L'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

Annotazioni

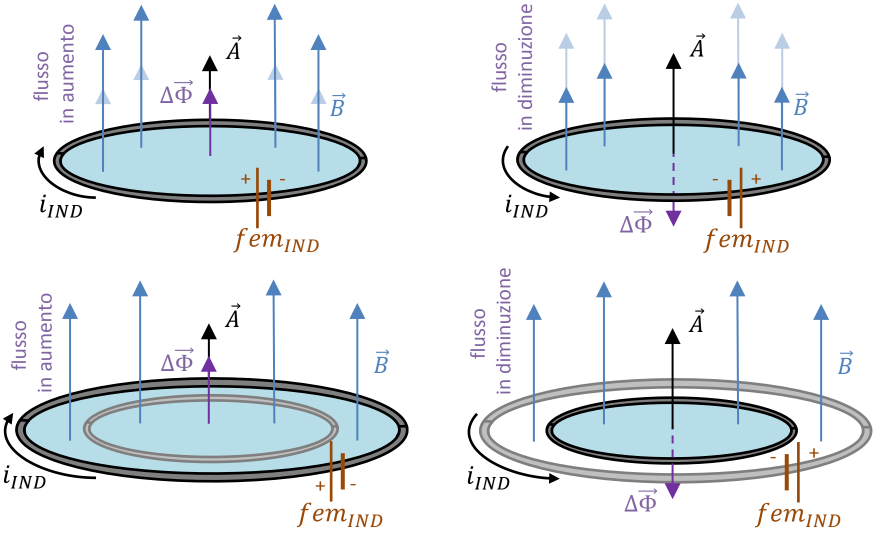
- **Legge di Faraday-Neumann-Lenz**

  Si consideri un circuito in cui il flusso $\Phi_S(\vec{B})$ del campo magnetico che attraversa una qualunque superficie S che ha come bordo il circuito stia variando.

  Allora nel circuito si genera una *corrente elettrica indotta*, causata dalla presenza di una *forza elettromotrice indotta* di intensità pari a:

$$fem_{IND} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{B})}{\mathrm{d}t}$$

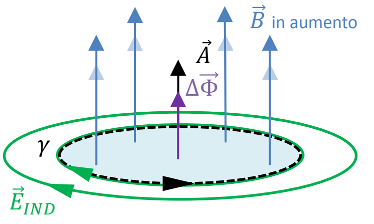
  Si orienti in maniera arbitraria il vettore area $\vec{A}$ del circuito. Definiamo il vettore $\Delta\vec{\Phi}$ parallelo ad $\vec{A}$, avente lo stesso verso di $\vec{A}$ quando il suo flusso è in aumento e verso opposto quando il suo flusso è in diminuzione, e intensità pari a $\mathrm{d}\Phi_S(\vec{B})/\mathrm{d}t$. Allora il verso della corrente indotta è l'opposto (si veda la Legge di Lenz) di quello indicato dalla regola di Nerone prendendo come riferimento il vettore $\Delta\vec{\Phi}$.



Nota Bene

- L'unità di misura del flusso del campo magnetico è il Weber: $[\Phi_S(\vec{B})] = T \cdot m^2 = W$
- Se il flusso del campo magnetico attraverso il circuito è costante nel tempo, non si genera nessuna forza elettromotrice o corrente indotta.
- La corrente indotta a sua volta genera un campo magnetico $\vec{B}_{IND}$ secondario (o indotto) avente verso opposto a $\Delta\vec{\Phi}$, ovvero tale da opporsi all'aumento o diminuzione del flusso del campo magnetico $\vec{B}$ primario. Se per assurdo il verso di i_{IND} fosse tale da generare un campo magnetico secondario avente lo stesso verso di $\Delta\vec{\Phi}$, allora questo amplificherebbe l'aumento del campo primario quando questo è in aumento o amplificherebbe la diminuzione del campo primario quando questo è in diminuzione. In entrambi i casi, amplificherebbe la variazione di flusso $\Delta\Phi_S(\vec{B})$, e ciò aumenterebbe a catena l'intensità di fem_{IND}, i_{IND} e $\vec{B}_{IND}$ creando un processo che si autoalimenterebbe generando energia illimitata, in contrasto con il principio di conservazione dell'energia. Ciò viene riassunto dalla Legge di Lenz e dal segno meno che compare nella formula di fem_{IND}.
- (*Legge di Lenz*) Il verso della corrente indotta i_{IND} è tale da generare un campo magnetico indotto $\vec{B}_{IND}$ che si oppone alla variazione di flusso magnetico $\Delta\Phi_S(\vec{B})$ che origina la stessa corrente i_{IND}.
- Se il circuito consiste in una bobina con N spire, in ogni spira si genera una forza elettromotrice indotta fem_{IND}. Poiché le spire sono collegate in serie tra loro, la fem totale è la somma di queste fem indotte: $fem_{TOT} = N \cdot fem_{IND}$.

- **Legge di Faraday-Neumann-Lenz (formulazione alternativa)**



Si consideri un curva chiusa e orientata γ in cui il flusso $\Phi_S(\vec{B})$ del campo magnetico che attraversa una qualunque superficie S che ha come bordo γ stia variando. Allora si genera un campo elettrico che viene detto *campo elettrico indotto,* la cui circuitazione lungo γ è pari a:

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}_{IND}) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{B})}{\mathrm{d}t}$$

(l'orientamento di $\vec{E}_{IND}$ è uguale a quello della corrente indotta - vedi legge di Lenz).
Considerando che la circuitazione del campo elettrostatico è nulla, si conclude che la circuitazione di un campo elettrico (sia esso generato da una distribuzione di cariche, o da un campo magnetico variabile) lungo una curva chiusa e orientata γ è pari a:

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{B})}{\mathrm{d}t}$$

Dimostrazione (equivalenza delle due formulazioni)

1) Deduzione del campo elettrico indotto

Secondo la formulazione originaria, la variazione del flusso del campo magnetico produce nella spira una forza elettromotrice che genera una corrente indotta, ovvero un moto ordinato delle cariche all'interno della spira. Questo tipo di moto si ha solo in presenza di un campo elettrico: si deduce quindi che la variazione di flusso del campo magnetico produce un campo elettrico lungo la spira. Tale campo si origina in realtà anche in regioni di spazio dove non è stata fisicamente posta una spira che ne evidenzi la presenza.

2) Equivalenza delle formule

Basta dimostrare che $fem_{IND} = \Gamma_\gamma(\vec{E}_{IND})$, e si ottiene la legge di Faraday-Neumann-Lenz originaria. La fem indotta è pari al lavoro per unità di carica compiuto dalla forza del campo elettrico indotto su una carica q_0 che percorre l'intera curva chiusa, quindi:

$$fem_{IND} = \frac{L_\gamma(\vec{F})}{q_0} =$$

Se si suddivide la curva in N tratti $\vec{\gamma}_1, \dots \vec{\gamma}_N$ abbastanza piccoli da poter essere considerati rettilinei, e tali che su essi la forza $\vec{F}$ possa essere considerata costante, il lavoro della forza lungo la traiettoria è pari alla somma dei lavori della forza lungo questi tratti.

$$= \frac{1}{q_0}(\vec{F}_1 \cdot \vec{\gamma}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{\gamma}_2 + \dots + \vec{F}_N \cdot \vec{\gamma}_N) =$$

La forza che il campo elettrico indotto esercita sulla carica di prova q_0 lungo il tratto $\vec{\gamma}_i$ è pari a: $\vec{F}_i = q_0 \cdot \vec{E}_i$, dove $\vec{E}_i$ è il campo elettrico indotto presente nel tratto $\vec{\gamma}_i$.

$$= \frac{1}{q_0}(q_0\vec{E}_1 \cdot \vec{\gamma}_1 + q_0\vec{E}_2 \cdot \vec{\gamma}_2 + \dots + q_0\vec{E}_N \cdot \vec{\gamma}_N) =$$

$$= \vec{E}_1 \cdot \vec{\gamma}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{\gamma}_2 + \dots + \vec{E}_N \cdot \vec{\gamma}_N = \Gamma_\gamma(\vec{E}_{IND})$$

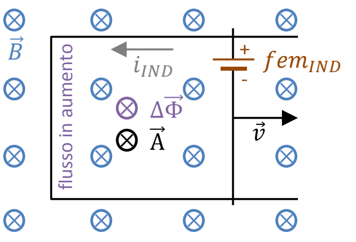
Nota Bene

- Il campo elettrostatico è generato da distribuzioni di cariche elettriche; il campo elettrico indotto è generato dalle variazioni del flusso del campo magnetico. Le linee di campo del campo elettrostatico sono aperte; le linee di campo del campo elettrico indotto sono chiuse.
- Il campo elettrico indotto ha proprietà diverse da quelle del campo elettrostatico. La circuitazione del campo elettrostatico lungo una curva chiusa è nulla; quella del campo elettrico indotto è pari alla variazione del flusso del campo magnetico. Di conseguenza, il campo elettrostatico è conservativo (e quindi ad esso può essere associato un potenziale); il campo elettrico indotto no.

- **Forza elettromotrice cinetica**

  Si consideri un circuito con un lato mobile di lunghezza L, immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ costante e perpendicolare al circuito. Se il lato mobile viene mosso a velocità v, allora sul circuito si crea una forza elettromotrice pari a:

$$fem_{IND} = -vBL$$



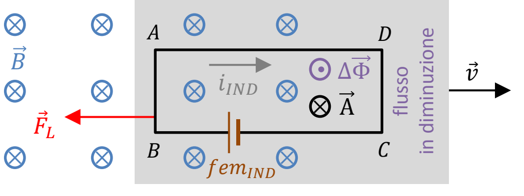
Dimostrazione

Dopo un tempo t, il lato mobile percorre una distanza $\Delta s = v \cdot t$ quindi, indicato con ΔS il conseguente aumento dell'area della maglia:

$$\Delta\Phi_S(\vec{B}) = B \cdot \Delta S = \mathrm{B} \cdot (\Delta s \cdot L) = B \cdot v \cdot t \cdot L \quad \Longrightarrow \quad fem_{IND} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{B})}{\mathrm{d}t} = -B \cdot v \cdot L$$

- **Le correnti di Foucault (o correnti parassite)**

  Quando si estrae una lastra conduttrice (non ferromagnetica) da un campo magnetico perpendicolare ad essa, la lastra risente di una forza $\vec{F}_L$ che si oppone alla sua estrazione, e la cui intensità è proporzionale alla velocità con la quale si estrae la lastra.



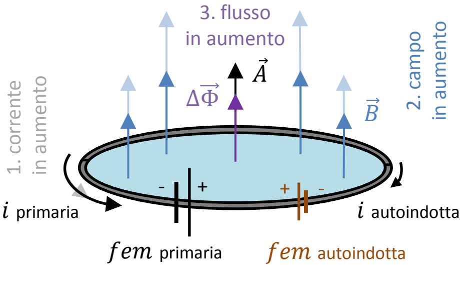
Dimostrazione

Si può immaginare che la lastra sia formata da tanti potenziali circuiti. Mentre si estrae la lastra, per effetto della variazione di flusso magnetico, una corrente indotta i_{IND} (proporzionale a fem_{IND}, e quindi alla velocità di estrazione della lastra) si genera lungo ciascuno di questi circuiti. Il tratto di circuito AB è così soggetto ad una forza di Lorentz $F_L = i_{IND} \cdot \overline{AB} \cdot B$ che si oppone all'estrazione della lastra, mentre il tratto di circuito CD, che è all'esterno del campo magnetico, non subisce nessuna forza (le forze che agiscono sui tratti AD e BC invece si annullano).

- **Autoinduzione**

  Il fenomeno dell'autoinduzione si presenta quando la corrente che scorre in un circuito varia in intensità. A catena si hanno i seguenti effetti:

1. Variazione della corrente primaria i
2. Variazione del campo magnetico $\vec{B}$ generato da i nelle vicinanze del circuito
3. Variazione del flusso del campo magnetico $\Phi_S(\vec{B})$ che attraversa il circuito
4. Creazione di una fem (auto-) indotta nel circuito



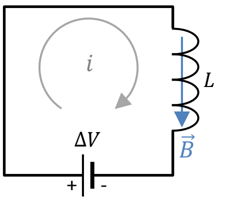
Si può vedere a partire dalla legge di Lenz che la fem autoindotta genera sempre una corrente che si oppone alla variazione della corrente primaria che l'ha generata.

Nota Bene

- Se la corrente primaria è in diminuzione, la corrente autoindotta ha lo stesso verso della primaria. Se la corrente primaria è in aumento, la corrente autoindotta ha verso opposto rispetto alla primaria.
- Ogni volta che si collega (o si scollega) un circuito ad un generatore di tensione si ha il fenomeno dell'autoinduzione, perché la corrente non raggiunge il suo valore stazionario immediatamente, ma tende ad esso in modo asintotico.

- **Induttanza di un circuito (Def)**

  Dato un circuito percorso da una corrente i che genera un campo magnetico $\vec{B}$ nelle sue vicinanze, si può verificare che ($\vec{B}$ e quindi) il flusso di $\vec{B}$ attraverso il circuito è proporzionale alla corrente stessa:



$$\Phi_S(\vec{B}) = L\, i$$

  La costante di proporzionalità L si dice *induttanza del circuito*.
  L'unità di misura dell'induttanza è l'Henry: $[L] = T \cdot \frac{m^2}{A} = H$

  Nota Bene

  - Dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz, in un circuito di induttanza L si genera una fem autoindotta pari a:

$$fem_{AUTO} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{B})}{\mathrm{d}t} \qquad \Longrightarrow \qquad fem_{AUTO} = -L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

- **Induttanza di un solenoide**

  Si consideri un solenoide (o induttore) di lunghezza l formato da N spire di sezione S. Allora la sua induttanza è pari a

$$L = \mu\,\frac{N^2}{l}\,S$$

  Dimostrazione

  Per un solenoide vale che

$$\Phi_{Tot}(\vec{B}) = N \cdot \Phi_{Spira}(\vec{B}) \quad \Longrightarrow \quad \Phi_{Tot}(\vec{B}) = N \cdot S \cdot B \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \Phi_{Tot}(\vec{B}) = N \cdot S \cdot (\mu \cdot n \cdot i)$$

$$\Longrightarrow \quad \Phi_{Tot}(\vec{B}) = N \cdot S \cdot \mu \cdot \frac{N}{l} \cdot i \quad \Longrightarrow \quad \Phi_{Tot}(\vec{B}) = \mu \cdot \frac{N^2}{l} \cdot S \cdot i$$

  e quindi la costante di proporzionalità tra i e $\Phi(\vec{B})$ è $L = \mu\,\frac{N^2}{l}S$.

  (1) Il campo all'interno di un solenoide è pari a $B = \mu\, n\, i$, dove n è il numero di spire del solenoide per unità di lunghezza e i è la corrente che scorre nel solenoide.

  Nota Bene

  - L'induttanza di un solenoide dipende solo dalla geometria del solenoide (e dalla permeabilità magnetica del mezzo in cui si trova).

- **Energia immagazzinata in un induttore (Def)**

  L'*energia potenziale elettrica immagazzinata da un induttore* è l'energia potenziale elettrica delle cariche che lo attraversano.

  Nota Bene

  - L'energia potenziale elettrica immagazzinata da un induttore è pari al lavoro compiuto da una forza esterna per ottenere la corrente che scorre in esso.

- **Energia immagazzinata in un induttore**

  L'energia potenziale elettrica immagazzinata da un induttore di induttanza L e attraversato da una corrente i è:

$$U = \frac{1}{2}\,L\,i^2$$

  Dimostrazione

  Rimandata: è necessario l'uso degli integrali.

  Nota Bene

  - Quando la corrente i del circuito aumenta, le cariche che attraversano l'induttore perdono energia (infatti la fem autoindotta si oppone al loro flusso): è come se l'induttore «assorbisse» da loro questa energia. Quando invece la corrente diminuisce, le cariche che attraversano l'induttore acquistano energia (infatti la fem autoindotta è favorisce il loro flusso): è come se l'induttore «cedesse» loro questa energia. Per questo motivo si dice che un induttore è in grado di assorbire, immagazzinare e rilasciare senza dissipazione l'energia delle cariche del circuito (che proviene, in ultima analisi, dal generatore).

- La fem autoindotta è presente solo quando l'intensità di corrente nel circuito sta variando. L'energia immagazzinata dal condensatore invece è presente anche se la corrente che scorre nel circuito è stazionaria, perché è stata immagazzinata quando la corrente da zero ha raggiunto il valore stazionario.

- **Densità di energia del campo magnetico (Def)**

La *densità di energia* di un campo magnetico uniforme B è lo scalare:

$$u = \frac{1}{2\mu} B^2$$

L'unità di misura della densità di energia è: $[u] = \frac{J}{m^3}$

Nota Bene

- Nel caso del solenoide, la densità di energia esprime il rapporto tra l'energia U immagazzinata dal solenoide e il volume Vol del solenoide (che è un cilindro di sezione S e altezza l):

$$\frac{U}{Vol} = \frac{\frac{1}{2} L\, i^2}{S \cdot l} = \frac{\frac{1}{2}\, \mu\, \frac{N^2}{l}\, S\, i^2}{S \cdot l} = \frac{\frac{1}{2}\, \mu\, \frac{N^2}{l}\, S \left(\frac{Bl}{\mu N}\right)^2}{S \cdot l} = \frac{\frac{1}{2\mu}\, B^2 S\, l}{S \cdot l} = \frac{1}{2\mu}\, B^2 = u$$

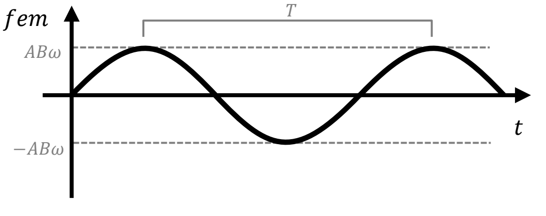
- La definizione di densità di energia nasce (come idea di rapporto tra energia e volume) dal solenoide, ma è usata in generale per qualunque campo magnetico uniforme. Suggerisce che se è presente un campo, allora esiste una distribuzione di correnti che lo genera e quindi un'energia ad esse associata.

- **L'alternatore**

L'alternatore è un generatore di corrente alternata ottenuto facendo ruotare una spira di area A con velocità angolare ω all'interno di un campo magnetico B. La fem prodotta da un alternatore segue l'andamento:

$$fem(t) = AB\omega \sin(\omega t)$$

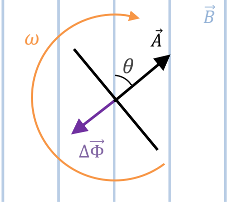
- Ampiezza = $AB\omega$
- Pulsazione = ω
- Periodo = $2\pi/\omega$
- Frequenza = $1/T$



Dimostrazione

Il flusso del campo magnetico che attraversa la spira, in funzione del tempo, è dato da:

$$\Phi_S(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos\theta \overset{(1)}{=} B \cdot A \cdot \cos\omega t$$



(1) Il moto della spira è circolare uniforme, perciò la posizione angolare del vettore $\vec{A}$ (supponendo che al tempo $t = 0$ fosse parallelo e concorde a $\vec{B}$, cioè che $\theta_0 = 0$) è data da:

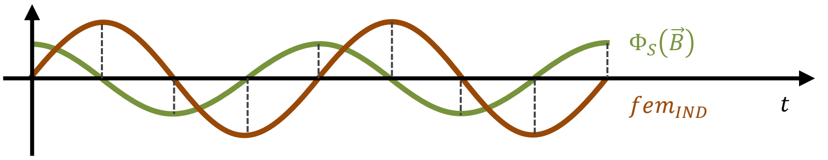
$$\theta(t) = \omega\, t + \theta_0 = \omega\, t$$

Per la legge di Faraday-Neumann allora la fem indotta nella spira è data da:

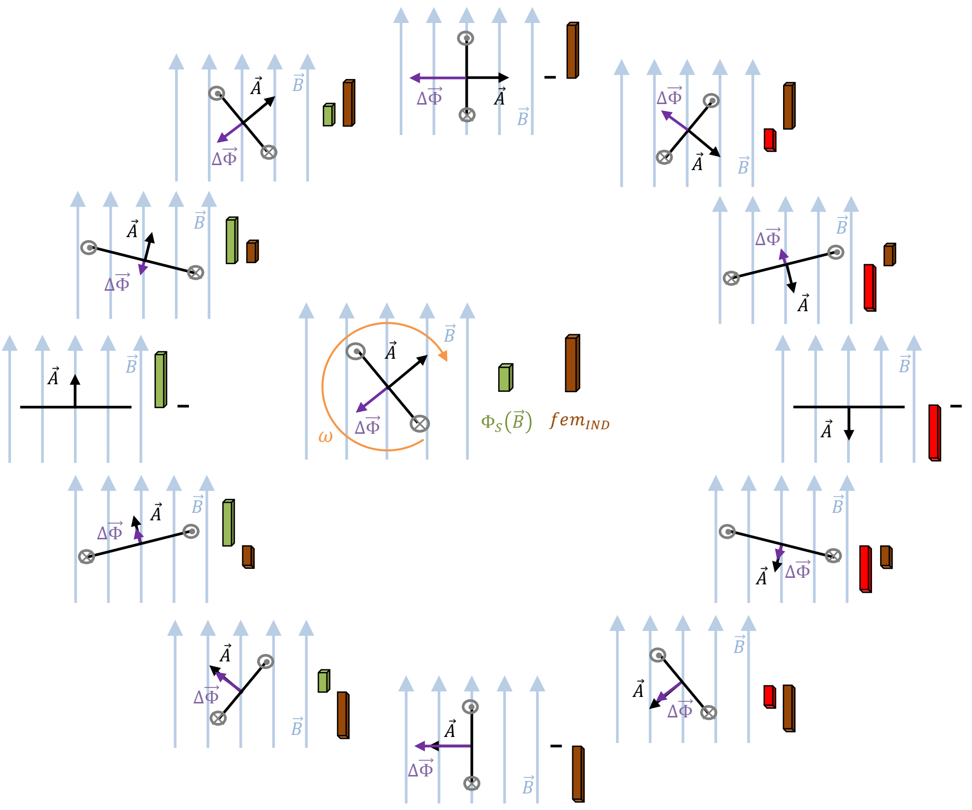
$$fem_{IND}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{B})}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(B \cdot A \cdot \cos\omega t)}{\mathrm{d}t} = B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin\omega t$$

Nota Bene

- Quando il flusso del campo magnetico è massimo, la fem indotta è nulla e viceversa (infatti la variazione di flusso è nulla quando il flusso è massimo, ed è massima quando il flusso è nullo).



fem indotta in una spira che ruota all'interno di un campo magnetico

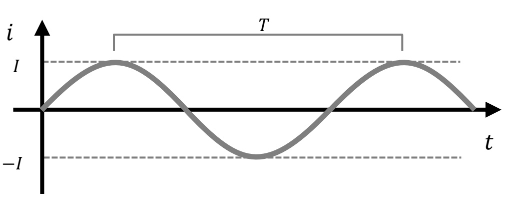


- **Corrente alternata (Def)**

  La corrente alternata è un tipo di corrente elettrica la cui intensità varia nel tempo sinusoidalmente (e quindi cambiando anche verso).

$$i(t) = I\sin(\omega t)$$

- Pulsazione: ω
- Ampiezza: I
- Periodo: $T = 2\pi/\omega$
- Frequenza: $f = 1/T$



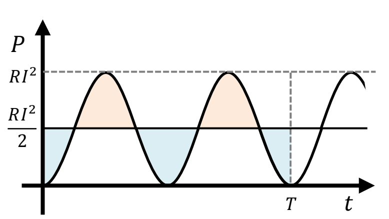
- **Potenza media (Def)**

  La potenza dissipata da una resistenza in un circuito a corrente alternata (con tensione di ampiezza $\mathcal{E}_0$ e corrente di ampiezza I) varia nel tempo ed è pari a:

$$P(t) = R\,i^2(t) = R\,I^2\sin^2(\omega t)$$

La *potenza media* è il valor medio della potenza calcolato su un periodo $[0, T]$:

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{2}RI^2$$



Nota Bene

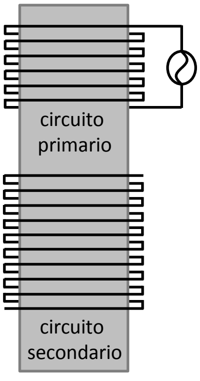
- Si può anche definire la corrente efficace e la fem efficace:

$$i_{eff} = I/\sqrt{2} \qquad\qquad fem_{eff} = \mathcal{E}_0/\sqrt{2}$$

Sono i valori di i e di fem che, in corrente continua, fornirebbero la potenza media:

$$\bar{P} = V_{eff} \cdot i_{eff} \qquad o \qquad \bar{P} = R \cdot i_{eff}^2 \qquad o \qquad \bar{P} = V_{eff}^2/R$$

- **Il trasformatore**



Il trasformatore è un dispositivo che aumenta o diminuisce la tensione in un circuito in corrente alternata. Si compone di un nucleo di ferro su cui sono avvolte due bobine: un circuito primario con N_p avvolgimenti e un circuito secondario aperto con N_s avvolgimenti, entrambi con resistenza trascurabile. Il circuito primario è alimentato da un generatore di corrente alternata che fornisce una fem pari a $\mathcal{E}_p(t) = V_p \sin(\omega t)$. Allora nel circuito secondario si crea una fem indotta pari a $\varepsilon_{s\,IND}(t) = V_s \sin(\omega t)$, tale che

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}$$

Dimostrazione

Il circuito primario ha resistenza trascurabile, quindi si può considerare un circuito induttivo. Dalla legge delle maglie si può ricavare la fem indotta $\varepsilon_{p\,(spira)}$ che le variazioni del flusso del campo magnetico generano su ciascuna spira dell'induttore del circuito primario.

$$\varepsilon_p(t) - N_p\, \varepsilon_{p\,(spira)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_{p\,(spira)} = \frac{\varepsilon_p(t)}{N_p}$$

Anche il circuito secondario ha resistenza trascurabile, perciò può essere considerato un induttore che viene attraversato dallo stesso campo magnetico indotto dall'induttore primario. Sia $\varepsilon_{s\,(spira)}$ la fem indotta che le variazioni del flusso di questo campo magnetico generano su ciascuna spira dell'induttore secondario. La fem totale $\varepsilon_s(t)$ indotta sul circuito secondario (che sarà alternata con la stessa pulsazione ω di $\varepsilon_p(t)$) è la somma delle fem indotte su ciascuna spira:

$$\varepsilon_s(t) = N_s\, \varepsilon_{s\,(spira)} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_{s\,(spira)} = \frac{\varepsilon_s(t)}{N_s}$$

Il campo magnetico che attraversa i due induttori è lo stesso, perciò (se le spire sono uguali) anche le variazioni del flusso del campo magnetico che attraversano ciascuna spira sono uguali:

$$\begin{cases} \varepsilon_{p\,(spira)} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} \\ \varepsilon_{s\,(spira)} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_{p\,(spira)} = \varepsilon_{s\,(spira)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\varepsilon_p(t)}{N_p} = \frac{\varepsilon_s(t)}{N_s} \quad \Longrightarrow \quad \frac{V_p}{N_p} = \frac{V_s}{N_s}$$

Nota Bene

- La potenza media di un circuito a corrente alternata è pari a: $\bar{P} = V_{eff} \cdot i_{eff}$. Per soddisfare una certa richiesta di potenza si hanno quindi due possibilità: o scegliere una corrente I alta e una differenza di potenziale V bassa, o viceversa. Per motivi di sicurezza, nelle centrali elettriche e nelle case è auspicabile una V bassa (e quindi alta I). Ma nel trasporto dell'energia elettrica dalla centrale alle case è auspicabile una I bassa (e quindi alta V), perché la potenza dissipata per effetto Joule nei cavi elettrici è proporzionale al quadrato di I ($\bar{P} = R\, i_{eff}^2$). I trasformatori ideali (quelli cioè che non dissipano energia) rispondono all'esigenza di aumentare o diminuire V, mantenendo inalterato il prodotto $V \cdot I$.
- Nel caso il circuito secondario sia chiuso e l'induttore secondario venga collegato in serie ad una resistenza, l'analisi delle correnti nei due circuiti diventa complessa ma, se si suppone che non ci siano perdite di energia nel trasformatore, per il principio di conservazione dell'energia la potenza media erogata dal generatore primario è uguale a quella assorbita dal secondario e quindi:

$$\bar{P}_p = \bar{P}_s \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_{p\,eff} \cdot i_{p\,eff} = \varepsilon_{s\,eff} \cdot i_{s\,eff} \quad \Longrightarrow \quad V_p \cdot i_{p\,eff} = V_s \cdot i_{s\,eff}$$