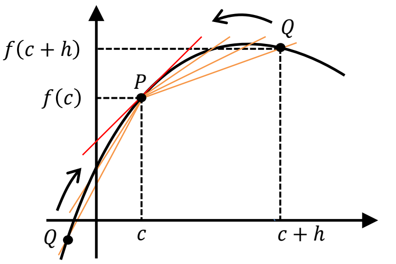
Derivata di una funzione

● Derivabilità e derivata in un punto

Sia $y = f(x)$ una funzione reale di variabile reale di dominio $D(f)$, e sia $c \in D(f)$.
Si dice che la funzione è derivabile in c se esiste ed è finito il seguente limite, che verrà detto derivata di $f(x)$ in c:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$



Considerato il punto P di ascissa c appartenente al grafico della funzione, la derivata della funzione in c è il valore a cui tende il coefficiente angolare delle corde PQ man mano che Q si avvicina a P (sia da sinistra che da destra), dove Q è un altro punto appartenente al grafico della funzione. In simboli:

$$f'(c) = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

Il rapporto incrementale rappresenta infatti il coefficiente angolare delle corde PQ, perché $f(c+h) - f(c)$ rappresenta la variazione verticale, e h la variazione orizzontale del segmento. La condizione $h \to 0$ equivale a dire che Q tende a P.

Se la funzione è derivabile in c, tale limite rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione nel punto P.

La derivata della funzione in c rappresenta la velocità con la quale la funzione sta variando in c.

Si dice che $f(x)$ è derivabile a sinistra di c se esiste ed è finito il seguente limite, che verrà detto derivata sinistra di $f(x)$ in c:

$$f'_-(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Si dice che $f(x)$ è derivabile a destra di c se esiste ed è finito il seguente limite, che verrà detto derivata destra di $f(x)$ in c:

$$f'_+(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Si può dare alla definizione della derivata sinistra e destra la stessa interpretazione geometrica della derivata, limitandosi al caso in cui Q si avvicini a P soltanto da sinistra o da destra.

● Derivabilità in un intervallo

Una funzione $f(x)$ si dice derivabile in un intervallo se è derivabile in ogni punto di quell'intervallo.

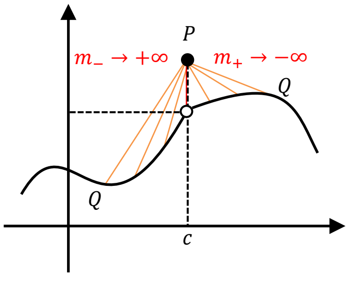
● Continuità e derivabilità

Se una funzione è derivabile in un punto c, allora è continua in c.

Le funzioni derivabili sono un sottoinsieme delle funzioni continue.

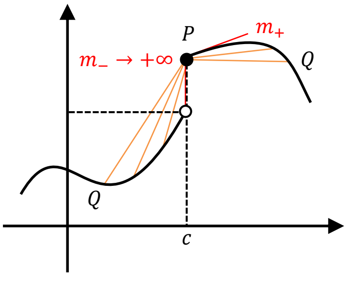
● Tipi di non derivabilità

Se c è punto di discontinuità, allora la funzione non è derivabile in c.



$f'_-(c) = +\infty \qquad f'_+(c) = -\infty$

Discontinua in c
Non derivabile in c



$f'_-(c) = +\infty \qquad f'_+(c) = m_+$

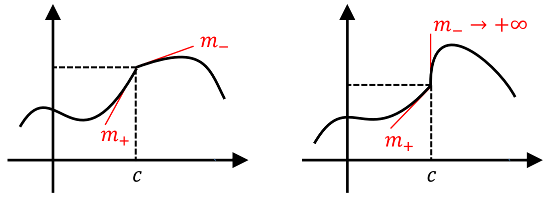
Discontinua da sinistra in c
Non derivabile da sinistra in c

Se in c la funzione è continua…

…allora si dice che c è <u>punto angoloso</u> se:

$$f'_-(c) = m_+ \neq m_- = f'_+(c)$$

oppure se una tra la derivata destra e la derivata sinistra è infinita, e l'altra no.

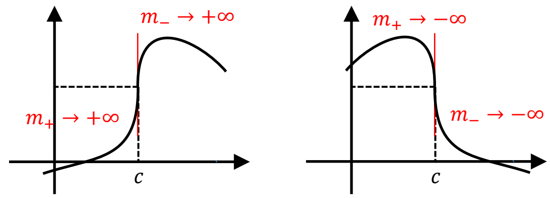


…allora si dice che c è <u>flesso a tangenza verticale</u> se:

$$f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$$

oppure

$$f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$$

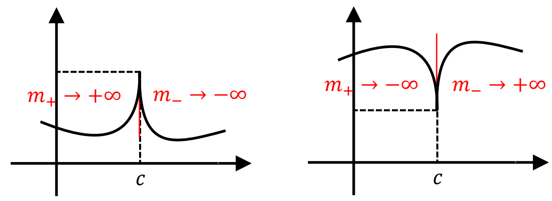


…allora si dice che c è punto di <u>cuspide</u> se:

$$f'_-(c) = +\infty \quad \text{e} \quad f'_+(c) = -\infty$$

oppure

$$f'_-(c) = -\infty \quad \text{e} \quad f'_+(c) = +\infty$$



- **Funzione derivata**

La funzione derivata è la funzione che associa ad ogni x per cui $y = f(x)$ è derivabile, la derivata della funzione in quel punto.
Esistono diverse notazioni per indicare la funzione derivata:

$$y = f'(x) \qquad y = \frac{df}{dx} \qquad y = D[f(x)]$$

…e la funzione derivata calcolata in un punto c.

$$y = f'(c) \qquad y = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c} \qquad y = D[f(x)]_{x=c}$$

La funzione derivata è un'espressione che permette di calcolare la derivata della funzione in un qualsiasi punto c in cui questa è derivabile.
Spesso, con abuso di notazione, si scrive «derivata» invece di «funzione derivata».

- **Derivata delle funzioni elementari**

Le funzioni elementari sono derivabili in $\mathbb{R}$ (a parte la logaritmica, che è derivabile soltanto per $x > 0$):

$$D[k] = 0 \qquad D[\cos(x)] = -\sin(x) \qquad D[a^x] = a^x \cdot \ln(a) \longrightarrow D[e^x] = e^x$$

$$D[x] = 1 \qquad D[\sin(x)] = \cos(x) \qquad D[\log_a(x)] = \frac{1}{x \cdot \ln(a)} \longrightarrow D[\ln(x)] = \frac{1}{x}$$

- **Algebra delle derivate**

$$D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x) \qquad D\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$D[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

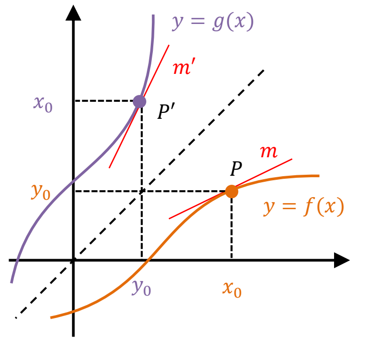
$$D\left[a^{f(x)}\right] = D\left[e^{\ln a^{f(x)}}\right] = D\left[e^{f(x) \cdot \ln a}\right] = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$$

$$D\left[f(x)^{g(x)}\right] = D\left[e^{\ln f(x)^{g(x)}}\right] = D\left[e^{g(x) \cdot \ln f(x)}\right] = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

Derivata della funzione inversa

Sia $y = f(x)$ una funzione invertibile e derivabile in $x_0 \in D(f)$, tale che la sua inversa g sia derivabile nel punto $y_0 \in D(g)$, con $y_0 = f(x_0)$. Allora:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$



Altre derivate importanti

$$D[x^n] = n \cdot x^{n-1}$$

$$D\left[\frac{1}{x}\right] = D[x^{-1}] = -\frac{1}{x^2}$$

$$D[\sqrt{x}] = D\left[x^{1/2}\right] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D[\sqrt[3]{x}] = D\left[x^{1/3}\right] = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$D[\tan x] = D\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D[\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$$

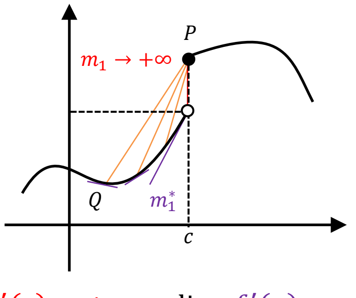
Limite della derivata

La seguente uguaglianza:

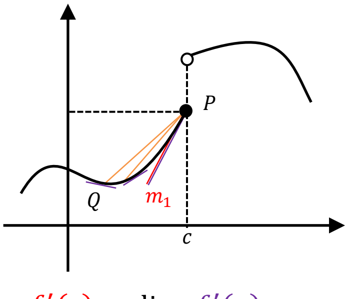
$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} f'(x) \qquad \left(\text{risp. } f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} f'(x)\right)$$

è vera solo se la funzione è continua da sinistra (risp. da destra) in c.

Se la funzione non fosse continua in c, il limite della derivata potrebbe esistere finito, ma la derivata no:



$$f'_-(c) = +\infty \qquad \lim_{x \to c^-} f'(x) = m_1^*$$



$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} f'(x) = m_1$$

Studio della derivabilità di una funzione

Data una funzione $y = f(x)$:

- Se $c \notin D(f)$ o c è punto di discontinuità, allora la funzione è sicuramente non derivabile in c.
- Se $c \notin D(f')$, allora la funzione è sicuramente non derivabile in c.

- ■ Se $c \in D(f)$ è un punto di raccordo e f è continua in c, allora la funzione è derivabile in c se e solo se:

$$\lim_{x \to c^-} f'(x) = \lim_{x \to c^+} f'(x) \qquad \text{e sono finiti.}$$

- ♠ Se $c \in D(f)$ è un punto di frontiera, ovvero se la funzione è definita solo in un intorno sinistro (risp. destro) di c, e f è continua in c, allora la funzione è derivabile da sinistra (risp. da destra) se esiste finito il limite

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \qquad \left(\text{risp. } \lim_{x \to c^+} f(x)\right)$$

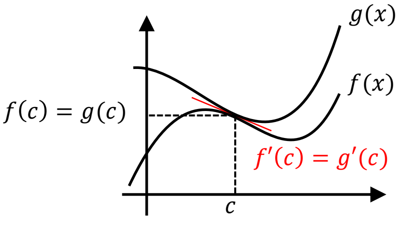
- ♥ In tutti gli altri punti appartenenti al dominio della derivata, se la funzione è somma, prodotto, quoziente o composizione di funzioni derivabili, allora la funzione è derivabile.

E' opportuno studiare la continuità di una funzione prima di studiarne la derivabilità, in modo da escludere dallo studio i punti di discontinuità (dal momento che la funzione non è in questi derivabile).
E' possibile dedurre il tipo di non derivabilità che la funzione presenta in un punto c di continuità ma non derivabilità a partire dal calcolo del limite sinistro e destro di $f'(x)$ per x tendente a c.

● Condizione di tangenza del grafico di due funzioni

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue e derivabili in un intorno di c.
I grafici delle due funzioni sono tangenti in c se e solo se:

$$\begin{cases} f(c) = g(c) \\ f'(c) = g'(c) \end{cases}$$



Equivale a richiedere che i grafici passino per un punto in comune, e che lì abbiano la stessa inclinazione (in modo da avere una retta tangente in comune).

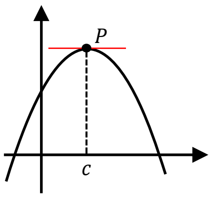
I teoremi del calcolo differenziale

• Punto stazionario

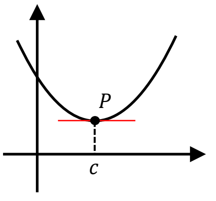
Un punto $c \in D(f)$ si dice stazionario per la funzione f se:

$$f'(c) = 0$$

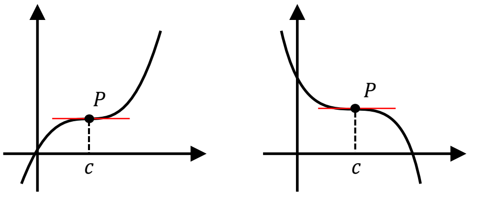
Un punto stazionario può essere:



di <u>massimo</u>
se in un intorno di c:
f è crescente per $x < c$
e
f è decrescente per $x > c$



di <u>minimo</u>
se in un intorno di c:
f è decrescente per $x < c$
e
f è crescente per $x > c$



di <u>flesso a tangenza orizzontale</u>
se in un intorno di c:
f è crescente per $x < c$ e $x > c$
oppure
f è decrescente per $x < c$ e $x > c$

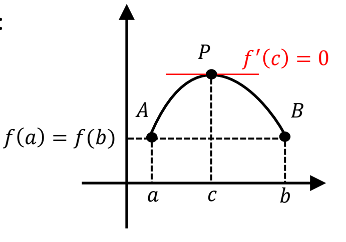
Se la funzione è costante in un intorno di c, allora c non ricade in nessuna di queste categorie.

• Teorema di Rolle

Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita in un intervallo $[a, b]$. Se:

1) $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a, b]$
2) $f(x)$ è derivabile nell'intervallo $]a, b[$
3) $f(a) = f(b)$

allora esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$.



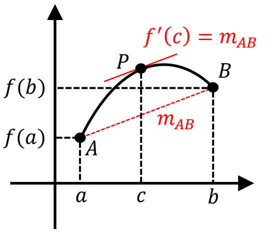
Se la funzione rispetta le ipotesi del teorema di Rolle, allora esiste un punto stazionario (ovvero un punto in cui la retta tangente al grafico della funzione è orizzontale).
Se le ipotesi del teorema di Rolle non sono rispettate, nulla si può dire riguardo all'esistenza di tale punto.

• Teorema di Lagrange

Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita in un intervallo $[a, b]$. Se:

1) $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a, b]$
2) $f(x)$ è derivabile nell'intervallo $]a, b[$

allora esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = m_{AB} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



Se la funzione rispetta le ipotesi del teorema di Lagrange, allora esiste un punto in cui la retta tangente al grafico della funzione è parallela al segmento AB.
Se le ipotesi del teorema di Lagrange non sono rispettate, nulla si può dire riguardo all'esistenza di tale punto.

• Primo corollario del teorema di Lagrange (Teorema della monotonia)

Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile in un intervallo I.

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ è crescente in } I$$
$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ è decrescente in } I$$
$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ è costante in } I$$

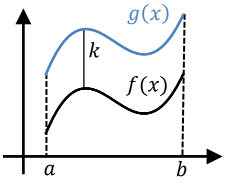
Dal segno della derivata di una funzione è possibile dedurne la monotonia.

- **Secondo corollario del teorema di Lagrange**

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue e derivabili in un intervallo I.

$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in I \quad \Leftrightarrow \quad f$ e g differiscono per una costante in I

Se due funzioni hanno la stessa derivata in ogni punto di un intervallo allora esiste una costante $k \in \mathbb{R}$ tale che $g(x) = f(x) + k$, ovvero in quell'intervallo i loro grafici si ottengono uno dall'altro tramite una traslazione verticale.



- **Teorema di De L'Hospital**

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in un intorno di ■. Se:

1) $f(x)$ e $g(x)$ sono continue e derivabili in un intorno di ■ (eccetto al più ■)

2) $g'(x) \neq 0$ in un intorno di ■ (eccetto al più ■)

3) $\lim_{x\to■} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$ oppure $\lim_{x\to■} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

4) Esiste $\lim_{x\to■} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora:

$$\lim_{x\to■} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to■} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- **Teorema della concavità**

Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile due volte in un intervallo I.

$f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \quad \Leftrightarrow \quad f$ ha concavità rivolta verso l'alto in I

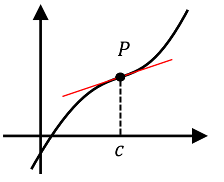
$f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \quad \Leftrightarrow \quad f$ ha concavità rivolta verso il basso in I

In un intervallo in cui la derivata seconda è positiva il grafico della funzione «ride», mentre quando è negativa il grafico della funzione «piange». La derivata seconda di una funzione in un punto c rappresenta inoltre la curvatura della funzione in c: maggiore è il valore della derivata seconda (in valore assoluto), maggiore è la curvatura della funzione.

- **Punto di flesso**

Un punto $c \in D(f)$ si dice di flesso per una funzione f derivabile in un intorno di c se f cambia concavità in c. Ciò accade se:

$f''(c) = 0 \quad$ e $\quad f''(x)$ cambia segno in c



- **Teorema delle derivate successive**

Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile n volte in un intorno di $c \in D(f)$.

Se $f'(c) = 0 \Rightarrow c$ è punto stazionario

- Se $f''(c) > 0 \Rightarrow c$ è di minimo
- Se $f''(c) < 0 \Rightarrow c$ è di massimo
- Se $f''(c) = 0 \Rightarrow$ si derivi fino a trovare $f^{(n)}(c) \neq 0$ *
  - Se n è pari e $f^{(n)}(c) > 0 \Rightarrow c$ è di minimo
  - Se n è pari e $f^{(n)}(c) < 0 \Rightarrow c$ è di massimo
  - Se n è dispari e $f^{(n)}(c) > 0 \Rightarrow c$ è di flesso or. asc.
  - Se n è dispari e $f^{(n)}(c) < 0 \Rightarrow c$ è di flesso or. disc.

** Se $f^{(n)}(c) = 0$ per ogni $n > 2$, allora f è costante in un intorno di c.*