# EQUAZIONI DI MAXWELL

**Annotazioni**

- **Equazioni di Maxwell**

  Tutti i fenomeni elettromagnetici possono essere interpretati a partire da queste equazioni (Maxwell, 1873):

  <u>Teorema di Gauss per il campo elettrico</u>
  Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa
  dipende dalle cariche interne alla superficie.
  [Le cariche elettriche sono le sorgenti del campo elettrico]

  $$\phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon}$$

  <u>Teorema di Gauss per il campo magnetico</u>
  Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è nullo.
  [Non esistono monopoli magnetici]

  $$\phi_S(\vec{E}) = 0$$

  <u>Legge di Faraday-Neumann-Lenz</u>
  La circuitazione del campo elettrico lungo una curva chiusa
  dipende dalla variazione del flusso del campo magnetico.
  [Un campo magnetico variabile produce un campo elettrico]

  $$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{B})}{\mathrm{d}t}$$

  <u>Legge di Ampere-Maxwell</u>
  La circuitazione del campo magnetico lungo una curva chiusa
  dipende dalle correnti concatenate e dalla variazione del flusso del campo elettrico.
  [Un campo elettrico variabile o una corrente producono un campo magnetico]

  $$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu \left( i_C + \varepsilon \ \frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{E})}{\mathrm{d}t} \right)$$

  **Nota Bene**
  - Talvolta le equazioni di Maxwell vengono integrate con la seguente formula, che descrive la forza che il campo elettrico e il campo magnetico esercitano su una carica elettrica $q$:
    $$\vec{F} = q\,\vec{E} + q\,\vec{v} \times \vec{B}$$
  - Le equazioni di Maxwell suggeriscono che il campo elettrico e il campo magnetico non sono due entità indipendenti, come appare nel caso statico, ma sono manifestazioni diverse di una stessa grandezza fisica: il campo elettromagnetico.

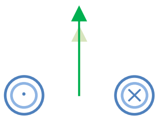
- **Onde elettromagnetiche**

  Un'onda elettromagnetica è una perturbazione del campo elettrico e magnetico che si propaga nel tempo e nello spazio, trasportando energia.

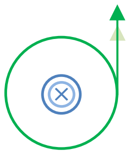
  $$E(t) = E_0 \sin(\omega t + \phi) \qquad\qquad B(t) = B_0 \sin(\omega t + \phi)$$

  Sono elencate di seguito le principali proprietà delle onde elettromagnetiche:
  - si propagano anche nel vuoto;
  - si propagano alla velocità $v = 1/\sqrt{\varepsilon\,\mu}$ che nel vuoto vale (velocità della luce):
    $$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0} = 2{,}998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$
  - sono onde trasversali, e i vettori $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari tra loro e perpendicolari anche alla direzione di propagazione (che ha direzione e verso del prodotto $\vec{E} \times \vec{B}$);
  - Il campo elettrico e il campo magnetico oscillano in fase, e vale che:
    $$E(t) = v \cdot B(t)$$

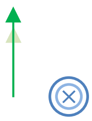
**Propagazione di un'onda elettromagnetica**



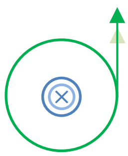
1. Un aumento del campo elettrico produce, per la legge di Ampere-Maxwell, un campo magnetico variabile.



2. Un aumento del campo magnetico produce, per la legge di Faraday-Neumann, un campo elettrico variabile (che contribuisce ad annullare il precedente).

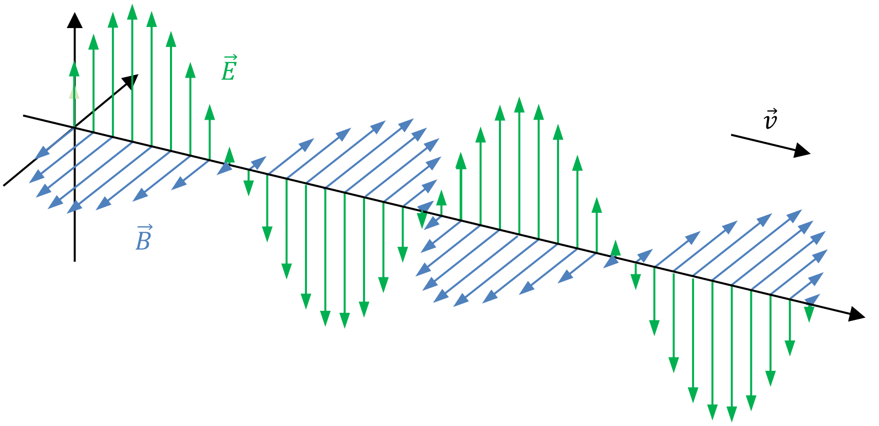


3. Un aumento del campo elettrico produce, per la legge di Ampere-Maxwell, un campo magnetico variabile (che contribuisce ad annullare il precedente).



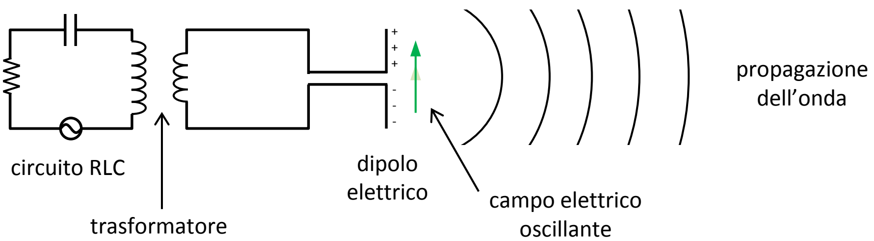
4. Il processo si ripete e ha come risultato la propagazione dei campi nello spazio.

Se il campo elettrico iniziale continua ad oscillare, si genera un'onda elettromagnetica.




**Nota Bene**

- Un modo per ottenere onde elettromagnetiche è attraverso un'antenna detta *dipolo elettrico*, il cui nucleo è costituito da un circuito RLC in cui cariche e correnti variano sinusoidalmente con pulsazione pari a (se $R$ è trascurabile): $\omega = \sqrt{1/LC}$. Un generatore di corrente alternata fornisce l'energia sufficiente per compensare sia le perdite termiche nella resistenza, sia l'energia trasportata via dall'onda elettromagnetica irradiata. Questo oscillatore è accoppiato tramite un trasformatore ad un'antenna, che consiste di due aste conduttrici: la corrente variabile sinusoidalmente nell'oscillatore fa oscillare sinusoidalmente la carica lungo le aste dell'antenna, che produce un campo elettrico variabile sinusoidalmente con pulsazione $\omega$.



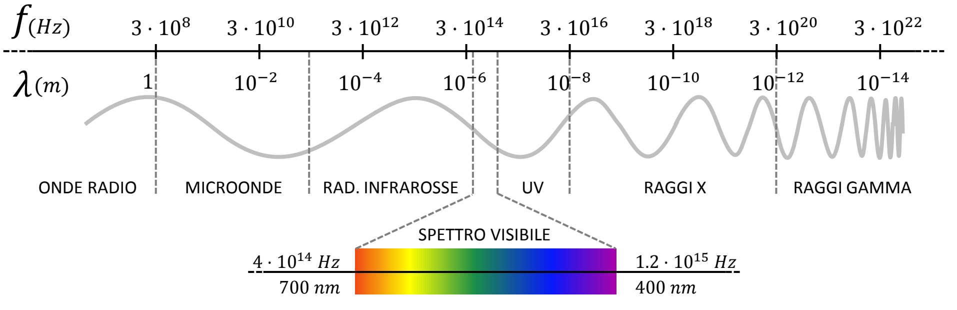
- L'indice di rifrazione di un mezzo viene definito come il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto e nel mezzo, quindi:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{1/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}{1/\sqrt{\varepsilon\,\mu}} = \frac{\sqrt{\varepsilon\,\mu}}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\mu_0\,\mu_r}}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\,\mu_r}$$

  (la costante dielettrica relativa e la permeabilità magnetica relativa del mezzo dipendono, tra le altre cose, anche dalla frequenza del campo elettrico o magnetico che le sta attraversando: per questo, come noto, anche l'indice di rifrazione del mezzo dipende dalla frequenza dell'onda elettromagnetica che lo attraversa)
- Valgono le due seguenti relazioni tra la velocità $v$ dell'onda elettromagnetica, il suo periodo $T$, la sua lunghezza d'onda $\lambda$, la sua pulsazione $\omega$ e la sua frequenza $f$:

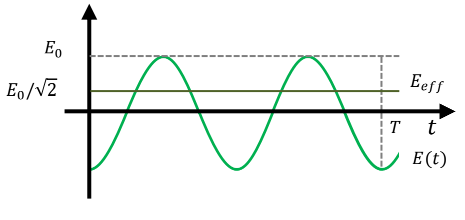
$$v = \frac{\lambda}{T} \qquad\qquad f = \frac{1}{T} \qquad\qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

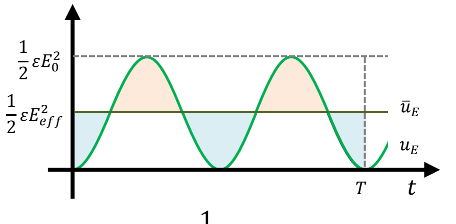
- Generalmente le onde elettromagnetiche vengono classificate in base alla loro frequenza (o, se ci si limita a considerare onde che si propagano nel vuoto, in base alla loro lunghezza d'onda visto che nel vuoto questa dipende dalla frequenza: $\lambda = c/f$).




- **Campo elettrico e campo magnetico efficaci (Def)**

  Dato un campo elettrico oscillante $E(t) = E_0 \sin(\omega t + \phi)$, il campo elettrico efficace $E_{eff}$ è quel campo elettrico stazionario che ha una densità di energia $\bar{u}_E$ pari al valor medio della densità di energia $u_E$ del campo elettrico oscillante.




$$E(t) = E_0 \sin(\omega t + \phi) \qquad \Longrightarrow \qquad u_E = \frac{1}{2}\varepsilon\, E^2(t)$$

$$E_{eff} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{u}_E = \frac{1}{2}\varepsilon\, E_{eff}^2$$

Analogamente si definisce il campo magnetico efficace $B_{eff}$:

$$B_{eff} = \frac{B_0}{\sqrt{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{u}_B = \frac{1}{2\mu}\, B_{eff}^2$$

**Dimostrazione**

Dimostriamo che $E_{eff} = E_0/\sqrt{2}$ a partire dalla definizione:

$$\bar{u}_E = \frac{1}{T}\int_0^T u_E dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\varepsilon\, E_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\varepsilon E^2(t) dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\varepsilon\, E_{eff}^2 = \frac{1}{4}\varepsilon E_0^2 \quad \Longrightarrow \quad E_{eff} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

La dimostrazione può anche essere effettuata senza l'uso degli integrali: basta considerare che il valore di $\bar{u}_E$ deve essere la metà del valore massimo di $u_E$ (in modo che le aree rosa, in figura, siano uguali alle aree azzurre). Ciò accade se e solo se $E_{eff} = E_0/\sqrt{2}$.

- **Energia trasportata da un'onda elettromagnetica**

La densità media di energia trasportata da un'onda elettromagnetica nel vuoto è pari a:

$$\bar{u} \;=\; \bar{u}_E + \bar{u}_B \;=\; \frac{1}{2}\varepsilon_0\, E_{eff}^2 \;+\; \frac{1}{2\mu_0}\; B_{eff}^2$$

L'unità di misura della densità di energia è: $[\bar{u}] = \frac{J}{m^3}$

**Nota Bene**

- I valori di $\bar{u}_E$ e $\bar{u}_B$ sono uguali, infatti:

$$\bar{u}_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0\, E_{eff}^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0 c^2 B_0^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0\left(\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\right)^2 B_0^2 = \frac{1}{4\mu_0}B_0^2 = \frac{1}{2\mu_0}B_{eff}^2 = \bar{u}_B$$

- La densità media di energia trasportata da un'onda elettromagnetica è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda:

$$\bar{u} \propto E_0^2 \qquad \text{o anche} \qquad \bar{u} \propto B_0^2$$

Nel caso di un'onda piana, l'ampiezza si conserva e quindi $\bar{u}$ si conserva; nel caso di un'onda sferica, l'ampiezza decresce all'aumentare della distanza dalla sorgente e quindi $\bar{u}$ decresce (l'energia trasportata dall'onda si dissipa in maniera isotropa nello spazio, distribuendosi sulle superfici dei fronti d'onda sferici).

- Considerando che $\bar{u}_E = \bar{u}_B$, la densità di energia si può scrivere nelle seguenti forme:

$$\bar{u} \;=\; \varepsilon_0\, E_{eff}^2 \qquad\qquad \bar{u} \;=\frac{1}{\mu_0}\; B_{eff}^2$$

- **Intensità di un'onda elettromagnetica (Def)**

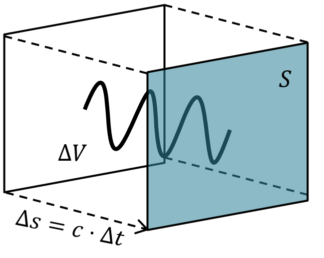
L'intensità di un'onda elettromagnetica che incide su una superficie di area $S$ trasferendo un'energia $U$ in un intervallo di tempo $\Delta t$ (quindi con potenza media $\bar{P} = U/\Delta t$) è pari a:

$$I = \frac{U}{S \cdot \Delta t} = \frac{\bar{P}}{S}$$

- **Intensità di un'onda elettromagnetica**

Se un'onda incide una superficie $S$ con densità media di energia $\bar{u}$, allora la sua intensità è pari a:

$$I = \bar{u} \cdot \mathrm{c}$$




**Dimostrazione**

In un tempo $\Delta t$ l'onda si sposta di una lunghezza $\Delta s = c \cdot \Delta t$ trasportando un'energia $U$ che è immagazzinata in un volume $\Delta V = S \cdot \Delta s$ con densità media pari a $\bar{u} = U/\Delta V$. Dunque:

$$I = \frac{U}{S \cdot \Delta t} = \frac{\bar{u} \cdot \Delta V}{S \cdot \Delta t} = \frac{\bar{u} \cdot S \cdot \Delta s}{S \cdot \Delta t} = \frac{\bar{u} \cdot \Delta s}{\Delta t} = \frac{\bar{u} \cdot \mathrm{c} \cdot \Delta t}{\Delta t} = \bar{u} \cdot \mathrm{c}$$

**Nota Bene**

- L'intensità di un'onda che incide su una superficie si calcola a partire dalla potenza $\bar{P}$ che ha l'onda quando incide la superficie, che in generale può essere diversa dalla potenza $\bar{P}_{sorg}$ della sorgente che ha generato l'onda. In particolare:
  - se l'onda è piana $\bar{P} = \bar{P}_{sorg}$ perché l'energia trasportata dall'onda non viene dissipata, quindi l'intensità è costante e si ha che:

$$I = \frac{\bar{P}_{sorg}}{S}$$

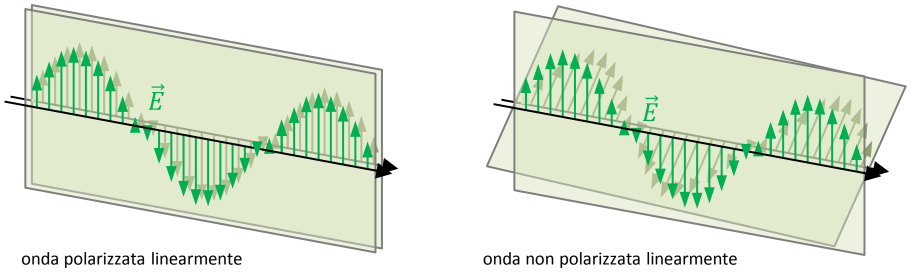
  - se l'onda è sferica $\bar{P} = \bar{P}_{sorg}/4\pi r^2$ perché l'energia trasportata dall'onda viene dissipata, quindi l'intensità decresce con la distanza $r$ dalla sorgente e si ha che:

$$I = \frac{\bar{P}_{sorg}}{4\pi r^2}$$

- L'intensità di un'onda elettromagnetica è proporzionale al quadrato della sua ampiezza, infatti:

$$I = \bar{u} \cdot c = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_{eff}^2 \qquad \text{o anche} \qquad I = \bar{u} \cdot c = \frac{1}{2\mu_0} c B_{eff}^2$$

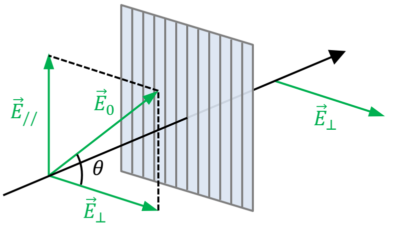
- **Polarizzazione lineare di un'onda elettromagnetica (Def)**
  Un'onda elettromagnetica si dice *polarizzata linearmente* quando i suoi campi elettrici oscillano sempre sullo stesso piano (che contiene anche la direzione di propagazione dell'onda).
  **Nota Bene**
  - I dipoli elettrici, grazie al movimento coordinato delle cariche elettriche generatrici, emettono onde elettromagnetiche con piani di polarizzazione paralleli tra di loro. Altre sorgenti più estese, come lampadine a incandescenza o il Sole, sono formate da più parti che emettono onde elettromagnetiche in modo indipendente una dall'altra, e quindi con piani di polarizzazione diversi.




- **Legge di Malus**
  Si consideri un'onda elettromagnetica $\vec{E}_0$ di intensità $I_0$ polarizzata linearmente, che attraversa un insieme di fili conduttori paralleli:
  - La componente del campo elettrico $\vec{E}_{//}$ provoca una corrente nei conduttori, e la sua energia viene dissipata per effetto Joule. Dopo l'attraversamento, l'ampiezza di $\vec{E}_{//}$ è talmente ridotta da essere considerata trascurabile.
  - La componente del campo elettrico $\vec{E}_{\perp}$ attraversa invariata i conduttori.

  Così, dopo l'attraversamento, l'onda si trova ad essere polarizzata linearmente nella direzione perpendicolare ai fili e ha un'intensità ridotta pari a:
$$I = I_0 \cos^2\theta$$
  dove $\theta$ è l'angolo tra $\vec{E}_0$ e la direzione perpendicolare ai fili (asse di trasmissione).

  **Dimostrazione**
  Dopo aver attraversato i conduttori l'ampiezza dell'onda è $E_{\perp} = E_0 \cdot \cos\theta$, è quindi la sua intensità è pari a:
$$I = \frac{1}{2} c\, \mathcal{E}_0\, E_{\perp}^2 = \frac{1}{2} c\, \mathcal{E}_0\, E_0^2 \cos^2\theta = I_0 \cos^2\theta$$




  **Nota Bene**
  - (Polarizzazione per assorbimento) Un fascio di luce non polarizzata che attraversa un insieme di fili conduttori paralleli ne riemerge polarizzato linearmente, nella direzione perpendicolare ai fili. In tal caso, l'intensità dell'onda che emerge è mediamente metà dell'intensità dell'onda incidente:
$$I = I_0/2$$
  - (Polarizzazione per riflessione) Un fascio di luce non polarizzata che incide sulla superficie di separazione di due mezzi (provenendo dal mezzo con indice di rifrazione $n_1$ e rifrangendosi nel mezzo con indice di rifrazione $n_2$) viene riflesso polarizzato linearmente nella direzione parallela alla superficie se la luce incidente forma con la normale alla superficie un angolo $\theta_B$ (detto angolo di Brewster) tale che:
$$\tan\theta_B = n_2/n_1$$