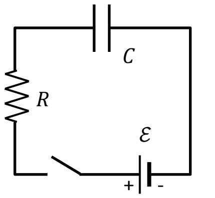
CIRCUITI IN CORRENTE CONTINUA

Annotazioni

- **Circuito RC (carica del condensatore)**
  Si consideri un circuito alimentato da un generatore che fornisce una fem continua ε, collegato in serie ad una resistenza R e ad un condensatore inizialmente scarico, di capacità C. Quando l'interruttore è aperto non scorre corrente nel circuito. Quando l'interruttore viene abbassato si genera una corrente $i(t)$ che diminuisce fino ad annullarsi quando la carica $q(t)$ presente sul condensatore è massima: $Q = q(+\infty) = C\mathcal{E}$.



$\mathcal{E}$ = cost.
$i(t)$ = corrente nel circ.
$q(t)$ = carica su C

Legge delle maglie: $\mathcal{E} - \Delta V_R(t) - \Delta V_C(t) = 0$

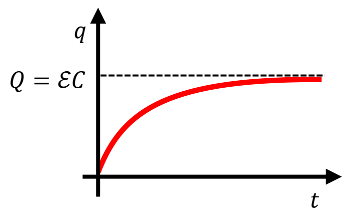
$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{E} - R \cdot \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} - \dfrac{q(t)}{C} = 0} \\ \boldsymbol{q(0) = 0} \qquad (\textit{condizione iniziale}) \end{cases}$$

Equazione di $q(t)$: $\boldsymbol{q(t) = \mathcal{E}C(1 - e^{-t/RC})}$

$q(0) = 0$

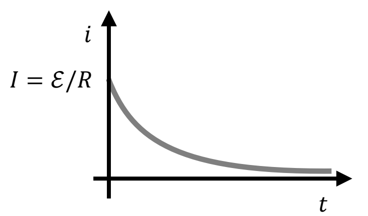
$q(+\infty) = \mathcal{E}C = Q$



Equazione di $i(t)$: $\boldsymbol{i(t) = \dfrac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}}$

$i(0) = \dfrac{\mathcal{E}}{R} = I$

$i(+\infty) = 0$



Potenza associata all'energia…

…erogata da ε: $P_{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E} \cdot i(t) = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-t/RC}$

…dissipata da R: $P_R(t) = \Delta V_R(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/RC}$

…che entra in C: $P_C(t) = \Delta V_C(t) \cdot i(t) = \dfrac{q(t)}{C} \cdot i(t) = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R}\left(e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}\right)$

Energia…

…erogata da ε: $E_{\mathcal{E}}(t) = \displaystyle\int_0^t P_{\mathcal{E}}(t) \cdot dt = \mathcal{E}^2 C(1 - e^{-t/RC})$

$E_{\mathcal{E}}(+\infty) = \mathcal{E}^2 C$

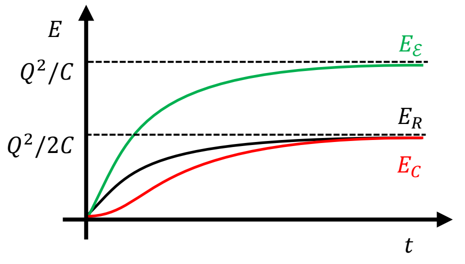
…dissipata da R: $E_R(t) = \displaystyle\int_0^t P_R(t) \cdot dt = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 C(1 - e^{-2t/RC})$

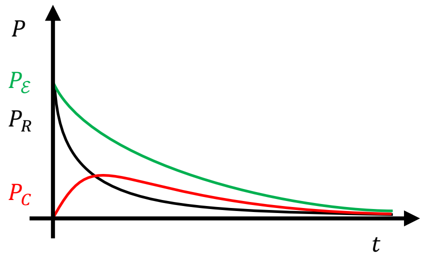
$E_R(+\infty) = \dfrac{1}{2}\mathcal{E}^2 C$

…immagazzinata in C: $E_C(t) = \displaystyle\int_0^t P_C(t) \cdot dt = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 C(1 - 2e^{-t/RC} + e^{-2t/RC})$

…che corrisponde (come noto) a: $E_C(t) = \frac{q^2(t)}{2C}$

$E_C(+\infty) = \dfrac{1}{2}\mathcal{E}^2 C$





Nota Bene

- All'istante iniziale ($t = 0$):

  $\Delta V_R(0) = R \cdot i(0) = \mathcal{E}$ $\qquad\qquad$ $\Delta V_C(0) = q(0)/C = 0$

- In condizioni stazionarie ($t = +\infty$):

  $\Delta V_R(+\infty) = R \cdot i(+\infty) = 0$ $\qquad\qquad$ $\Delta V_C(+\infty) = q(+\infty)/C = \mathcal{E}/C$

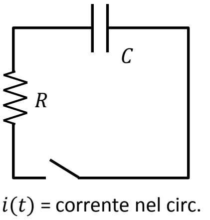
- La quantità $\tau = RC$ ha le dimensioni di un tempo e viene detta *costante di tempo.* Dopo un tempo τ la corrente diminuisce di un fattore e^{-1} (diventa il 37% di quella iniziale), dopo un tempo 2τ di un fattore e^{-2} (circa il 13% di quella iniziale)… Dopo un tempo 5τ di un fattore e^{-5} (circa 1% di quella iniziale).
- L'energia erogata dal generatore viene in parte dissipata dalla resistenza e in parte «immagazzinata» nel condensatore. Per la conservazione dell'energia (come si può verificare anche algebricamente):

$$E_{\mathcal{E}}(t) = E_R(t) + E_C(t)$$

- L'energia fornita complessivamente dal generatore viene per metà dissipata dalla resistenza e per metà immagazzinata nel condensatore. Infatti:

$$E_R(+\infty) = E_C(+\infty) = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 C \qquad E_{\mathcal{E}}(+\infty) = \mathcal{E}^2 C$$

- **Circuito RC (scarica del condensatore)**
  Si consideri un circuito non alimentato, costituito da una resistenza R collegata in serie ad un condensatore di capacità C e carica iniziale $q(0) = Q$. Quando l'interruttore è aperto non scorre corrente nel circuito. Quando l'interruttore viene abbassato si genera una corrente $i(t)$ che diminuisce fino ad annullarsi quando la carica $q(t)$ presente sul condensatore si annulla.



$i(t)$ = corrente nel circ.
$q(t)$ = carica su C

Legge delle maglie: $\quad -\Delta V_R(t) - \Delta V_C(t) = 0$

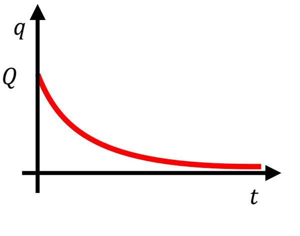
$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{R \cdot \dfrac{dq(t)}{dt} + \dfrac{q(t)}{C} = 0} \\ \boldsymbol{q(0) = Q} \qquad \textit{(condizione iniziale)} \end{cases}$$

Equazione di $q(t)$: $\quad \boldsymbol{q(t) = Qe^{-t/RC}}$

$q(0) = Q$

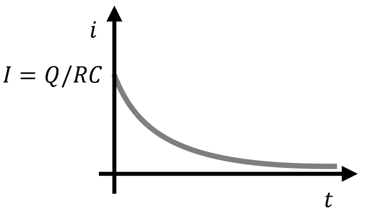
$q(+\infty) = 0$



Equazione di $i(t)$: $\boldsymbol{i(t) = -\frac{Q}{RC}e^{-t/RC}}$

$$i(0) = -\frac{Q}{RC} = I$$

$$i(+\infty) = 0$$



Potenza associata all'energia…

…dissipata da R: $P_R(t) = \Delta V_R(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = \frac{Q^2}{RC^2}e^{-2t/RC}$

…rilasciata da C: $P_C(t) = \Delta V_C(t) \cdot i(t) = \frac{q(t)}{C} \cdot i(t) = -\frac{Q^2}{RC^2}e^{-2t/RC}$

Energia…

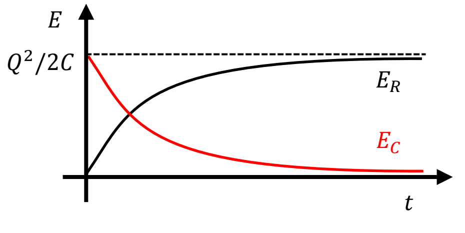
…dissipata da R: $E_R(t) = \int_0^t P_R(t) \cdot dt = \frac{Q^2}{2C}\left(1 - e^{-2t/RC}\right)$

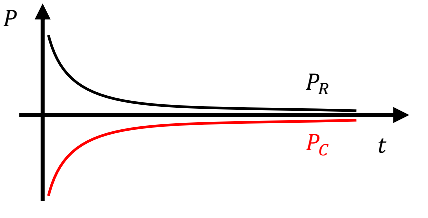
$$E_R(+\infty) = \frac{Q^2}{2C}$$

…immagazzinata in C: $E_C(t) = \frac{Q^2}{2C} - \int_0^t P_C(t) \cdot dt = \frac{Q^2}{2C}e^{-2t/RC}$

…che corrisponde (come noto) a: $E_C(t) = \frac{q^2(t)}{2C}$

$$E_C(0) = \frac{Q^2}{2C} \qquad E_C(+\infty) = 0$$





Nota Bene

- All'istante iniziale ($t = 0$):

  $\Delta V_R(0) = R \cdot i(0) = -Q/C$ $\qquad$ $\Delta V_C(0) = q(0)/C = Q/C$

- In condizioni stazionarie ($t = +\infty$):

  $\Delta V_R(+\infty) = R \cdot i(+\infty) = 0$ $\qquad$ $\Delta V_C(+\infty) = q(+\infty)/C = 0$

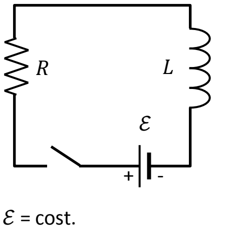
- La quantità $\tau = RC$ ha le dimensioni di un tempo e viene detta *costante di tempo.* Dopo un tempo τ la corrente diminuisce di un fattore e^{-1} (diventa il 37% di quella iniziale), dopo un tempo 2τ di un fattore e^{-2} (circa il 13% di quella iniziale)… Dopo un tempo 5τ di un fattore e^{-5} (circa 1% di quella iniziale).

- L'energia «rilasciata» dal condensatore viene interamente dissipata dalla resistenza. Per la conservazione dell'energia (come si può verificare anche algebricamente):

$$E_R(t) + E_C(t) = 0$$

- **Circuito RL (aumento di corrente)**

  Si consideri un circuito alimentato da un generatore che fornisce una fem continua ε, collegato in serie ad una resistenza R e ad un induttore di induttanza L. Quando l'interruttore è aperto non scorre corrente nel circuito, e quando l'interruttore viene abbassato si genera una corrente $i(t)$. Mentre la corrente aumenta, si genera nell'induttore una fem autoindotta $\mathcal{E}_L = \Delta V_L$ che ritarda la crescita della corrente, che tende asintoticamente ad un valore stazionario $I = i(+\infty)$.



$\mathcal{E}$ = cost.
$i(t)$ = corrente nel circ.

Legge delle maglie: $\mathcal{E} - \Delta V_R(t) - \Delta V_L(t) = 0$

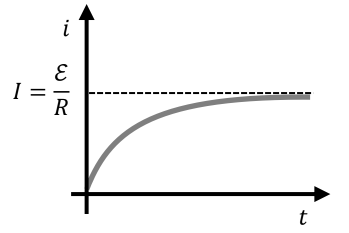
$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{E} - R \cdot i(t) - L \cdot \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0} \\ \boldsymbol{i(0) = 0} \qquad \textit{(condizione iniziale)} \end{cases}$$

Equazione di $i(t)$: $\boldsymbol{i(t) = \dfrac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-Rt/L})}$

$i(0) = 0$

$i(+\infty) = \dfrac{\mathcal{E}}{R} = I$



Potenza associata all'energia…

…erogata da ε: $P_{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E} \cdot i(t) = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R}(1 - e^{-Rt/L})$

…dissipata da R: $P_R(t) = \Delta V_R(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) \ = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R}(1 - 2e^{-Rt/L} + e^{-2Rt/L})$

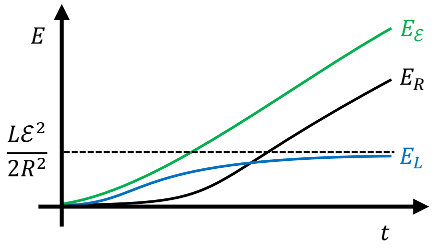
…che entra in L: $P_L(t) = \Delta V_L(t) \cdot i(t) = L \cdot \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \cdot i(t) = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R}(e^{-Rt/L} - e^{-2Rt/L})$

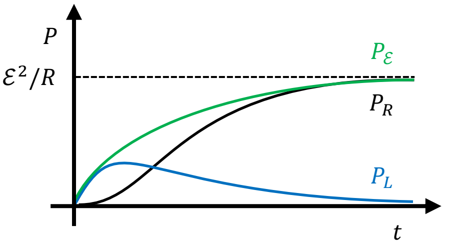
Energia…

…immagazzinata in L: $E_L(t) = \displaystyle\int_0^t P_C(t) \cdot dt = \dfrac{L\mathcal{E}^2}{2R^2}(1 - 2e^{-Rt/L} + e^{-2Rt/L})$

…che corrisponde (come noto) a: $E_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$

$E_L(+\infty) = \dfrac{L\mathcal{E}^2}{2R^2}$





Nota Bene

- All'istante iniziale ($t = 0$):

  $\Delta V_R(0) = R \cdot i(0) = 0$ $\qquad$ $\Delta V_L(0) = L \cdot \left.\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \mathcal{E}$

- In condizioni stazionarie ($t = +\infty$):

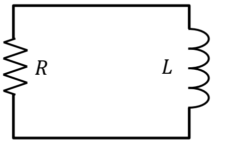
  $\Delta V_R(+\infty) = R \cdot i(+\infty) = \mathcal{E}$ $\qquad$ $\Delta V_L(+\infty) = L \cdot \left.\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{+\infty} = 0$

- La quantità $\tau = L/R$ ha le dimensioni di un tempo e viene detta *costante di tempo.* Dopo un tempo τ la corrente $i(t)$ è pari a $(1 - e^{-1}) \cdot I$ (circa il 63% della corrente stazionaria), dopo un tempo 2τ è pari a $(1 - e^{-2}) \cdot I$ (circa l'86%)… Dopo un tempo 5τ di un fattore è pari a $(1 - e^{-5}) \cdot I$ (circa il 99%).
- L'energia erogata dal generatore viene in parte dissipata dalla resistenza e in parte «immagazzinata» nell'induttore (l'induttore immagazzina tanta più energia quanto più è alta la variazione di intensità di corrente). Per la conservazione dell'energia:

$$E_{\mathcal{E}}(t) = E_R(t) + E_L(t)$$

- Con lo scorrere del tempo la corrente cresce sempre più lentamente: l'induttore immagazzina sempre meno energia, e il valore assoluto della fem autoindotta, proporzionale a $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, diminuisce. Il circuito si comporta come un circuito con una semplice resistenza.

- **Circuito RL (diminuzione di corrente)**
Si consideri un circuito con una resistenza R collegata in serie ad un induttore di induttanza L, da cui è appena stato scollegato un generatore che produceva una corrente di intensità I. La corrente diminuisce, generando nell'induttore una fem autoindotta $\mathcal{E}_L = \Delta V_L$ che ritarda la diminuzione della corrente, che tende asintoticamente ad annullarsi.



$i(t)$ = corrente nel circ.

Legge delle maglie: $-\Delta V_R(t) - \Delta V_L(t) = 0$

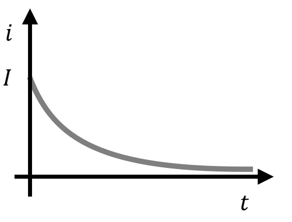
$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{R \cdot i(t) + L \cdot \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0} \\ \boldsymbol{i(0) = I} \qquad (\textit{condizione iniziale}) \end{cases}$$

Equazione di $i(t)$: $\boldsymbol{i(t) = Ie^{-Rt/L}}$

$i(0) = I$

$i(+\infty) = 0$



Potenza associata all'energia…

…dissipata da R: $P_R(t) = \Delta V_R(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) \ = RI^2 e^{-2Rt/L}$

…rilasciata da L: $P_L(t) = \Delta V_L(t) \cdot i(t) = L \cdot \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \cdot i(t) = -RI^2 e^{-2Rt/L}$

Energia…

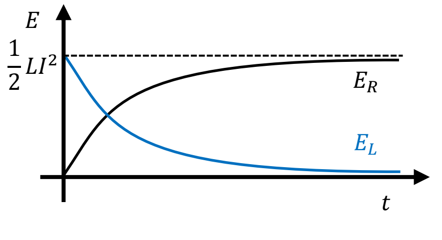
…dissipata da R: $E_R(t) = \displaystyle\int_0^t P_R(t) \cdot dt = \frac{1}{2}LI^2(1 - e^{-2Rt/L})$

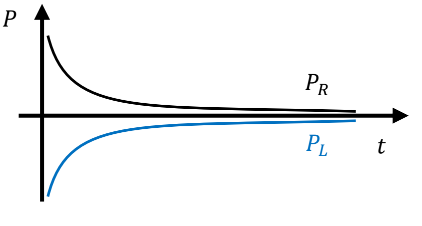
$E_R(+\infty) = \dfrac{1}{2}LI^2$

…immagazzinata in L: $E_L(t) = \dfrac{1}{2}LI^2 + \displaystyle\int_0^t P_C(t) \cdot dt = \frac{1}{2}LI^2 e^{-2Rt/L}$

…che corrisponde (come noto) a: $E_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$

$E_L(0) = \dfrac{1}{2}LI^2 \qquad E_L(+\infty) = 0$





Nota Bene

- All'istante iniziale ($t = 0$):

$$\Delta V_R(0) = R \cdot i(0) = R \cdot I \qquad\qquad \Delta V_L(0) = L \cdot \left.\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_0 = -R \cdot I$$

- In condizioni stazionarie ($t = +\infty$):

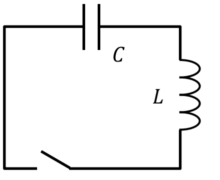
$$\Delta V_R(+\infty) = R \cdot i(+\infty) = 0 \qquad \Delta V_L(+\infty) = L \cdot \left.\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{+\infty} = 0$$

- La quantità $\tau = L/R$ ha le dimensioni di un tempo e viene detta *costante di tempo.* Dopo un tempo τ la corrente diminuisce di un fattore e^{-1} (diventa il 37% di quella iniziale), dopo un tempo 2τ di un fattore e^{-2} (circa il 13% di quella iniziale)… Dopo un tempo 5τ di un fattore e^{-5} (circa 1% di quella iniziale).
- La potenza «rilasciata» dall'induttore viene interamente dissipata dalla resistenza. Per la conservazione dell'energia (come si può verificare anche algebricamente):

$$E_R(t) + E_L(t) = 0$$

- **Circuito LC**

Si consideri un circuito non alimentato, costituito da un condensatore di capacità C, inizialmente carico con carica iniziale Q, collegato in serie ad un induttore di induttanza L. Quando l'interruttore è aperto non scorre corrente nel circuito. Quando l'interruttore viene abbassato, la corrente $i(t)$ che scorre nel circuito e la carica $q(t)$ presente sul condensatore variano sinusoidalmente (il circuito «oscilla»).



$i(t)$ = corrente nel circ.
$q(t)$ = carica su C

Legge delle maglie: $\quad -\Delta V_C(t) - \Delta V_L(t) = 0$

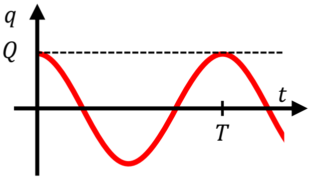
$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{q(t)}{C} + L \cdot \dfrac{\mathrm{d}^2 q(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0} \\ \boldsymbol{i(0) = 0, \quad q(0) = Q} \qquad \text{(\textit{condizioni iniziali})} \end{cases}$$

Equazione di $q(t)$: $\quad \boldsymbol{q(t) = Q\cos(\omega t)}$

con $\boldsymbol{\omega = 1/\sqrt{LC}}$

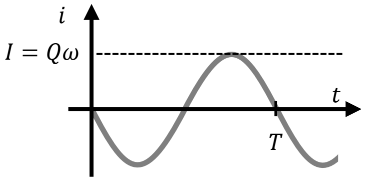
Ampiezza $= Q$



Equazione di $i(t)$: $\quad \boldsymbol{i(t) = -Q\omega\sin(\omega t)}$

con $\boldsymbol{\omega = 1/\sqrt{LC}}$

Ampiezza $= Q\omega = I$



Energia…

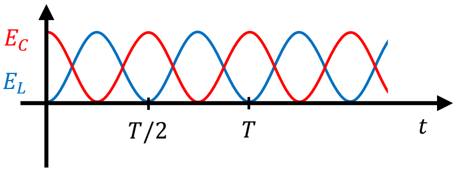
…immagazzinata in C: $\quad E_C(t) = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega t)$

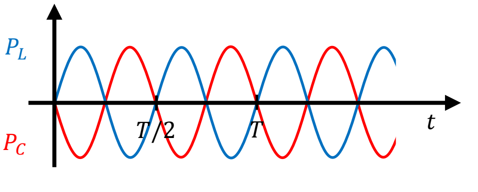
…immagazzinata in L: $\quad E_L(t) = \dfrac{1}{2}LI^2 = \dfrac{Q^2}{2C}\sin^2(\omega t)$

Potenza associata all'energia…

…che entra/esce da C: $\quad P_C(t) = \Delta V_C(t) \cdot i(t) = \dfrac{q(t)}{C} \cdot i(t) = -\dfrac{Q^2\omega}{2C}\sin(2\omega t)$

… che entra/esce da L: $\quad P_L(t) = \Delta V_L(t) \cdot i(t) = -L \cdot \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \cdot i(t) = \dfrac{Q^2\omega}{2C}\sin(2\omega t)$



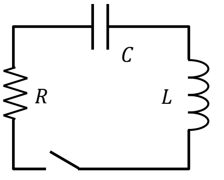


Nota Bene

- Il periodo di oscillazione del circuito è $T = 2\pi/\omega$.
- In un qualunque istante l'energia totale immagazzinata nel circuito (che è la somma di E_C e E_L) è costante ed è pari a $E_T = Q^2/2C$ (cioè l'energia presente inizialmente sul condensatore).
- Il comportamento del circuito LC è simile a quello dell'oscillatore meccanico, in cui q corrisponde a x, i corrisponde a v, E_C corrisponde all'energia potenziale elastica (C corrisponde a $1/k$), e E_L corrisponde all'energia cinetica (L corrisponde a m).

- **Circuito RLC**

Si consideri un circuito non alimentato, costituito da una resistenza R collegata in serie ad un condensatore di capacità C, inizialmente carico con carica iniziale Q, e ad un induttore di induttanza L. Quando l'interruttore è aperto non scorre corrente nel circuito. Quando l'interruttore viene abbassato, la corrente $i(t)$ che scorre nel circuito e la carica $q(t)$ presente sul condensatore variano sinusoidalmente, ma con oscillazioni di ampiezza sempre più piccola (oscillazioni smorzate).



$i(t)$ = corrente nel circ.
$q(t)$ = carica su C

Legge delle maglie: $$-\Delta V_R(t) - \Delta V_C(t) - \Delta V_L(t) = 0$$

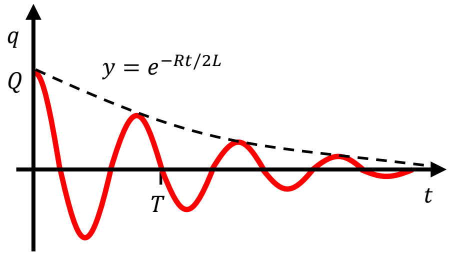
$$\Downarrow$$

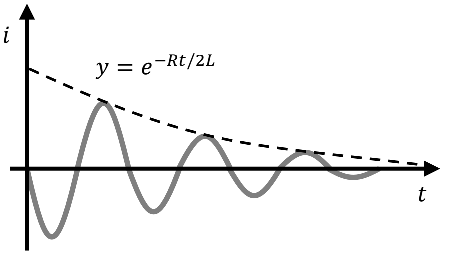
$$\begin{cases} \boldsymbol{R \cdot \dfrac{dq(t)}{dt} + \dfrac{q(t)}{C} + L \cdot \dfrac{d^2q(t)}{dt^2} = 0} \\ \boldsymbol{i(0) = 0, \quad q(0) = Q} \qquad \textit{(condizioni iniziali)} \end{cases}$$

Equazione di $q(t)$: $$\boldsymbol{q(t) = Q\, e^{-Rt/2L} \cos(\omega t + \phi)}$$

Equazione di $i(t)$: $$\boldsymbol{i(t) = -Qe^{-\frac{Rt}{2L}}\left(\omega \sin(\omega t + \phi) + \frac{R}{2L}\cos(\omega t + \phi)\right)}$$

con $\boldsymbol{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$ e $\boldsymbol{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$





Nota Bene

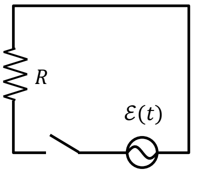
- Se R è trascurabile, si ottiene un circuito LC.
- Le ampiezze di $q(t)$ e $i(t)$ diminuiscono esponenzialmente con lo scorrere del tempo.
- L'energia elettromagnetica totale presente nel circuito non è più costante, ma diminuisce nel tempo, dato che viene costantemente dissipata dalla resistenza. L'energia totale presente nel circuito è quella immagazzinata nel condensatore e nell'induttore, e può essere calcolata a partire da:
$$E_T(t) = E_C(t) + E_L(t) = \frac{q^2(t)}{2C} + \frac{1}{2}Li^2(t)$$
Si può verificare che effettivamente $E_T(t)$ diminuisce esponenzialmente.

CIRCUITI IN CORRENTE ALTERNATA

Annotazioni

- **Circuito resistivo R**

Si consideri un circuito alimentato da un generatore che fornisce una fem alternata $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$, collegato in serie ad una resistenza R. Quando l'interruttore è aperto non scorre corrente nel circuito. Quando l'interruttore viene abbassato si genera una corrente $i(t)$ alternata, di ampiezza $I = \mathcal{E}_0/R$ e pulsazione ω.



$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$
$i(t)$ = corrente nel circ.

Legge delle maglie: $\mathcal{E}(t) - \Delta V_R(t) = 0$

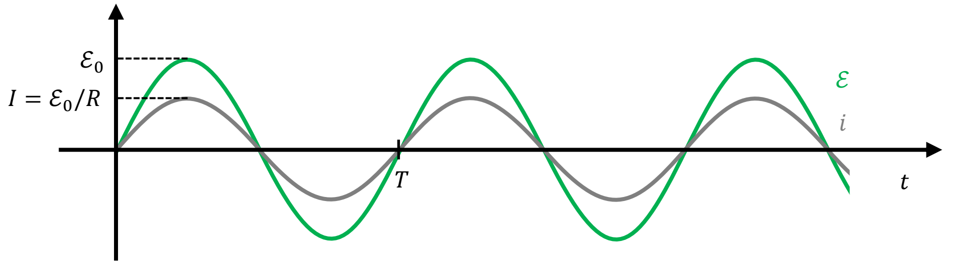
$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}_0 \sin(\omega t) - R \cdot i(t) = 0}$$

Equazione di $i(t)$: $\boldsymbol{i(t) = \dfrac{\mathcal{E}_0}{R} \sin(\omega t)}$

Ampiezza: $I = \mathcal{E}_0/R$

Fase iniziale: $\phi_0 = 0°$

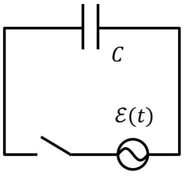


Nota Bene

- Il periodo di oscillazione della corrente è $T = 2\pi/\omega$.
- La fem e la corrente sono *in fase* (hanno la stessa pulsazione ω e la stessa fase iniziale $\phi_0 = 0°$, quindi si annullano e raggiungono i massimi e i minimi negli stessi istanti).

- **Circuito capacitativo C**

Si consideri un circuito alimentato da un generatore che fornisce una fem alternata $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$, collegato in serie ad un condensatore di capacità C. Quando l'interruttore è aperto non scorre corrente nel circuito. Quando l'interruttore viene abbassato si genera una corrente $i(t)$ alternata, di ampiezza $I = \omega C \mathcal{E}_0$ e pulsazione ω, in anticipo di 90° rispetto a $\mathcal{E}(t)$.



$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$
$i(t)$ = corrente nel circ.
$q(t)$ = carica su C

Legge delle maglie: $\mathcal{E}(t) - \Delta V_C(t) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{E}_0 \sin(\omega t) - \dfrac{q(t)}{C} = 0} \\ \boldsymbol{q(0) = 0} \qquad (\textit{condizione iniziale}) \end{cases}$$

Equazione di $q(t)$: $\boldsymbol{q(t) = C\mathcal{E}_0 \sin(\omega t)}$

Ampiezza: $Q = C\mathcal{E}_0$

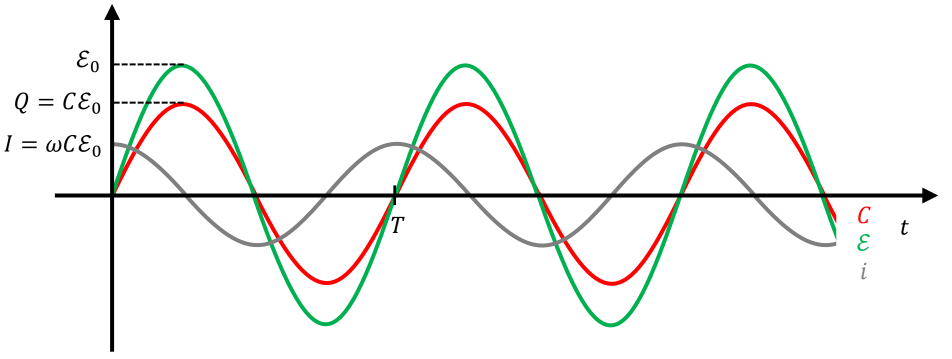
Fase iniziale: $\phi_0 = 0°$

Equazione di $i(t)$: $\boldsymbol{i(t) = \omega C \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)}$

$\boldsymbol{= \omega C \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + 90°)}$

Ampiezza: $I = \omega C \mathcal{E}_0$

Fase iniziale: $\phi_0 = 90°$



Nota Bene

- Il periodo di oscillazione della corrente è $T = 2\pi/\omega$.
- La fem e la corrente sono *fuori fase* (hanno la stessa pulsazione ω ma la fase iniziale differisce di 90°: la corrente raggiunge i massimi in anticipo di un quarto di periodo rispetto alla fem). Invece la fem e la carica presente sul condensatore sono in fase.
- Si definisce *reattanza capacitativa* la quantità:

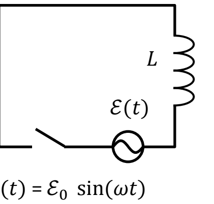
$$X_C = 1/\omega C$$

Si può scrivere allora la seguente relazione (che assomiglia alla prima legge di Ohm, con X_C al posto di R) tra le ampiezze della fem e della corrente:

$$\mathcal{E}_0 = X_C\, I$$

- **Circuito induttivo L**

Si consideri un circuito alimentato da un generatore che fornisce una fem alternata $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$, collegato in serie ad un induttore di induttanza L. Quando l'interruttore è aperto non scorre corrente nel circuito. Quando l'interruttore viene abbassato si genera una corrente $i(t)$ alternata, di ampiezza $I = \mathcal{E}_0/\omega L$ e pulsazione ω, in ritardo di 90° rispetto a $\mathcal{E}(t)$.



$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0\ \sin(\omega t)$
$i(t)$ = corrente nel circ.
$q(t)$ = carica su C

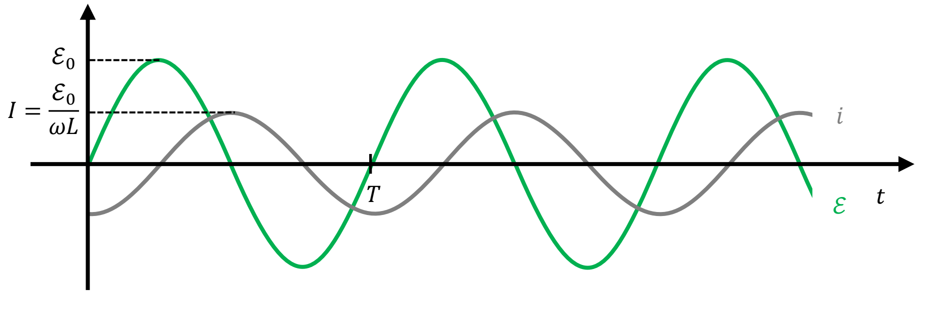
Legge delle maglie: $\mathcal{E}(t) - \Delta V_L(t) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{E}_0 \sin(\omega t) - L \cdot \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0} \\ \boldsymbol{i(0) = 0} \qquad \textit{(condizione iniziale)} \end{cases}$$

Equazione di $i(t)$: $\boldsymbol{i(t) = -\dfrac{\mathcal{E}_0}{\omega L}\cos(\omega t)}$ Ampiezza: $I = \dfrac{\mathcal{E}_0}{\omega L}$

$\boldsymbol{= \dfrac{\mathcal{E}_0}{\omega L}\sin(\omega t - 90°)}$ Fase iniziale: $\phi_0 = -90°$



Nota Bene

- Il periodo di oscillazione della corrente è $T = 2\pi/\omega$.

- La fem e la corrente sono *fuori fase* (hanno la stessa pulsazione ω ma la fase iniziale differisce di 90°: la corrente raggiunge i massimi in ritardo di un quarto di periodo rispetto alla fem).
- Si definisce *reattanza induttiva* la quantità:

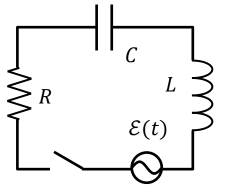
$$X_L = \omega L$$

Si può scrivere allora la seguente relazione (che assomiglia alla prima legge di Ohm, con X_L al posto di R) tra le ampiezze della fem e della corrente:

$$\mathcal{E}_0 = X_L\, I$$

- **Circuito RLC**

Si consideri un circuito alimentato da un generatore che fornisce una fem alternata $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$, collegato in serie ad una resistenza R, ad un condensatore di capacità C e ad induttore di induttanza L. Quando l'interruttore è aperto non scorre corrente nel circuito. Quando l'interruttore viene abbassato si genera una corrente $i(t)$ che si può considerare approssimativamente alternata (a parte negli istanti iniziali), di ampiezza $I = \mathcal{E}_0/Z$, pulsazione ω e fase iniziale tale che $\tan(\phi_0) = (X_L - X_C)/R$.



$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$
$i(t)$ = corrente nel circ.
$q(t)$ = carica su C

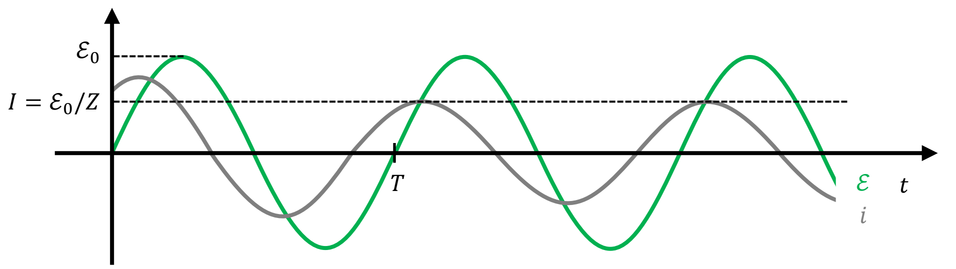
Legge delle maglie: $\mathcal{E}(t) - \Delta V_R(t) - \Delta V_C(t) - \Delta V_L(t) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{E}_0 \sin(\omega t) - R \cdot \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} - \dfrac{q(t)}{C} - L \cdot \dfrac{\mathrm{d}^2 q(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0} \\ \boldsymbol{i(0) = 0, \quad q(0) = 0} \qquad \text{(}\textit{condizioni iniziali)} \end{cases}$$

Equazione di $i(t)$: $$\boldsymbol{i(t) = (c_1 e^{-r_1 t} + c_2 e^{-r_2 t}) + \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \sin(\omega t - \phi_0)}$$

con $\boldsymbol{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$ e $\boldsymbol{tan(\phi_0) = \frac{X_L - X_C}{R}}$



Nota Bene

- Il periodo di oscillazione della corrente è $T = 2\pi/\omega$.
- La fem e la corrente sono *fuori fase* (hanno la stessa pulsazione ω ma la fase iniziale differisce di ϕ_0).
- Come si vede dall'equazione, la corrente non è perfettamente sinusoidale ma in condizioni stazionarie ($t \to +\infty$) il termine $(\boldsymbol{c_1 e^{-r_1 t} + c_2 e^{-r_2 t}})$ si può trascurare perché tende rapidamente ad annullarsi.
- La quantità Z si chiama *impedenza* del circuito. Si può scrivere la seguente relazione (che assomiglia alla prima legge di Ohm, con Z al posto di R) tra le ampiezze della fem e della corrente:

$$\mathcal{E}_0 = Z\, I$$

- Si può vedere che I è massima quando Z è minima, ovvero quando $X_L = X_C$. Ciò succede se la pulsazione del generatore è pari a (risonanza):

$$\omega = 1/\sqrt{LC}$$