Integrali indefiniti

• Primitiva di una funzione

Una funzione $F(x)$ si dice *primitiva* di una funzione $f(x)$ in un intervallo I se, per ogni $x \in I$:

$$F'(x) = f(x)$$

Una funzione ammette infinite primitive, che differiscono una dall'altra per una costante additiva. La famiglia delle primitive di una funzione $f(x)$ si indica con il simbolo dell'*integrale indefinito*:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

I grafici delle primitive di una stessa funzione $f(x)$ si ottengono uno dall'altro tramite traslazioni verticali. Fissato un punto del piano, il grafico di una e una sola primitiva passa per quel punto.

• Proprietà dell'integrale indefinito

1) $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx \qquad \forall\, k \in \mathbb{R}$

2) $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

• Primitive delle funzioni elementari

$$\int k\,dx = kx + c$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \neq -1$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

• Integrali delle funzioni composte

$$\int f'(x) \cdot [f(x)]^n\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \neq -1$$

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int f'(x) \cdot a^{f(x)}\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int f'(x) \cdot \cos f(x)\,dx = \sin f(x) + c$$

$$\int f'(x) \cdot \sin f(x)\,dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \tan f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\,dx = -\cot f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\,dx = \arcsin f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \arctan f(x) + c$$

● Integrazione per sostituzione

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(g(t)\big)\cdot g'(t)\,dt$$

ove si è posto: $x = g(t)$

$dx = g'(t)\,dt$

Per utilizzare il metodo di sostituzione:

1. *Si pone:* $x = g(t)$, *da cui segue:* $dx = g'(t)\,dt$
2. *Si riscrive l'integrale in termini di* t *e* dt.
3. *Si risolve l'integrale indefinito.*
4. *Si riscrive il risultato in termini di* x.

● Integrazione per parti

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx \;=\; f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Spesso è conveniente considerare come $f(x)$ *le funzioni logaritmo, arcotangente, arcoseno o tangente, se presenti. In assenza di queste, è conveniente considerare* $f(x)$ *le funzioni* x^n.

● Integrazione di funzioni razionali fratte

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$$

Se $gr(N) \geq gr(D)$ si esegue la divisione polinomiale (si indichi con $Q(x)$ il quoziente e con $R(x)$ il resto della divisione), e l'integrale si riconduce alla forma:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}dx = \int Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}\,dx$$

dove $Q(x)$ è una funzione polinomiale, e $R(x)/D(x)$ è una funzione razionale fratta con $gr(R) < gr(D)$.

1. Se $gr(D) = 1$ l'integrale si risolve nel seguente modo:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}dx \;=\; \int \frac{k}{ax+b}\,dx \;=\; \frac{k}{a}\int \frac{a}{ax+b}\,dx \;=\; \frac{k}{a}\ln|ax+b| + c$$

2. Se $gr(D) = 2$ si utilizzano tecniche differenti a seconda del segno del discriminante di $D(x)$:

2.1 Se $\Delta > 0$:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}dx \;=\; \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx \;=\; \underbrace{\int \frac{A}{x-x_1}\,dx}_{\text{(logaritmo)}} + \underbrace{\int \frac{B}{x-x_2}\,dx}_{\text{(logaritmo)}}$$

2.2 Se $\Delta = 0$:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}dx \;=\; \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx \;=\; \underbrace{\int \frac{A}{x-x_1}\,dx}_{\text{(logaritmo, se } m \neq 0)} + \underbrace{\int \frac{B}{(x-x_1)^2}\,dx}_{\text{(reciproco)}}$$

2.3 Se $\Delta < 0$:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}dx \;=\; \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx \;= k_1 \underbrace{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx}_{\text{(logaritmo, se } m \neq 0)} + k_2 \underbrace{\int \frac{u}{1+(ux+v)^2}\,dx}_{\text{(arcotangente)}}$$

● Integrali degni di nota

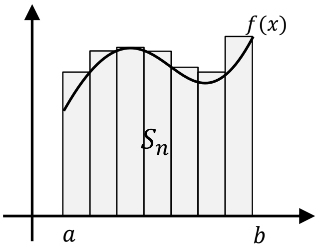
$$\int \ln x\,dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\cdot\ln x - x + c$$ (per parti)

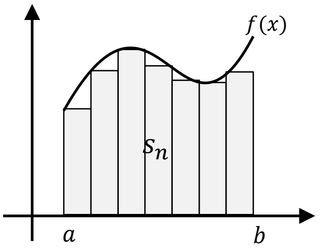
$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$ (formule di abbassamento di grado)

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\,x\sqrt{a^2-x^2} + c$$ (per sostituzione: $x = a\cdot\sin t$)

Integrali definiti

Integrale secondo Riemann





Una funzione $f(x)$ si dice integrabile secondo Riemann in un intervallo $[a, b]$ se:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} s_n$$

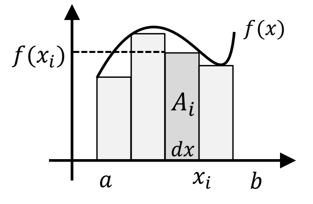
dove S_n (risp. s_n) è la somma delle aree dei rettangoli aventi per base uno degli n sotto-intervalli congruenti in cui viene suddiviso l'intervallo $[a, b]$, e per altezza il massimo (risp. il minimo) valore assunto dalla funzione in quel sotto-intervallo.

Il limite di S_n (e di s_n) si dice *integrale definito* della funzione $f(x)$ rispetto all'intervallo $[a, b]$ e si indica con il simbolo:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Tale limite può essere interpretato come l'area (con segno) della regione compresa tra il grafico della funzione e l'asse x. Infatti le due successioni S_n e s_n maggiorano e minorano tale area, e la approssimano tanto meglio quanto più la suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ è «fine» (cioè per $n \to +\infty$).

Il simbolo utilizzato per esprimere l'integrale deriva, a livello intuitivo, da:



$$Area = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Proprietà dell'integrale indefinito

1) $\displaystyle\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx \qquad \forall\, k \in \mathbb{R}$

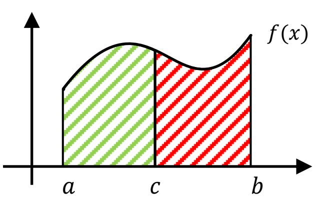
2) $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

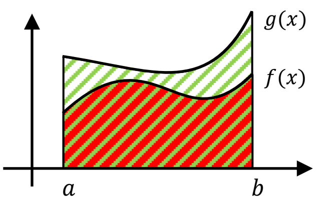
4) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

5) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \qquad$ se $f(x) \le g(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$

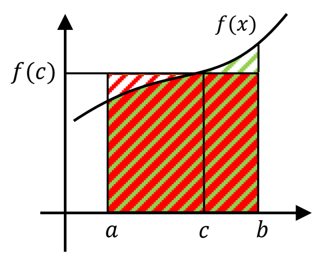
4)



5)



Teorema del valor medio



Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che:

$$f(c) = \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

dove μ si dice valor medio di $f(x)$ in $[a, b]$.

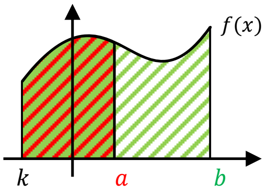
Il teorema afferma che esiste un rettangolo di base $(b-a)$ equivalente alla regione sottesa alla funzione nell'intervallo $[a, b]$, e che la base superiore di questo rettangolo interseca il grafico di $f(x)$ in c. Il valor medio $\mu = f(x)$ rappresenta l'altezza di questo rettangolo.
In altre parole, il valor medio di f nell'intervallo $[a, b]$ rappresenta il valore che assumerebbe la funzione se questa venisse sostituita con una funzione costante che lasci inalterato l'integrale definito in $[a, b]$.

• Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$.

Sia $F_k(x) = \int_k^x f(t)\,dt$ la funzione che esprime l'integrale definito di $f(x)$ nell'intervallo $[k, x]$ con $k \in \mathbb{R}$.

Allora si ha che $F_k'(x) = f(x)$, ovvero si ha che $F_k(x)$ è una primitiva di $f(x)$.



In particolare, l'integrale definito di $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ si calcola con:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

dove $F(x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$.

Nonostante i nomi e i simboli in comune, l'integrale indefinito (primitive di una funzione) e l'integrale definito (area sottesa alla funzione in un certo intervallo) restano concetti diversi. Il teorema fondamentale del calcolo integrale esprime finalmente la relazione tra i due.

Un'arbitraria primitiva $F_k(x)$ di $f(x)$ esprime l'integrale definito di $f(x)$ nell'intervallo compreso tra un arbitrario k (che dipende dalla primitiva scelta) ed x. Tuttavia per calcolare l'integrale definito di una funzione in un intervallo $[a, b]$ è sufficiente una qualsiasi primitiva $F_k(x)$, e non necessariamente $F_a(x)$. Infatti:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_k^b f(x)\,dx - \int_k^a f(x)\,dx = F_k(b) - F_k(a)$$

• Integrazione per parti (integrale definito)

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx = \Big[\ f(x) \cdot g(x)\ \Big]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

• Integrazione per sostituzione (integrale definito)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt$$

ove si è posto: $x = g(t)$

$dx = g'(t)\,dt$

Per utilizzare il metodo di sostituzione:

1. *Si pone: $x = g(t)$, da cui segue: $dx = g'(t)\,dt$*
2. *Si riscrive l'integrale in termini di t e dt.*
3. *Si cambiano gli estremi di integrazione in modo che $a = g(c)$ e $d = g(b)$.*
4. *Si risolve l'integrale definito.*

Spesso nel calcolare un integrale definito rimane conveniente calcolare prima di tutto l'integrale indefinito col metodo opportuno (per parti, per sostituzione…):

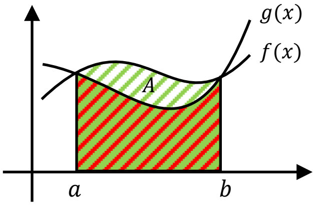
$$\int f(x)\,dx \ = \ \dots \ = \ F(x) + c$$

per poi risolvere l'integrale definito con la formula:

$$\int_a^b f(x)\,dx \ = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

• Area compresa tra due funzioni

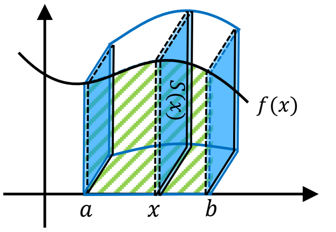
Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in $[a, b]$, tali che $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Allora l'area della regione di piano compresa tra i grafici delle due funzioni è data da:



$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

- **Volume di un solido «a fette»**

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$, e sia R la regione di piano compresa tra il suo grafico, l'asse x e le rette $x = a$ e $x = b$. Il volume del solido di base R le cui sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari all'asse x, hanno area $S(x)$ è dato da:



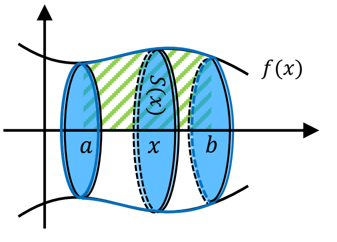
$$V = \int_a^b S(x)\, dx$$

Tale forma deriva, a livello intuitivo, dalla somma dei volumi V_i di ciascuna fetta (che sono prismi aventi area di base $S(x)$ e altezza dx):

$$Volume = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} S(x) \cdot dx = \int_a^b S(x)\, dx$$

- **Volume di un solido di rotazione**

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$, e sia R la regione di piano compresa tra il suo grafico, l'asse x e le rette $x = a$ e $x = b$. Il volume del solido ottenuto facendo ruotare R di 360° attorno all'asse x è dato da:



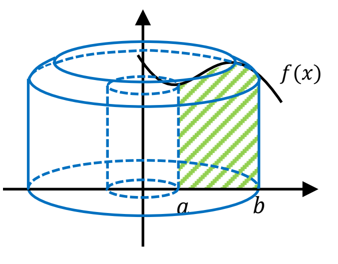
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

E' un caso particolare di solido «a fette», in cui le sezioni sono cerchi di raggio $f(x)$:

$$V = \int_a^b S(x)\, dx = \int_a^b \pi \cdot f^2(x)\, dx = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

- **Volume di un solido «a guscio»**

Sia $f(x)$ una funzione continua e positiva in $[a, b]$, e sia R la regione di piano compresa tra il suo grafico, l'asse x e le rette $x = a$ e $x = b$. Il volume del solido ottenuto facendo ruotare R di 360° attorno all'asse y è dato da:



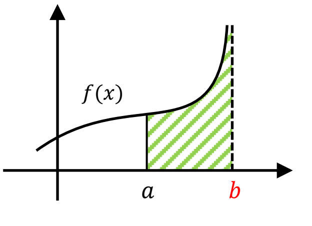
$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$$

- **Integrale improprio**

1. Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b[$ e illimitata per $x \to b^-$. Si pone:

$$\int_a^{b} f(x)\, dx = \lim_{k \to b^-} \int_a^k f(x)\, dx$$

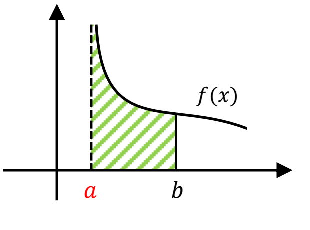
e, se il limite esiste ed è finito, si dice che $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $[a, b[$ e che il limite è convergente.



2. Sia $f(x)$ una funzione continua in $]a, b]$ e illimitata per $x \to a^+$. Si pone:

$$\int_{a}^b f(x)\, dx = \lim_{k \to a^+} \int_k^b f(x)\, dx$$

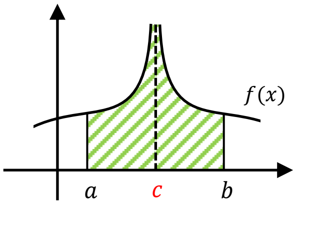
e, se il limite esiste ed è finito, si dice che $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $]a, b]$ e che il limite è convergente.



3. Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ e illimitata per $x \to c$. Si pone:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{k \to c^-} \int_a^k f(x)\, dx + \lim_{k \to c^+} \int_k^b f(x)\, dx$$

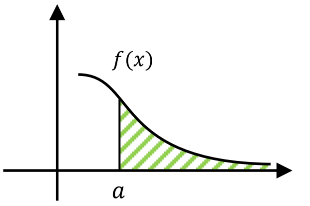
e, se entrambi i limiti esistono e sono finiti, si dice che $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $[a, b]$ e che i limiti sono convergenti.



4. Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a,+\infty[$. Si pone:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_{a}^{k} f(x)\,dx$$

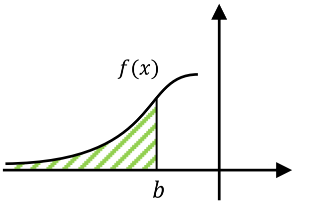
e, se il limite esiste ed è finito, si dice che $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $[a,+\infty[$ e che il limite è convergente.



5. Sia $f(x)$ una funzione continua in $]-\infty,b]$. Si pone:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{k\to-\infty}\int_{k}^{b} f(x)\,dx$$

e, se il limite esiste ed è finito, si dice che $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $]-\infty,b]$ e che il limite è convergente.



6. Sia $f(x)$ una funzione continua in $\mathbb{R}$. Si pone:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{k\to-\infty}\int_{k}^{a} f(x)\,dx + \lim_{k\to+\infty}\int_{a}^{k} f(x)\,dx$$

e, se entrambi i limiti esistono e sono finiti, si dice che $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $\mathbb{R}$ e che i limiti sono convergenti.