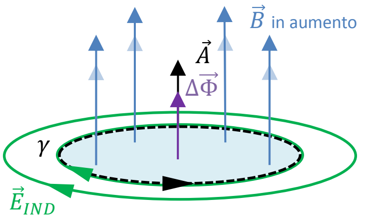
- **Legge di Faraday-Neumann-Lenz (formulazione alternativa)**

Si consideri un curva chiusa e orientata γ in cui il flusso $\Phi_S(\vec{B})$ del campo magnetico che attraversa una qualunque superficie S che ha come bordo γ stia variando. Allora si genera un campo elettrico che viene detto *campo elettrico indotto,* la cui circuitazione lungo γ è pari a:



$$\Gamma_\gamma(\vec{E}_{IND}) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{B})}{\mathrm{d}t}$$

(l'orientamento di $\vec{E}_{IND}$ è uguale a quello della corrente indotta - vedi legge di Lenz). Considerando che la circuitazione del campo elettrostatico è nulla, si conclude che la circuitazione di un campo elettrico (sia esso generato da una distribuzione di cariche, o da un campo magnetico variabile) lungo una curva chiusa e orientata γ è pari a:

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{B})}{\mathrm{d}t}$$

Dimostrazione (equivalenza delle due formulazioni)

1) Deduzione del campo elettrico indotto

Secondo la formulazione originaria, la variazione del flusso del campo magnetico produce nella spira una forza elettromotrice che genera una corrente indotta, ovvero un moto ordinato delle cariche all'interno della spira. Questo tipo di moto si ha solo in presenza di un campo elettrico: si deduce quindi che la variazione di flusso del campo magnetico produce un campo elettrico lungo la spira. Tale campo si origina in realtà anche in regioni di spazio dove non è stata fisicamente posta una spira che ne evidenzi la presenza.

2) Equivalenza delle formule

Basta dimostrare che $fem_{IND} = \Gamma_\gamma(\vec{E}_{IND})$, e si ottiene la legge di Faraday-Neumann-Lenz originaria. La fem indotta è pari al lavoro per unità di carica compiuto dalla forza del campo elettrico indotto su una carica q_0 che percorre l'intera curva chiusa, quindi:

$$fem_{IND} = \frac{L_\gamma(\vec{F})}{q_0} =$$

Se si suddivide la curva in N tratti $\vec{\gamma}_1, \dots \vec{\gamma}_N$ abbastanza piccoli da poter essere considerati rettilinei, e tali che su essi la forza $\vec{F}$ possa essere considerata costante, il lavoro della forza lungo la traiettoria è pari alla somma dei lavori della forza lungo questi tratti.

$$= \frac{1}{q_0}(\vec{F}_1 \cdot \vec{\gamma}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{\gamma}_2 + \dots + \vec{F}_N \cdot \vec{\gamma}_N) =$$

La forza che il campo elettrico indotto esercita sulla carica di prova q_0 lungo il tratto $\vec{\gamma}_i$ è pari a: $\vec{F}_i = q_0 \cdot \vec{E}_i$, dove $\vec{E}_i$ è il campo elettrico indotto presente nel tratto $\vec{\gamma}_i$.

$$= \frac{1}{q_0}(q_0\vec{E}_1 \cdot \vec{\gamma}_1 + q_0\vec{E}_2 \cdot \vec{\gamma}_2 + \dots + q_0\vec{E}_N \cdot \vec{\gamma}_N) =$$

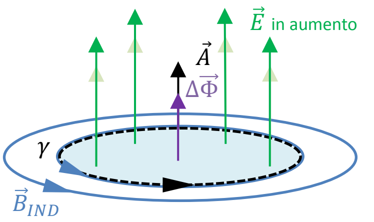
$$= \vec{E}_1 \cdot \vec{\gamma}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{\gamma}_2 + \dots + \vec{E}_N \cdot \vec{\gamma}_N = \Gamma_\gamma(\vec{E}_{IND})$$

Nota Bene

- Il campo elettrostatico è generato da distribuzioni di cariche elettriche; il campo elettrico indotto è generato dalle variazioni del flusso del campo magnetico. Le linee di campo del campo elettrostatico sono aperte; le linee di campo del campo elettrico indotto sono chiuse.
- Il campo elettrico indotto ha proprietà diverse da quelle del campo elettrostatico. La circuitazione del campo elettrostatico lungo una curva chiusa è nulla; quella del campo elettrico indotto è pari alla variazione del flusso del campo magnetico. Di conseguenza, il campo elettrostatico è conservativo (e quindi ad esso può essere associato un potenziale); il campo elettrico indotto no.

- **Teorema di Ampere-Maxwell**

Si consideri un curva chiusa e orientata γ in cui il flusso $\Phi_S(\vec{E})$ del campo elettrico che attraversa una qualunque superficie S che ha come bordo γ stia variando. Allora si genera un campo magnetico che viene detto *campo magnetico indotto,* la cui circuitazione lungo γ è pari a:



$$\Gamma_\gamma(\vec{B}_{IND}) = \varepsilon_o\mu_0\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{E})}{\mathrm{d}t}$$

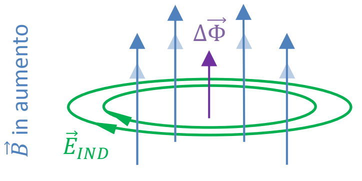
Si orienti in maniera arbitraria il vettore area $\vec{A}$ della curva. Definiamo il vettore $\Delta\vec{\Phi}$ parallelo ad $\vec{A}$, avente lo stesso verso di $\vec{A}$ quando il suo flusso è in aumento e verso opposto quando il suo flusso è in diminuzione, e intensità pari a $\mathrm{d}\Phi_S(\vec{E})/\mathrm{d}t$. Allora il verso della corrente indotta è quello indicato dalla regola di Nerone prendendo come riferimento il vettore $\Delta\vec{\Phi}$.

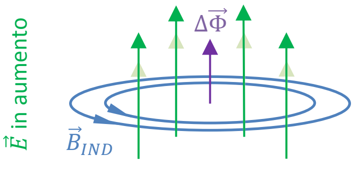
Considerando anche il teorema di Ampere, si conclude che la circuitazione di un campo magnetico (sia esso generato da una filo percorso da corrente, o da un campo elettrico variabile) lungo una curva chiusa e orientata γ è pari a:

$$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 i_C + \varepsilon_o\mu_0\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{E})}{\mathrm{d}t}$$

Nota Bene

- A differenza di quanto accade con il campo elettrico indotto nella legge di Faraday-Neumann-Lenz, il campo magnetico indotto ha verso dato dalla regola di Nerone (e non l'opposto) prendendo come riferimento il vettore $\Delta\vec{\Phi}$.





- Si definisce corrente di spostamento il termine:

$$i_S = \varepsilon_o\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{E})}{\mathrm{d}t}$$

  In questo modo la circuitazione del campo magnetico può essere espressa così (i_C è la corrente di conduzione, i_S è la corrente di spostamento):

$$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu_0(i_C + i_S)$$

- Si consideri un condensatore ad armature piane in carica (o scarica): una corrente i_C arriva all'armatura positiva e riparte da quella negativa, interrompendosi nel mezzo tra le due armature. Tuttavia, si può immaginare che nel mezzo esista una corrente di spostamento i_S uguale in intensità a i_C e avente lo stesso verso se $\vec{E}$ è in aumento, verso opposto altrimenti (in generale, la somma delle due correnti rimane costante). Se non si tenesse conto di questa corrente e dei suoi effetti sul campo magnetico, sembrerebbe che la circuitazione di $\vec{B}$ lungo la curva γ in figura dipenda dalla superficie presa in considerazione (sarebbe non nulla per S_1 perché c'è corrente concatenata, ma nulla per S_2 perché non c'è corrente concatenata che la attraversa).