Problemi di massimo e minimo in geometria solida

1)Un cilindro di raggio r ha superficie totale S costante. Quale cilindro ha volume massimo?

(1) $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ $\quad$ S costante

cilindro di volume massimo?

(2) $V = \pi r^2 h$

ricavo h dalla (1) e sostituisco nella (2)

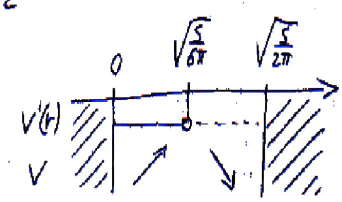
$S - 2\pi r^2 = 2\pi r h \rightarrow h = \dfrac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}$

$V = \pi r^2 \cdot \dfrac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = \dfrac{1}{2} S r - \pi r^3$

studio la funzione $V = V(r) = \dfrac{1}{2} S r - \pi r^3$ $\quad$ con $0 < r < \sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$

$\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{1}{2} S - 3\pi r^2$

$\dfrac{dV}{dr} > 0 \rightarrow \dfrac{1}{2} S - 3\pi r^2 > 0 \rightarrow S > 6\pi r^2 \rightarrow r^2 < \dfrac{S}{6\pi}$



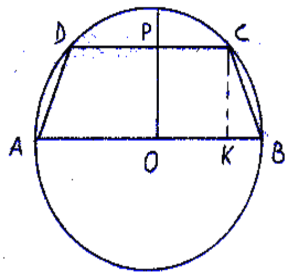
$r = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ $\quad$ punto di max.

$$h = \frac{S - 2\pi \frac{S}{6\pi}}{2\pi \sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = \frac{S - \frac{1}{3} S}{\sqrt{\frac{2}{3}\pi S}} = \frac{\frac{2}{3} S}{\sqrt{\frac{2}{3}\pi S}} = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}} = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}} = 2r$$

Quando il volume è massimo, l'altezza del cilindro è il doppio del raggio di base, pertanto il cilindro di volume massimo è equilatero.

$$V_{max} = \cancel{\pi} \frac{S}{6\cancel{\pi}} \sqrt{\frac{2S}{3\pi}} = \frac{1}{6} S \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$$

2)Determinare il tronco di cono inscritto in una sfera di raggio r di superficie laterale massima.



$\overline{OA} = r$ raggio della sfera

tronco di cono inscritto nella sfera di superficie laterale massima?

$\overline{PC} = x$ raggio della base minore del tronco di cono

$0 < x < r$

$\overline{KB} = r - x$

$\overline{CK}^2 = r^2 - x^2$

$\overline{BC}^2 = \overline{KB}^2 + \overline{CK}^2 = r^2 - 2rx + x^2 + r^2 - x^2 = 2r^2 - 2rx = 2r(r-x)$

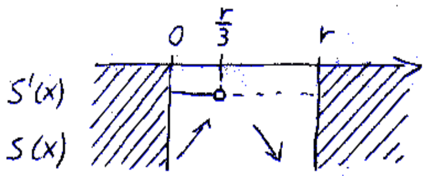
$\overline{BC} = \sqrt{2r(r-x)}$

$$S = \pi\left(\overline{OB} + \overline{PC}\right)\cdot \overline{BC} = \pi(r+x)\sqrt{2r(r-x)}$$

$$\frac{dS}{dx} = \pi\sqrt{2r(r-x)} + \pi(r+x)\frac{(-r)}{\sqrt{2r(r-x)}} = \pi\,\frac{2r^2 - 2rx - r^2 - rx}{\sqrt{2r(r-x)}}$$

$$\frac{dS}{dx} = \pi r\,\frac{r-3x}{\sqrt{2r(r-x)}}$$

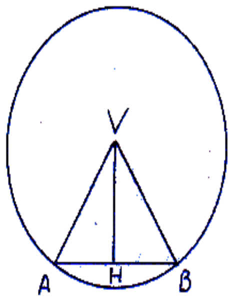
$$\frac{dS}{dx} > 0 \quad \rightarrow \quad r - 3x > 0 \quad \rightarrow \quad x < \frac{r}{3}$$



$x = \frac{r}{3}$ punto di massimo

Il tronco di cono di superficie laterale massima ha il raggio della base minore uguale ad $\frac{1}{3}$ del raggio della sfera.

3)Determinare il cono di volume massimo inscritto in una sfera di raggio r e con il vertice nel centro della
sfera.



V vertice del cono nel centro della sfera

la base del cono è una sezione della sfera

cono di volume massimo?

$\overline{VA} = r$ raggio della sfera

$\overline{VH} = x$ altezza del cono

$0 < x < r$

$\overline{HB} = \sqrt{r^2 - x^2}$

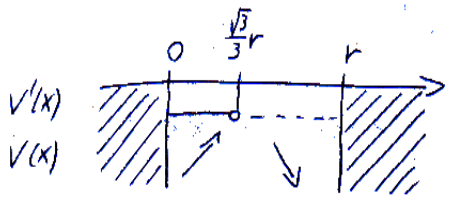
$V = \frac{1}{3}\pi \overline{HB}^2 \cdot \overline{VH}$

$V = \frac{1}{3}\pi (r^2 - x^2) \cdot x$

$V = \frac{\pi}{3}(r^2 x - x^3)$

$\frac{dV}{dx} = \frac{\pi}{3}(r^2 - 3x^2)$

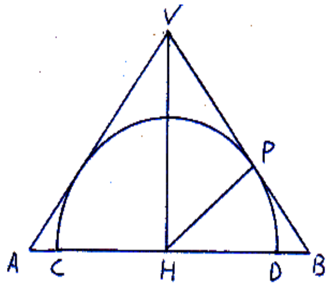
$\frac{dV}{dx} > 0 \rightarrow r^2 - 3x^2 > 0$



$x = \frac{\sqrt{3}}{3} r$ punto di massimo

Il cono di volume massimo ha altezza uguale a $\frac{\sqrt{3}}{3} r$.

4)Determinare il cono circoscritto ad una semisfera di raggio r e di volume minimo.



$\overline{PH} = r$ raggio dell'emisfero

cono circoscritto all'emisfero di volume minimo?

$\overline{HB} = x \qquad x > r$

$\overline{PB} = \sqrt{x^2 - r^2}$

$\overline{PH}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PV}$

$\overline{PV} = \dfrac{r^2}{\sqrt{x^2 - r^2}}$

$\overline{VH}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{PV}^2 = r^2 + \dfrac{r^4}{x^2 - r^2} = \dfrac{r^2 x^2 \cancel{- r^4} \cancel{+ r^4}}{x^2 - r^2}$

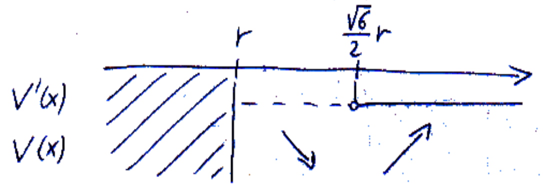
$\overline{VH} = \dfrac{rx}{\sqrt{x^2 - r^2}}$

$$V = \frac{1}{3}\pi\, \overline{HB}^2 \cdot \overline{VH} = \frac{\pi r}{3} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\pi r}{3} \; \frac{3x^2\sqrt{x^2 - r^2} - \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2 - r^2}}}{x^2 - r^2} = \frac{\pi r}{3} \; \frac{3x^4 - 3r^2x^2 - x^4}{(x^2 - r^2)\sqrt{x^2 - r^2}}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\pi r^2 x^2}{3} \; \frac{2x^2 - 3r^2}{\sqrt{(x^2 - r^2)^3}}$$

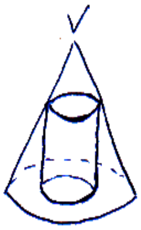
$$\frac{dV}{dx} > 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 3r^2 > 0$$



$x = \dfrac{\sqrt{6}}{2} r$ punto di minimo

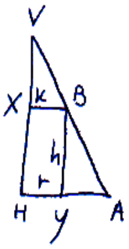
Il cono di volume minimo è quello il cui raggio di base è uguale a $\dfrac{r\sqrt{6}}{2}$.

5)Determinare il cono circoscritto ad un cilindro di raggio r e di volume minimo.



cilindro assegnato

cono circoscritto di volume minimo ?



h altezza del cilindro

r raggio di base del cilindro

x altezza del cono circoscritto al cilindro

y raggio di base del cono

$r : y = (x-h) : x \qquad \overset{\triangle}{VKB} \sim \overset{\triangle}{VHA}$

$y(x-h) = rx \rightarrow y = \dfrac{rx}{x-h} \qquad x > h$

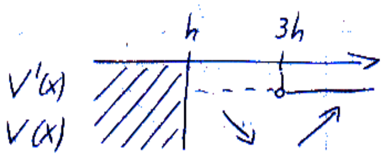
$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 x = \frac{\pi}{3}\frac{r^2x^2}{(x-h)^2}\cdot x = \frac{\pi}{3}\frac{r^2x^3}{(x-h)^2}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\pi}{3}r^2\,\frac{3x^2(x-h)^2 - 2(x-h)x^3}{(x-h)^4}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\pi}{3}r^2x^2\,\frac{3(x-h)-2x}{(x-h)^3} = \frac{\pi r^2x^2}{3(x-h)^3}\left(3x-3h-2x\right)$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\pi r^2x^2}{3(x-h)^3}\left(x-3h\right)$$

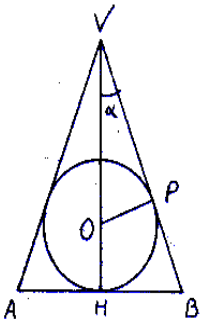
$$\frac{dV}{dx} > 0 \rightarrow x > 3h$$



$x = 3h$ punto di minimo

Il cono di volume minimo è quello la cui altezza è tripla di quella del cilindro.

6)Determinare il cono di volume minimo circoscritto ad una sfera di raggio r .



$\overline{OP} = r$ raggio della sfera inscritta al cono

cono di volume minimo ?

$$O\widehat{V}P = \alpha \qquad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

$$\overline{OP} = \overline{OV}\sin\alpha \rightarrow \overline{OV} = \frac{r}{\sin\alpha}$$

$$\overline{VH} = \overline{HO}+\overline{OV} = r+\frac{r}{\sin\alpha} = r\,\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\overline{HB} = \overline{VH}\,tg\,\alpha = r\,\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$V=\frac{1}{3}\pi\,\overline{HB}^2\cdot\overline{VH} = \frac{1}{3}\pi r^3\,\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\pi r^3}{3}\,\frac{(1+\sin\alpha)^{\cancel{3}\,2}}{\sin\alpha\,(1-\sin\alpha)\cancel{(1+\sin\alpha)}}$$

$$V = \frac{\pi r^3}{3}\,\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\,(1-\sin\alpha)}$$

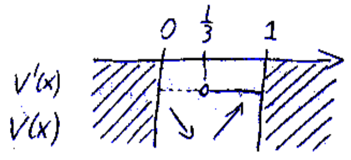
$$x=\sin\alpha \qquad 0<x<1$$

$$V(x) = \frac{\pi r^3}{3}\,\frac{x^2+2x+1}{x-x^2}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\pi r^3}{3}\,\frac{(2x+2)(x-x^2)-(1-2x)(x^2+2x+1)}{(x-x^2)^2} = \frac{\pi r^3}{3}\,\frac{\cancel{2x^2}-\cancel{2x^3}+\cancel{2x}-\cancel{2x^2}-x^2-\cancel{2x}-1+\cancel{2x^3}+4x^2+2x}{(x-x^2)^2}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\pi r^3}{3}\,\frac{3x^2+2x-1}{(x-x^2)^2}$$

$$\frac{dV}{dx}>0 \rightarrow 3x^2+2x-1>0 \rightarrow (x+1)(3x-1)>0$$

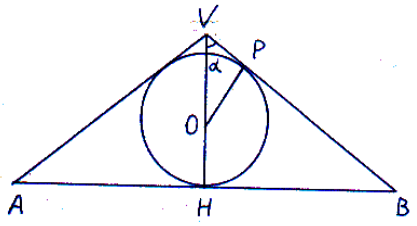


$$x=\frac{1}{3} \quad \text{punto di minimo}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha \simeq 19{,}47^\circ$$

Il cono di volume minimo è quello la cui semiapertura è uguale a $\arcsin\frac{1}{3}$.

7)Determinare il cono di superficie totale minima circoscritto ad una sfera di raggio r .



$\overline{OP} = r$ raggio della sfera inscritta al cono

cono di superficie totale minima ?

$\widehat{OVP} = \alpha \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$r = \overline{OV} \sin\alpha$

$\overline{OV} = \frac{r}{\sin\alpha}$

$\overline{VH} = \overline{OV} + \overline{HO} = \frac{r}{\sin\alpha} + r = \frac{r}{\sin\alpha}(1+\sin\alpha)$

$\overline{HB} = \overline{VH}\, tg\alpha = r\,\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\overline{HB} = \overline{VB}\,\sin\alpha$

$\overline{VB} = r\,\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$$S = \pi\overline{HB}^2 + \pi\overline{HB}\cdot\overline{VB} = \pi r^2\left[\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha} + \frac{(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos^2\alpha}\right] = \pi r^2\,\frac{(1+\sin\alpha)^3}{\sin\alpha\,(1-\sin^2\alpha)}$$

$$S = \pi r^2\,\frac{(1+\sin\alpha)^{\cancel{3}\,2}}{\sin\alpha\,\cancel{(1+\sin\alpha)}(1-\sin\alpha)} = \pi r^2\,\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\,(1-\sin\alpha)}$$

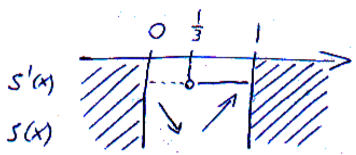
$x = \sin\alpha \qquad 0 < x < 1$

$$S(x) = \pi r^2\,\frac{x^2+2x+1}{x-x^2}$$

$$\frac{dS}{dx} = \pi r^2\,\frac{(2x+2)(x-x^2)-(x^2+2x+1)(1-2x)}{(x-x^2)^2}$$

$$\frac{dS}{dx} = \pi r^2\,\frac{\cancel{2x^2}\cancel{-2x^3}\cancel{+2x}\cancel{-2x^2}-x^2\cancel{+2x^3}\cancel{-2x}+4x^2-1+2x}{(x-x^2)^2} = \pi r^2\,\frac{3x^2+2x-1}{(x-x^2)^2}$$

$$\frac{dS}{dx} > 0 \quad\rightarrow\quad 3x^2+2x-1>0 \quad\rightarrow\quad (x+1)(3x-1)>0$$

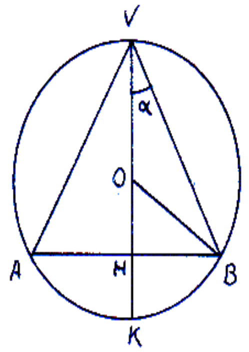


$x = \frac{1}{3}$ punto di minimo

$\sin\alpha = \frac{1}{3} \quad\rightarrow\quad \alpha \simeq 19{,}47°$

Il cono di superficie totale minima è quello la cui semiapertura è uguale a $\arcsin\frac{1}{3}$.

8)Determinare il cono di superficie totale minima inscritto in una sfera di raggio r.



$\overline{OB} = r$ raggio della sfera

cono di superficie totale massima ?

$K\widehat{V}B = \alpha \qquad 0 < \alpha < 90°$

$\overline{VB} = \overline{VK} \cos\alpha = 2r\cos\alpha$

$\overline{VH} = \overline{VB} \cos\alpha = 2r\cos^2\alpha$

$\overline{HB} = \overline{VB} \sin\alpha = 2r\sin\alpha\cos\alpha$

$$S = \pi\overline{HB}^2 + \pi\,\overline{HB}\cdot\overline{VB}$$

$$S = 4\pi r^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha + 4\pi r^2 \sin\alpha\cos^2\alpha$$

$$S = 4\pi r^2\left(\sin^2\alpha - \sin^4\alpha + \sin\alpha - \sin^3\alpha\right)$$

$$x = \sin\alpha \qquad 0 < x < 1$$

$$S = 4\pi r^2\left(-x^4 - x^3 + x^2 + x\right)$$

$$\frac{dS}{dx} = 4\pi r^2\left(-4x^3 - 3x^2 + 2x + 1\right)$$

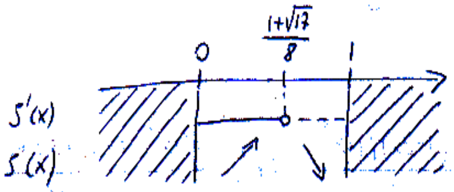
	-4	-3	2	1
-1		4	-1	-1
	-4	1	1	0

$$\frac{dS}{dx} = 4\pi r^2 (x+1)\left(-4x^2 + x + 1\right)$$

$$\frac{dS}{dx} > 0 \rightarrow (x+1)\left(-4x^2+x+1\right) > 0$$

$$-4x^2 + x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{-8} = \left\langle \begin{matrix} \dfrac{1+\sqrt{17}}{8} \\ \dfrac{1-\sqrt{17}}{8} \end{matrix} \right.$$



$$x = \frac{1+\sqrt{17}}{8} \qquad \text{punto di massimo}$$

$$\sin\alpha = \frac{1+\sqrt{17}}{8} \qquad \alpha \simeq 39{,}82°$$

Il cono di superficie totale massima è quello la cui semiapertura misura $\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)$.

9)Determinare il cono di apotema l costante e di volume massimo.

ℓ apotema costante

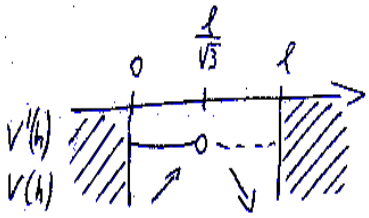
cono di volume massimo?

$r^2 = \ell^2 - h^2 \qquad 0 < h < \ell$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\ell^2 - h^2)h = \frac{\pi}{3}(\ell^2 h - h^3)$$

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3}(\ell^2 - 3h^2)$$

$$\frac{dV}{dh} > 0 \rightarrow \ell^2 - 3h^2 > 0$$



Il cono di volume massimo è quello la cui altezza è $\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$.

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$ punto di massimo

10)Determinare il cono di superficie laterale minima e di volume costante.

$V=\frac{1}{3}\pi a^3$ volume costante

superficie laterale minima?

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\frac{1}{3}\pi a^3=\frac{1}{3}\pi r^2 h \rightarrow a^3=r^2h \rightarrow h=\frac{a^3}{r^2}$$

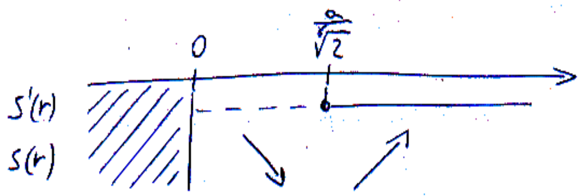
$$\ell=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{r^2+\frac{a^6}{r^4}}$$

$$S=\pi r\ell=\pi r\sqrt{r^2+\frac{a^6}{r^4}}=\pi r\sqrt{\frac{r^6+a^6}{r^4}}=\pi\frac{\sqrt{r^6+a^6}}{r} \qquad r>0$$

$$\frac{dS}{dr}=\pi\frac{\frac{6r^6}{2\sqrt{r^6+a^6}}-\sqrt{r^6+a^6}}{r^2}=\pi\frac{3r^6-r^6-a^6}{r^2\sqrt{r^6+a^6}}$$

$$\frac{dS}{dr}=\pi\frac{2r^6-a^6}{r^2\sqrt{r^6+a^6}}$$

$$\frac{dS}{dr}>0 \rightarrow 2r^6-a^6>0$$



$$r=\frac{a}{\sqrt[6]{2}} \quad \text{punto di minimo}$$

Il cono di superficie laterale minima è quello il cui raggio di base misura $\frac{a}{\sqrt[6]{2}}$.

11)Determinare il cono di raggio r, di volume massimo e di superficie laterale costante.
13

$S=\pi a^2$ superficie laterale costante

volume massimo?

$l=\sqrt{r^2+h^2}$

$S=\pi r l=\pi r\sqrt{r^2+h^2} \rightarrow \left(\frac{S}{\pi r}\right)^2=r^2+h^2 \rightarrow h=\sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 r^2}-r^2}$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 r^2}-r^2}$

$V=\frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{S^2}{\pi^2}r^2-r^6}$

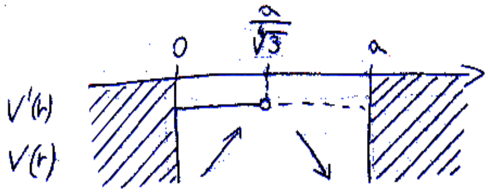
$$\frac{dV}{dr}=\frac{\pi}{3}\,\frac{\frac{2S^2}{\pi^2}r-6r^5}{2\sqrt{\frac{S^2}{\pi^2}r^2-r^6}}=\frac{\pi r}{3}\,\frac{\frac{S^2}{\pi^2}-3r^4}{\sqrt{\frac{S^2}{\pi^2}r^2-r^6}}=\frac{\pi \cancel{r}}{3}\,\frac{\frac{S^2}{\pi^2}-3r^4}{\cancel{r}\sqrt{\frac{S^2}{\pi^2}-r^4}}$$

$$\frac{dV}{dr}=\frac{\frac{1}{\pi}S^2-3\pi r^4}{3\sqrt{\frac{S^2}{\pi^2}-r^4}}$$

poiché $S=\pi a^2$

$$\frac{dV}{dr}=\frac{\pi a^4-3\pi r^4}{3\sqrt{a^4-r^4}} \qquad 0<r<a$$

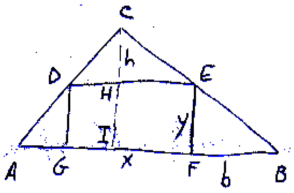
$\frac{dV}{dr}>0 \rightarrow a^4-3r^4>0$



$r=\frac{a}{\sqrt[4]{3}}$ punto di massimo

Il cono di volume massimo è quello il cui raggio di base misura $\frac{a}{\sqrt[4]{3}}$.

12)E' dato il triangolo ABC . Inscrivere il rettangolo la cui rotazione attorno alla base AB genera un cilindro di volume massimo.



b base del triangolo

h altezza del triangolo relativa alla base b

x base del rettangolo

y altezza del rettangolo

volume massimo generato dal rettangolo ruotando intorno alla base del triangolo?

$\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{CI} : \overline{CH}$

$b : x = h : (h-y)$

$xh = bh - by \rightarrow by = h(b-x) \rightarrow y = \frac{h}{b}(b-x) \qquad 0<x<b$

$V = \pi y^2 x$

il rettangolo, ruotando intorno alla base del triangolo, genera un cilindro di raggio di base y e di altezza x

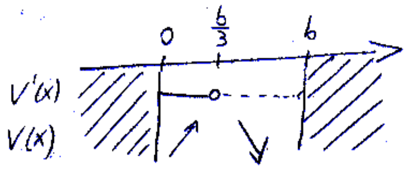
$V = \pi \frac{h^2}{b^2}(b-x)^2 x$

$V = \frac{\pi h^2}{b^2}(b^2 - 2bx + x^2)x$

$V = \frac{\pi h^2}{b^2}(b^2 x - 2bx^2 + x^3)$

$\frac{dV}{dx} = \frac{\pi h^2}{b^2}(b^2 - 4bx + 3x^2)$

$\frac{dV}{dx} > 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 4bx + b^2 > 0 \rightarrow (x-b)(3x-b) > 0$

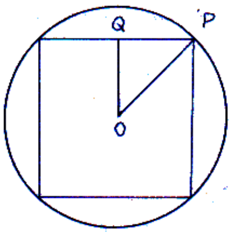


$x = \frac{b}{3}$ punto di massimo

$y = \frac{h}{b}\left(b - \frac{b}{3}\right) = \frac{2}{3}h$

Il volume è massimo quando il lato del rettangolo parallelo alla base del triangolo misura $\frac{b}{3}$ e quando l'altro lato misura $\frac{2h}{3}$.

3)Inscrivere in una sfera di raggio r un cilindro di superficie totale massima.



$\overline{OP} = r$ raggio della sfera

$\overline{PQ} = x$ raggio di base del cilindro inscritto nella sfera

$\overline{OQ} = \frac{1}{2}h$ h altezza del cilindro

cilindro di superficie totale massima?

$\overline{PQ} = x \qquad 0 < x < r$

$\frac{h}{2} = \sqrt{r^2 - x^2} \rightarrow h = 2\sqrt{r^2 - x^2}$

$S = 2\pi x^2 + 2\pi x h$

$S = 2\pi x^2 + 4\pi x\sqrt{r^2 - x^2}$

$$\frac{dS}{dx} = 4\pi x + 4\pi\sqrt{r^2 - x^2} + 4\pi x \frac{(-2x)}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{4\pi}{\sqrt{r^2 - x^2}}\left(x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - x^2\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{r^2 - x^2}}\left(x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2\right)$$

$$\frac{dS}{dx} > 0 \rightarrow x\sqrt{r^2 - x^2} > 2x^2 - r^2$$

se $0 < x < \frac{r}{\sqrt{2}} \rightarrow$ I membro positivo, II membro negativo $\rightarrow$ diseq. soddisfatta

se $\frac{r}{\sqrt{2}} \leq x < r$

$x^2 r^2 - x^4 > 4x^4 - 4r^2x^2 + r^4$

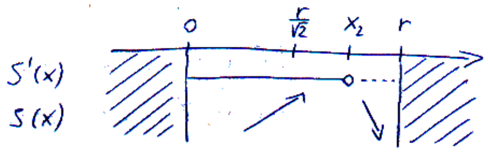
$5x^4 - 5r^2x^2 + r^4 < 0$

$x^2_{1,2} = \frac{5r^2 \pm \sqrt{5}r^2}{10}$

$x_1^2 = r^2\,\frac{5-\sqrt{5}}{10} \qquad x_1 = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \approx 0{,}5257r$

$x_2^2 = r^2\,\frac{5+\sqrt{5}}{10} \qquad x_2 = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \approx 0{,}8507r$

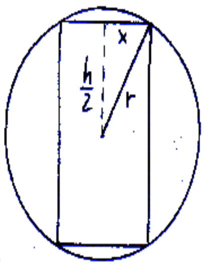
$5(x+x_1)(x-x_1)(x+x_2)(x-x_2) < 0$



$x = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ punto di max.

Il cilindro di superficie totale massima è quello il cui raggio di base misura $r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$.

14)Determinare il cilindro di superficie laterale massima inscritto in una sfera di raggio r.



r raggio della sfera

cilindro di superficie laterale massima?

$$\frac{h}{2} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

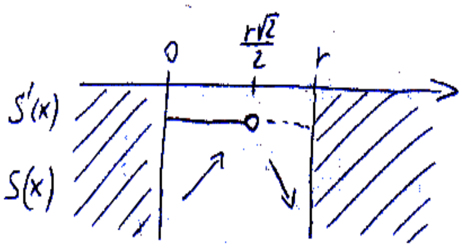
$$h = 2\sqrt{r^2 - x^2} \qquad 0 < x < r$$

$$S = 2\pi x h = 2\pi x \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} = 4\pi\sqrt{r^2 x^2 - x^4}$$

$$\frac{dS}{dx} = 4\pi \frac{2r^2 x - 4x^3}{2\sqrt{r^2 x^2 - x^4}} = 4\pi \cdot \frac{\cancel{2x}(r^2 - 2x^2)}{\cancel{2x}\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{4\pi(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

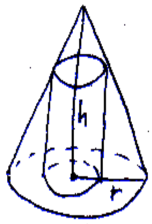
$$\frac{dS}{dx} > 0 \rightarrow r^2 - 2x^2 > 0$$



$x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ punto di max.

Il cilindro di superficie laterale massima è quello il cui raggio di base misura $\frac{r\sqrt{2}}{2}$.

15)Determinare il cilindro di volume massimo inscritto in un cono di raggio r.



r raggio del cono

h altezza del cono

cilindro di volume massimo inscritto nel cono ?

x altezza del cilindro $\quad 0<x<h$

y raggio del cilindro

$$x : h = (r-y) : r$$

$$r-y = \frac{xr}{h} \rightarrow y = r - \frac{xr}{h} = r\left(1-\frac{x}{h}\right) = \frac{r}{h}(h-x)$$

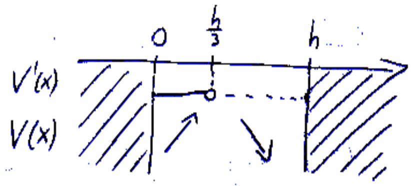
volume del cilindro $V = \pi y^2 x$

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2}(h-x)^2 x = \frac{\pi r^2}{h^2}\left(h^2-2hx+x^2\right)x = \frac{\pi r^2}{h^2}\left(h^2x-2hx^2+x^3\right)$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\pi r^2}{h^2}\left(h^2-4hx+3x^2\right)$$

$$\frac{dV}{dx}>0 \rightarrow 3x^2-4hx+h^2>0$$

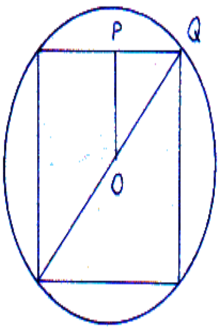
$$x_{1,2} = \frac{2h \pm \sqrt{h^2}}{3} = \begin{cases} - & \frac{h}{3} \\ + & h \end{cases}$$



$x = \frac{h}{3}$ punto di massimo

Il cilindro di volume massimo ha altezza uguale ad $\frac{1}{3}$ di quella del cono.

16)Determinare il cilindro di volume massimo inscritto in una sfera di raggio r.



$\overline{OQ} = r$ raggio della sfera circoscritta al cilindro

$\overline{PQ} = x$ raggio di base del cilindro

$\overline{OP} = \frac{h}{2}$ h altezza del cilindro

cilindro di volume massimo?

$$\frac{h}{2} = \sqrt{r^2-x^2} \qquad \text{(teorema di Pitagora)}$$

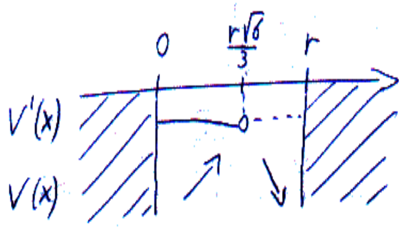
$$h = 2\sqrt{r^2-x^2} \qquad 0<x<r$$

$$V = \pi x^2 h = 2\pi x^2\sqrt{r^2-x^2} = 2\pi\sqrt{r^2x^4-x^6}$$

$$\frac{dV}{dx} = \cancel{2}\pi\,\frac{4r^2x^3-6x^5}{\cancel{2}\sqrt{r^2x^4-x^6}} = \pi\,\frac{2x^3(2r^2-3x^2)}{\sqrt{r^2x^4-x^6}}$$

$$\frac{dV}{dx} = 2\pi\,\frac{x(2r^2-3x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\frac{dV}{dx}>0 \rightarrow 2r^2-3x^2>0$$



Il volume è massimo quando il raggio di base misura $\frac{r\sqrt{6}}{3}$.

$x = \frac{r\sqrt{6}}{3}$ punto di max.