpendicolari**

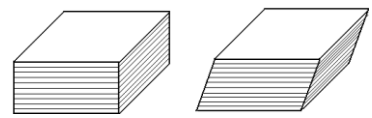
Se dal piede di una perpendicolare ad un piano si manda la perpendicolare a una qualunque retta del piano, quest'ultima risulta perpendicolare al piano delle prime due.

$$\begin{cases} r \perp \pi \\ s \perp t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t \perp \sigma$$



- **Principio di Cavalieri**

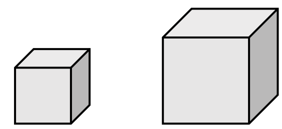
Due solidi che possono essere disposti in modo che ogni piano parallelo ad uno dato li tagli secondo sezioni equivalenti, sono equivalenti.



- **Proporzioni tra solidi**

Se due solidi Γ_1 e Γ_2 sono simili:

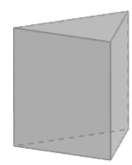
$$S_1 : S_2 = l_1^2 : l_2^2 \qquad V_1 : V_2 = l_1^3 : l_2^3$$



- **Superfici e volumi dei principali solidi**

<u>Prisma</u>

$$S = 2S_B + S_L \qquad V = S_B \cdot h$$

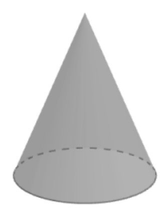


<u>Cilindro</u>

$$S = 2S_B + S_L = 2\pi r^2 + 2r\pi h \qquad V = S_B \cdot h$$

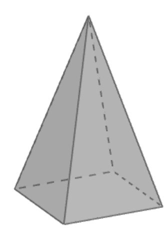
<u>Cono</u>

$$S = S_B + S_L = \pi r^2 + \pi r a \qquad V = \frac{1}{3}\, S_B \cdot h$$



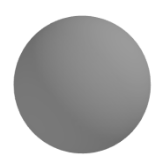
<u>Piramide</u>

$$S = S_B + S_L \qquad V = \frac{1}{3}\, S_B \cdot h$$

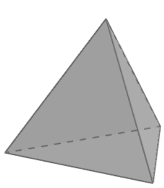


<u>Sfera</u>

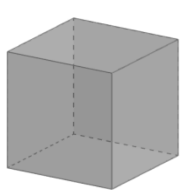
$$S = 4\pi r^2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



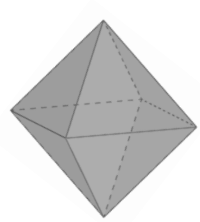
- **Solidi platonici**



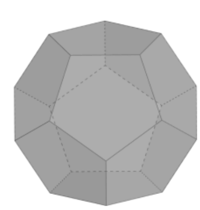
<u>Tetraedro</u>
4 tr. equilateri
4 vertici



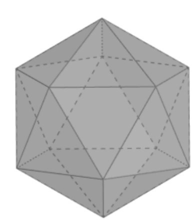
<u>Esaedro</u>
6 quadrati
8 vertici



<u>Ottaedro</u>
8 tr. equilateri
6 vertici



<u>Dodecaedro</u>
12 pentagoni
20 vertici



<u>Icosaedro</u>
20 tr. equilateri
12 vertici