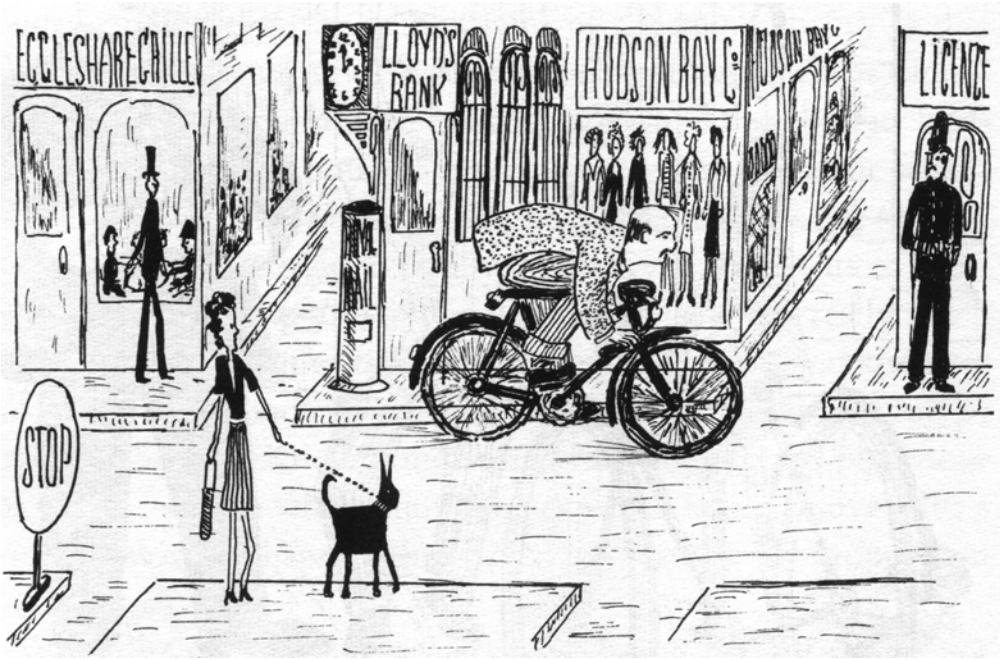
In uno dei primi libri di fantascienza intitolato *Mr. Tompkins in Wonderland* (1940) del fisico George Gamow, si immaginava un mondo in cui la velocità della luce fosse solamente di 10 m/s. Mr. Tompkins aveva studiato la relatività e cominciando a correre su una bicicletta si aspettava di diventare immediatamente più piccolo ed era molto lieto di ciò poiché l'aumentare della sua altezza gli aveva ultimamente causato qualche preoccupazione. Con sua grande sorpresa, tuttavia, niente di simile avvenne né a lui né alla sua bicicletta, mentre invece la visione attorno a lui cambiò completamente. Le strade divennero più corte, le vetrine dei negozi cominciarono ad apparire strette come fessure e il poliziotto all'angolo divenne l'uomo più smilzo che egli avesse mai visto. «Per Giove!» esclamò Mr. Tompkins con eccitazione, «Ho capito il trucco. Ecco come salta fuori la parola relatività.»



La relatività, in effetti, prevede che gli oggetti che si muovono rispetto a noi ad alta velocità, vicino alla velocità della luce c, diventino più corti. Noi non ce ne accorgiamo, come accadde a Mr. Tompkins, perché $c = 3 \times 10^8$ m/s è incredibilmente grande. Studieremo la contrazione delle lunghezze, la dilatazione del tempo, il non-accordo della simultaneità e come l'energia e la massa siano equivalenti ($E = mc^2$).

CAPITOLO 26

Teoria della relatività ristretta

La fisica alla fine del XIX secolo aveva già alle sue spalle un periodo di grande progresso. Le teorie sviluppate durante i tre secoli precedenti avevano spiegato con ampio successo una vasta gamma di fenomeni naturali. La meccanica newtoniana aveva meravigliosamente descritto il movimento degli oggetti sulla Terra e nell'Universo e aveva gettato le fondamenta per lo sviluppo delle teorie sui fluidi, sul moto delle onde e sul suono. La teoria cinetica aveva spiegato il comportamento dei gas e di altre sostanze. La teoria di Maxwell sull'elettromagnetismo non soltanto aveva fornito una visione unitaria dei fenomeni elettrici e magnetici, ma prevedeva l'esistenza delle onde

ISBN 88-8-1336-5

elettromagnetiche e il loro comportamento in tutto e per tutto uguale a quello della luce, cosicché si cominciò a pensare alla luce come a un'onda elettromagnetica. Effettivamente sembrava che il mondo naturale, visto attraverso gli occhi dei fisici, fosse ormai molto ben spiegato nei suoi dettagli. Sì, rimaneva ancora qualche enigma, ma si era convinti di riuscire presto a scioglierli utilizzando princìpi già noti.

Le cose non andarono in modo così semplice; al contrario, questi enigmi furono risolti solo grazie all'introduzione, nei primissimi anni del XX secolo, di due nuove teorie rivoluzionarie, che cambiarono l'intera concezione della natura: la teoria della relatività e la teoria quantistica.

Fisica classica e fisica moderna

La fisica, così com'era conosciuta alla fine del XIX secolo (come cioè l'abbiamo trattata finora in questo libro) è chiamata **fisica classica**. La nuova fisica, che si sviluppò in seguito ed ebbe origine dalla grande rivoluzione di inizio secolo, ora viene detta **fisica moderna**. In questo capitolo presentiamo la teoria della relatività ristretta, che fu proposta da Albert Einstein (1879-1955; fig. 26-1) nel 1905. Nel prossimo capitolo introdurremo l'altrettanto importante teoria quantistica.

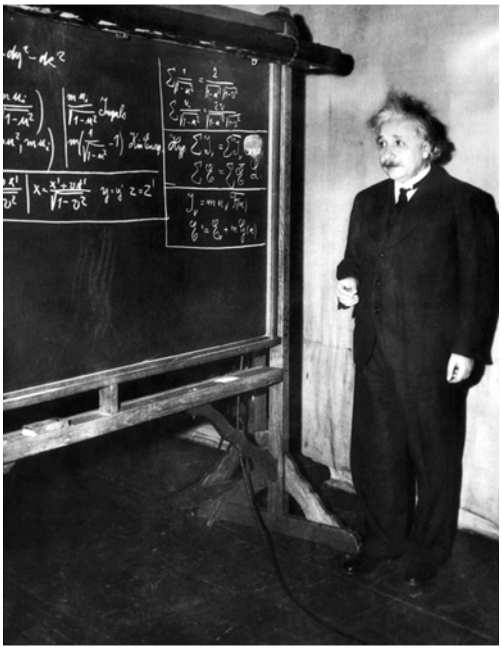


FIGURA 26-1 Albert Einstein (1879-1955), una delle grandi menti del XX secolo, è stato l'autore della teoria della relatività ristretta e della relatività generale.

26–1 Relatività galileiana-newtoniana

La teoria della relatività ristretta di Einstein tratta del modo in cui osserviamo gli eventi, più precisamente di come gli oggetti e gli eventi vengono osservati da diversi sistemi di riferimento*. Quest'argomento, naturalmente, era già stato affrontato da Galileo e da Newton.

Sistema di riferimento inerziale

La teoria della relatività ristretta esamina gli eventi che osserviamo e misuriamo rispetto ai cosiddetti **sistemi di riferimento inerziali**, che (come accennato nel cap. 4) sono sistemi di riferimento nei quali vale la prima legge di Newton, quella sull'inerzia. («Se la forza risultante che agisce su un oggetto è nulla, l'oggetto o è fermo o è animato da moto rettilineo a velocità costante».) È più facile analizzare gli eventi osser-

* Un sistema di riferimento è un sistema di assi coordinati fissato a un corpo, come per esempio la Terra, un treno o la Luna. Vedi paragrafo 2–1.

vandoli e misurandoli nei sistemi inerziali. La Terra, sebbene a rigore non sia un sistema inerziale (perché ruota), vi si avvicina abbastanza da permettere di considerarla tale per la maggior parte degli scopi. I sistemi di riferimento che ruotano o comunque accelerano non sono inerziali* e non ce ne occuperemo in questo capitolo. (Di essi si occupa la teoria della relatività generale di Einstein, par. 33-4.)

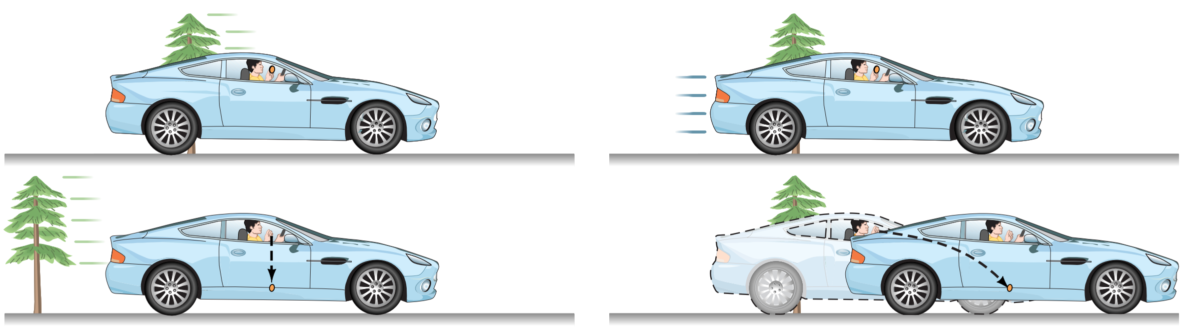
Un sistema di riferimento che si muove con velocità vettoriale costante rispetto a un sistema inerziale è anch'esso inerziale, giacché la prima legge di Newton vale anche in questo sistema di riferimento. Se affermiamo di osservare o effettuare misure rispetto a un certo sistema di riferimento, significa che in quel sistema siamo a riposo.

Sia Galileo sia Newton erano consapevoli di ciò che noi chiamiamo **principio di relatività** applicato alla meccanica: *in tutti i sistemi di riferimento inerziali valgono le stesse leggi della fisica*. Probabilmente ne avete riconosciuto la validità nella vostra esperienza quotidiana. Per esempio, su un aereo o un treno, che filano via dritti e lisci a velocità costante, gli oggetti si comportano nel loro moto allo stesso modo che sulla Terra. (Si assume che questi mezzi di trasporto nemmeno vibrino o dondolino, ciò che renderebbe il loro sistema di riferimento non inerziale.) Se siete su un siffatto treno, aereo o nave, potete camminare, bere un bicchier d'acqua, giocare a ping-pong o lasciar cadere una matita e constatare che i corpi si muovono esattamente come farebbero se voi foste a riposo coi piedi sulla Terra.

Principio di relatività: le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Supponete di trovarvi su un'auto che corre su di un rettilineo a velocità costante. Se lasciate cadere una moneta dall'alto all'interno della vettura, come cadrà? Cadrà diritta rispetto all'automobile e colpirà il pavimento nel punto situato verticalmente al di sotto di quello di partenza, come in figura 26-2a. (Se fate la stessa cosa fuori dal finestrino, questo non accadrà solo perché l'aria in moto frena la moneta rispetto alla macchina.) Questo moto di caduta (verticale rettilineo) è identico a quello che si ha sulla terraferma e quindi il nostro esperimento sull'auto lanciata in velocità è in accordo col principio di relatività.

* Su una piattaforma rotante, per esempio una giostra, un oggetto inizialmente a riposo si muove verso l'esterno anche se nessun corpo esercita una forza su di esso. Pertanto questo è un sistema non inerziale.



(a)
Sistema di riferimento = auto

(b)
Sistema di riferimento = Terra

FIGURA 26-2 Una moneta viene lasciata cadere da una persona che si trova su un'automobile in movimento. Le figure in alto mostrano l'istante del rilascio della moneta, quelle in basso un istante di poco successivo. (a) Nel sistema di riferimento dell'automobile, la moneta cade seguendo una traiettoria rettilinea (e l'albero si muove verso sinistra). (b) In un riferimento solidale con la Terra, la moneta segue una traiettoria curva (parabolica).

 ISBN 88-8-1336-5

ATTENZIONE

Le leggi sono le stesse ma i percorsi possono essere differenti in differenti sistemi di riferimento

Si noti tuttavia in questo esempio che un osservatore posto a terra vedrebbe la moneta cadere con una traiettoria curva (fig. 26-2b). L'effettivo percorso seguito dalla moneta è diverso se osservato da sistemi di riferimento diversi. Ciò non è una violazione del principio di relatività, il quale afferma che le leggi fisiche sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali. In entrambi i sistemi si applicano la medesima legge di gravità e le medesime leggi del moto: l'accelerazione della moneta è la stessa nei due sistemi. La differenza tra le due figure è data dalla diversa velocità iniziale della moneta: nel sistema di riferimento terrestre tale velocità non è nulla ed è pari alla velocità dell'automobile; le leggi della fisica prevedono quindi per la moneta una traiettoria parabolica come fosse un proiettile (cap. 3). Nel sistema di riferimento dell'auto la velocità iniziale invece è nulla e quindi le stesse leggi prevedono che il corpo cada verticalmente in linea retta. Le leggi sono dunque le stesse per entrambi i sistemi di riferimento, sebbene le traiettorie risultino differenti.

La relatività galileiana-newtoniana implica alcune assunzioni indimostrabili, che traggono origine dall'esperienza quotidiana. Si assume che le lunghezze dei corpi siano uguali in un sistema di riferimento come nell'altro e che il tempo scorra con lo stesso ritmo in sistemi di riferimento diversi. Nella meccanica classica lo spazio e il tempo sono considerati **assoluti** e, dunque, la misura di lunghezze e di intervalli di tempo non cambia passando da un sistema all'altro; così pure la massa di un oggetto e tutte le forze si presumono invariate rispetto a un cambiamento di sistema di riferimento inerziale.

ATTENZIONE

Posizione e velocità sono differenti in differenti sistemi di riferimento, ma le lunghezze sono le stesse (Fisica classica)

La posizione di un corpo è ovviamente diversa se espressa in due sistemi di riferimento diversi e altrettanto dicasi della velocità. Come esempio consideriamo una persona che cammina in avanti su un autobus alla velocità di 2 m/s. Se l'autobus sta viaggiando a 10 m/s rispetto alla Terra, la velocità della persona in quest'ultimo sistema di riferimento è di 12 m/s. L'accelerazione di un corpo invece secondo la meccanica classica è la medesima in qualsiasi sistema di riferimento inerziale. Questo perché la variazione di velocità e l'intervallo di tempo in cui avviene sono gli stessi. Supponiamo che il passeggero dell'autobus acceleri da 0 a 2 m/s in 1.0 s, di modo che sia $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$ nel riferimento dell'autobus. Rispetto alla Terra l'accelerazione è

$$\frac{(12\ \mathrm{m/s} - 10\ \mathrm{m/s})}{1.0\ \mathrm{s}} = 2\ \mathrm{m/s^2},$$

cioè la stessa.

Poiché F, m e a non mutano passando da un sistema inerziale a un altro, la seconda legge di Newton, $F = ma$, rimane invariata. Anche la seconda legge di Newton dunque soddisfa il principio di relatività. In modo analogo si dimostra facilmente che anche le altre leggi della meccanica soddisfano questo principio.

Tutti i sistemi di riferimento inerziali sono ugualmente validi

Se dunque le leggi della meccanica sono sempre le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali, ne discende che non esiste in alcun senso un sistema di riferimento privilegiato. Esprimiamo quest'importante conclusione dicendo che **tutti i sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti** nel descrivere i fenomeni meccanici. Nessun sistema di riferimento è in alcun modo migliore di un altro. Un sistema di riferimento solidale con un'auto o un aereo, che viaggiano a velocità costante, è valido quanto quello solidale con la Terra. Se vi trovate su un tale veicolo, potete affermare che la Terra si muove e voi siete fermi, esattamente come il contrario. Non esiste esperimento che possa decidere quale sistema sia «davvero» fermo e quale in movimento. Non c'è modo, insomma, di elevare alcun particolare sistema di riferimento al rango di sistema assolutamente a riposo.

Sorse però una complicazione nella seconda metà del XIX secolo, quando Maxwell presentò, con gran successo, la sua onnicomprensiva teoria dell'elettromagnetismo (cap. 22) e dimostrò che la luce si può considerare un'onda elettromagnetica. Le equazioni di Maxwell prevedono che la velocità c della luce sia $3.00 \cdot 10^8$ m/s e questo corrisponde al valore misurato, entro gli errori sperimentali. La questione che ne nasce è dunque: in quale sistema di riferimento precisamente la velocità della luce ha il valore previsto dalla teoria maxwelliana? Si dava, infatti, per scontato che la luce dovesse avere velocità diverse in diversi sistemi di riferimento. Per esempio, un osservatore in viaggio su una navicella spaziale che si allontana da una fonte di luce alla velocità di $1.0 \cdot 10^8$ m/s, potrebbe aspettarsi di misurare, per la velocità della luce che lo raggiunge, un valore di

$$(3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}) - (1.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}) = 2.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}\,.$$

Ma nelle equazioni di Maxwell non ci sono riserve o eccezioni per velocità relative; esse stabiliscono, semplicemente, che c sia pari a $3.00 \cdot 10^8$ m/s, senza ulteriori specificazioni. Sembrò allora che dovesse necessariamente esistere un sistema di riferimento particolare in cui la velocità della luce assume il valore c.

Abbiamo visto nei capitoli 11 e 12 che le onde viaggiano sulla superficie dell'acqua e lungo una corda, così come le onde acustiche si propagano nell'aria e in altri mezzi materiali. I fisici dell'Ottocento vedevano il mondo attraverso le leggi della meccanica, al punto che sembrava loro naturale presupporre che anche la luce dovesse muoversi attraverso una qualche sorta di *mezzo di propagazione*. A questo mezzo trasparente veniva dato il nome di **etere** e si assumeva che esso permeasse tutto lo spazio*. Si stabilì quindi che la luce presentasse il valore di velocità previsto dalle equazioni di Maxwell nel riferimento dell'etere.

L'«etere»

Le equazioni di Maxwell di conseguenza *non* sembravano assoggettarsi al principio di relatività, dato che non erano le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Le equazioni assumevano la veste più semplice in quel riferimento in cui $c = 3.00 \cdot 10^8$ m/s, vale a dire nel sistema di riferimento solidale con l'etere. In tutti gli altri riferimenti era necessario aggiungere dei termini per tenere conto della velocità relativa. E così, sebbene quasi tutte le leggi della fisica obbedissero al principio di relatività, le leggi dell'elettricità e del magnetismo non sembravano fare altrettanto. (Il secondo postulato di Einstein – vedi paragrafo successivo – risolse il problema: le equazioni di Maxwell sodisfano anch'esse la relatività.)

Ben presto gli scienziati si apprestarono a determinare la velocità della Terra rispetto a questo sistema di riferimento assoluto, qualunque fosse la sua natura. Vi si cimentò un buon numero di abili sperimentatori. Le misure più dirette furono eseguite da A.A. Michelson ed E.W. Morley nel penultimo decennio del XIX secolo. Essi misurarono la dif-

L'esperimento di Michelson-Morley

* Il mezzo di propagazione per le onde elettromagnetiche non poteva essere l'aria, poiché la luce viaggia dal Sole alla Terra attraverso uno spazio essenzialmente vuoto. Pertanto fu postulato un altro mezzo di propagazione, l'etere. L'etere non solo era trasparente ma, per la difficoltà di individuarlo, si assunse che avesse densità zero.

 ISBN 88-8-1336-5

ferenza di velocità tra raggi di luce in direzioni diverse usando uno strumento oggi noto come interferometro di Michelson, aspettandosi di trovare una differenza a seconda dell'orientamento del loro apparato rispetto all'etere. Proprio come una barca che risalga, discenda, oppure attraversi un fiume, assume diverse velocità rispetto alla sponda a causa della corrente, allo stesso modo ci si potrebbe aspettare che la luce presenti velocità differenti secondo che la si misuri concordemente, discordemente o trasversalmente al moto della Terra rispetto all'etere.

Per quanto strano potesse sembrare, essi non rilevarono alcuna differenza: risultato che costituì un vero rompicapo. Negli anni seguenti, furono avanzate diverse spiegazioni che, tuttavia, portavano a contraddizioni o comunque non trovarono il generale consenso. Questo **risultato nullo** fu uno dei grandi enigmi della fine del diciannovesimo secolo.

Il risultato nullo

Nel 1905, infine, Albert Einstein propose una teoria completamente nuova, che risolveva questi problemi in modo semplice, anche se comportava, come vedremo fra poco, una radicale revisione dei nostri concetti di spazio e tempo.

26–2 Postulati della teoria della relatività ristretta

I problemi che rimanevano al volgere del secolo riguardo la teoria elettromagnetica e la meccanica newtoniana furono brillantemente affrontati da Einstein, che introdusse nel 1905 la teoria della relatività. A quanto pare però Einstein non era stato direttamente influenzato dai risultati negativi dell'esperimento di Michelson-Morley. A stimolarlo furono certe questioni relative alla teoria elettromagnetica e alle onde luminose. Per esempio, si era domandato: «Cosa vedrei se potessi muovermi a cavallo di un fascio di luce?». La risposta fu che invece di un'onda elettromagnetica in moto avrebbe visto campi elettrici e campi magnetici alternati a riposo, la cui ampiezza cioè varia in funzione dello spazio, ma costanti nel tempo. Egli si rendeva conto che campi simili non si erano mai visti e anzi non erano nemmeno compatibili con la teoria maxwelliana dell'elettromagnetismo. Ne arguì, di conseguenza, che non era ragionevole pensare che la velocità della luce, nei confronti di qualche osservatore, potesse ridursi a zero, o meglio ridursi in generale anche di poco. Quest'idea divenne il secondo postulato della sua teoria della relatività.

Nella sua celebre pubblicazione del 1905 Einstein propose di disfarsi completamente dell'idea di etere e di rigettare quindi l'assunzione di un sistema di riferimento assoluto, in quiete. La proposta poteva riassumersi in due postulati. Il primo non era che un'estensione del principio di relatività newtoniana che includesse non solo le leggi della meccanica, ma anche tutto il resto della fisica, compresi cioè l'elettricità e il magnetismo.

Il primo postulato della relatività ristretta

***Primo postulato* (*principio di relatività*): Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.**

Il secondo postulato è coerente col primo.

Il secondo postulato della relatività ristretta

***Secondo postulato* (*costanza della velocità della luce*): La luce si propaga nel vuoto con una velocità *c* ben definita e indipendente dalla velocità della sorgente o dell'osservatore.**

ISBN 88-8-1336-5

Questi due postulati costituiscono i pilastri della **teoria della relatività ristretta** di Einstein. Tale teoria si chiama «ristretta», o anche «speciale», per distinguerla dalla sua successiva «teoria della relatività generale», che tratta dei sistemi di riferimento non inerziali (accelerati), che verranno discussi nel capitolo 33. La teoria ristretta, di cui stiamo parlando ora, si limita ai sistemi di riferimento inerziali.

Il secondo postulato può sembrare difficile da accettare, dato che stride con il comune buonsenso. Pensiamo dapprima alla luce che si propaga nel vuoto. Abbandonare l'idea dell'etere non è poi così sconvolgente, considerato che dopotutto nessuno ne ha mai rivelato l'esistenza. Ma il secondo postulato afferma anche che la velocità della luce nel vuoto è sempre la stessa, $3.00 \cdot 10^8$ m/s, indipendentemente dalla velocità della sorgente o dell'osservatore. Così una persona che si muova verso la sorgente di luce o che se ne allontani misurerà per la luce la stessa velocità di chi è fermo rispetto alla sorgente di luce. Questo invece si scontra con la nostra esperienza quotidiana, secondo la quale ci aspettiamo di dover sommare la velocità dell'osservatore. Non possiamo aspettarci, d'altra parte, che le nostre nozioni comuni ci siano utili anche nel trattare velocità come quelle della luce. Inoltre, il risultato negativo dell'esperimento di Michelson-Morley è pienamente coerente con il secondo postulato*.

La proposta di Einstein presenta anche un certo fascino. Respingendo l'idea di un sistema di riferimento assoluto, è stato possibile conciliare la meccanica classica con la teoria elettromagnetica di Maxwell. La velocità della luce calcolata con le equazioni di Maxwell è dunque la velocità della luce nel vuoto in *qualunque* sistema di riferimento.

La teoria einsteiniana comportò l'abbandono delle comuni nozioni di tempo e spazio; nei prossimi paragrafi esamineremo alcune bizzarre ma interessanti conseguenze di questa teoria. Gli argomenti che useremo saranno per lo più semplici. Adotteremo la stessa tecnica di Einstein: immaginare situazioni sperimentali molto semplici, che richiedono pochi sviluppi algebrici. In questo modo potremo vedere molte delle conseguenze della teoria della relatività senza addentrarci in calcoli complessi, Einstein li chiamò «esperimenti mentali».

«Esperimento mentale»

26–3 Simultaneità

Come importante conseguenza della teoria della relatività, non possiamo più considerare il tempo come un'entità assoluta. Nessuno dubita che il tempo scorra in un verso e che non torni mai indietro. Ma, come vedremo in questo e nel prossimo paragrafo, l'intervallo di tempo tra due eventi, o anche la simultaneità di due eventi, dipende dal sistema di riferimento dell'osservatore.

Definizione di «evento»

Per «evento», termine di cui stiamo facendo ampio uso, intendiamo qualcosa che avviene in una certa posizione a un certo istante.

Di due eventi si dice che sono simultanei se accadono esattamente nello stesso istante. Ma come possiamo sapere se due eventi avvengono proprio nello stesso momento? Se avvengono anche nello stesso luogo,

* L'esperimento di Michelson-Morley può anche essere considerato una prova del primo postulato, dato che ci si proponeva di misurare il moto della Terra rispetto a un sistema di riferimento assoluto. Il suo fallimento implica, dunque, l'assenza di qualsiasi sistema di riferimento privilegiato.

 ISBN 88-8-1336-5

come due mele che vi cadono in testa assieme, la risposta è facile. Ma se i due eventi succedono in due luoghi considerevolmente lontani, è più difficile sapere se sono simultanei, poiché occorre tener conto del tempo che la luce impiega a raggiungerci dai siti in cui si manifestano. Poiché la luce viaggia a velocità finita, una persona che vede due eventi deve risalire, col calcolo, al momento in cui essi sono realmente accaduti. Se, per esempio, due eventi sono *percepiti* nello stesso istante ma uno è di fatto avvenuto in un posto più lontano dell'altro rispetto all'osservatore, significa che il primo ha preceduto il secondo e i due eventi non erano simultanei.

Ricorriamo ora a un semplice esperimento mentale. Poniamo un osservatore O esattamente a metà strada tra i punti A e B, sedi di due eventi, come in figura 26-3. I due eventi possono consistere per esempio in due fulmini che colpiscono i punti A e B, come suggerisce l'illustrazione, oppure qualsiasi altro tipo di evento. In caso di fenomeni di breve durata, come l'abbattersi di un fulmine, dai punti A e B si dipartono due brevi impulsi luminosi che raggiungono l'osservatore O. Quest'ultimo «vede» gli eventi quando gli impulsi lo raggiungono. Se i due impulsi raggiungono O contemporaneamente, l'osservatore deduce che i due eventi sono stati simultanei. Ciò segue dal secondo postulato, secondo il quale gli impulsi viaggiano alla medesima velocità: dato che le distanze OA e OB sono uguali, uguali sono anche gli intervalli di tempo richiesti alla luce per percorrerle. L'osservatore O può così stabilire che i due eventi sono avvenuti simultaneamente. Se d'altronde O vede arrivare la luce dal luogo di un evento prima che dall'altro, egli è sicuro che il primo è avvenuto in anticipo rispetto al secondo.

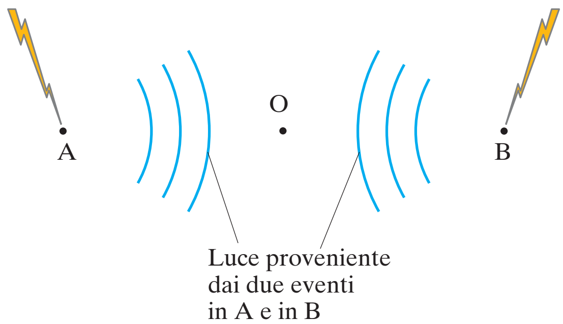


FIGURA 26-3 Un istante dopo che due fulmini hanno colpito i punti A e B, gli impulsi di luce si stanno propagando verso l'osservatore O, il quale vede i fulmini solo quando le luci lo raggiungono.

Vogliamo ora esaminare la seguente questione: se due eventi sono simultanei per un osservatore nel suo sistema di riferimento, lo sono anche per un altro osservatore in moto rispetto al primo? Diamo agli osservatori il nome di O_1 e O_2 solidali coi rispettivi sistemi di riferimento 1 e 2, in moto uno rispetto all'altro con velocità relativa v. Per esempio, due treni come in figura 26-4. O_2 dice che O_1 si muove verso destra con velocità v, come in (a); O_1 dice che O_2 si muove verso sinistra con la medesima velocità scalare v, come in (b). Entrambi i punti di vista sono legittimi, in accordo col principio di relatività. (Non esiste naturalmente un terzo punto di vista che possa dirci quale dei due si stia muovendo «realmente».)

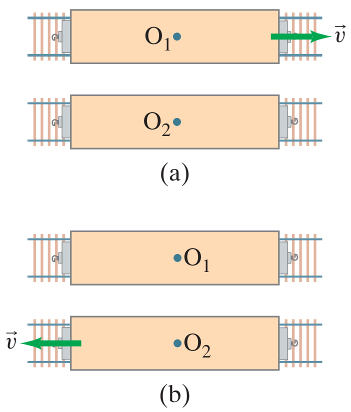


FIGURA 26-4 Due osservatori O_1 e O_2 su due diversi treni (e due diversi sistemi di riferimento), si muovono con velocità relativa v. O_2 dice che O_1 si sposta verso destra (a); O_1 dice che O_2 si sposta verso sinistra (b). Entrambi i punti di vista sono legittimi; tutto dipende dal sistema di riferimento.

Si supponga adesso che accadano due eventi osservati e misurati da entrambi gli osservatori. Immaginiamo che siano ancora due fulmini che colpiscono le due estremità dei vagoni lasciando un segno su entrambi: esattamente in A_1 e B_1 sul treno di O_1 e in A_2 e B_2 sul treno di O_2. Per semplicità supponiamo che O_1 si trovi casualmente proprio

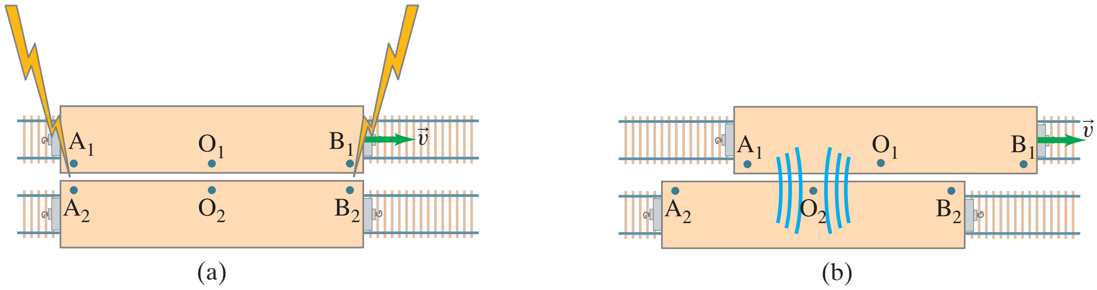


FIGURA 26-5 Esperimento mentale sulla simultaneità. Per l'osservatore O_2 il sistema di riferimento O_1 si muove verso destra. In (a) un fulmine colpisce i due sistemi di riferimento in A_1 e A_2, e un secondo fulmine si abbatte su B_1 e B_2. (b) Un istante dopo la luce proveniente dai due eventi raggiunge contemporaneamente O_2, di modo che questi ritiene che i due fulmini siano caduti simultaneamente. Nel sistema di riferimento O_1 invece la luce proveniente da B_1 è già arrivata all'osservatore O_1 mentre quella in arrivo da A_1 deve ancora raggiungerlo. Sicché nel sistema di riferimento di O_1 l'evento in B_1 deve essere avvenuto prima dell'evento in A_1. La simultaneità non è un concetto assoluto.

a metà tra A_1 e B_1 e parimenti O_2 si trovi esattamente in mezzo tra A_2 e B_2. Ora caliamoci nei panni, per esempio, di O_2 nel suo sistema di riferimento e osserviamo così che O_1 si sta muovendo verso destra con velocità v. Ipotizziamo anche che i due eventi avvengano *simultaneamente* nel sistema di riferimento di O_2 e proprio nell'istante in cui i due osservatori si trovavano di fronte l'uno all'altro (fig. 26-5a). Dopo breve tempo (fig. 26-5b) i segnali luminosi provenienti da A_2 e B_2 raggiungono O_2 contemporaneamente (in base ai nostri assunti). Poiché O_2 sa (può misurare) di essere a ugual distanza dalle due estremità, egli riconosce che i due eventi sono simultanei nel proprio sistema di riferimento.

Invece cosa osserva e misura O_1? Dal nostro sistema di riferimento (O_2) possiamo prevedere cosa osserverà O_1. Noi vediamo O_1 muoversi verso destra durante il tempo impiegato dalla luce per raggiungere O_1 da A_1 e da B_1. Nell'istante rappresentato nella figura 26-5b dal nostro sistema di riferimento O_2 vediamo che la luce proveniente da B_1 ha già oltrepassato O_1, mentre quella proveniente da A_1 non l'ha ancora raggiunto. È chiaro, quindi, che O_1 percepirà la luce proveniente da B_1 prima di quella proveniente da A_1. Il riferimento O_1 tuttavia è valido quanto lo è O_2 e la luce si propaga alla medesima velocità c sia per l'uno sia per l'altro (secondo postulato). Nel riferimento di O_1 quindi (1) questa velocità c è la stessa sia per la luce che proviene da A_1 sia per quella che gli arriva da B_1. Inoltre (2) la distanza O_1-A_1 è uguale alla distanza O_1-B_1. Di conseguenza, considerato che O_1 percepisce la luce proveniente da B_1 prima di quella in arrivo da A_1 (lo abbiamo stabilito prima, secondo le osservazioni di O_2), l'osservatore O_1 non potrà che concludere che l'evento B_1 sia avvenuto prima di A_1. Per lui gli eventi non sono simultanei, anche se lo sono per O_2.

La simultaneità è relativa

Abbiamo quindi trovato che due eventi che hanno luogo in posti diversi, se sono simultanei per un osservatore, non necessariamente lo sono anche per un altro osservatore.

Potremmo essere tentati di domandare: «Quale osservatore ha ragione, O_1 o O_2?» *Tutti e due*, secondo la relatività. Non esiste il «giusto» sistema di riferimento con il quale decidere chi dei due ha ragione. Entrambi i riferimenti sono egualmente validi. Non ci resta che concludere che *il concetto di simultaneità non è assoluto*, ma relativo. Natural-

 ISBN 88-8-1336-5

mente non ce ne accorgiamo nella nostra vita di tutti i giorni, perché l'effetto diventa rimarchevole solo quando la velocità relativa dei due sistemi di riferimento è molto elevata (prossima a c) oppure quando le distanze coinvolte sono estremamente grandi.

ESERCIZIO A Esaminate l'esperimento mentale di figura 26-5 dal punto di vista dell'osservatore O_1. In questo caso considereremo O_1 a riposo e vedremo l'evento B_1 accadere prima di A_1. L'osservatore O_1 riconoscerà che O_2, in moto con velocità di modulo v verso sinistra, vede i due eventi come simultanei? (*Suggerimento*: tracciate un disegno come quello di fig. 26-5).

26–4 La dilatazione del tempo e il paradosso dei gemelli

Può forse succedere che il tempo in un sistema di riferimento scorra con un ritmo diverso che in un altro? Questo è proprio ciò che prevede la teoria einsteiniana della relatività, come illustra il seguente esperimento mentale.

Nella figura 26-6 vediamo un'astronave che transita vicino alla Terra a gran velocità. Nella parte (a) vediamo la situazione dal punto di vista di un osservatore a bordo dell'astronave, mentre nella parte (b) è descritto il punto di vista di un osservatore sulla Terra. Entrambi sono dotati di orologi precisi. L'astronauta (parte a) fa partire un lampo di luce e misura il tempo che l'onda luminosa impiega ad attraversare la navicella e a tornare indietro dopo una riflessione su uno specchio. La

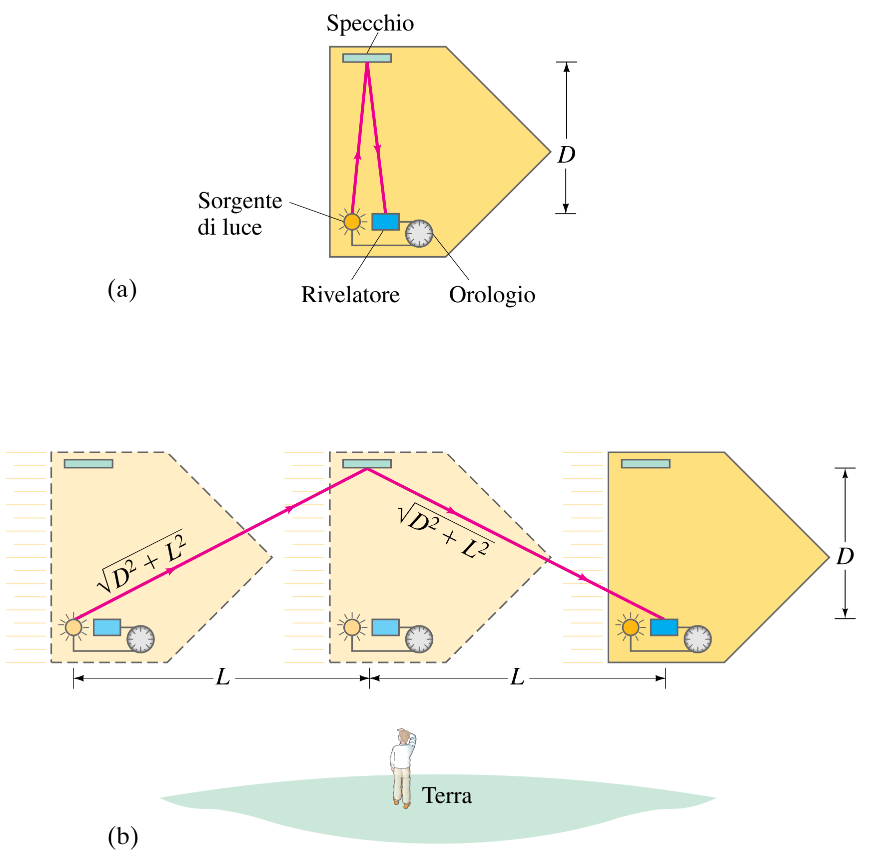


FIGURA 26-6 Possiamo renderci conto della dilatazione del tempo con un esperimento mentale: il tempo richiesto alla luce per percorrere un tratto verso l'alto e uno di ritorno verso il basso a bordo di un'astronave è maggiore per un osservatore sulla Terra (b) che per un osservatore sull'astronave (a).

luce percorre una distanza $2D$ alla velocità c, e quindi il tempo Δt_0 richiesto è

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c}\,.$$

Intervallo di tempo misurato dall'osservatore sulla nave spaziale

L'osservatore sulla Terra rileva lo stesso fenomeno (fig. 26-6b), ma per quest'ultimo l'astronave è in moto. Quindi la luce percorre il cammino in diagonale illustrato in figura, dalla sorgente allo specchio riflettendosi sullo specchio e ritornando di nuovo alla sorgente. Per l'osservatore terrestre la luce viaggia ancora alla stessa velocità (secondo postulato), ma percorre, in questo secondo caso, una distanza più lunga. Questo osservatore dunque misura un tempo *maggiore* di quello misurato dall'astronauta. L'intervallo di tempo Δt rilevato dall'osservatore terrestre si può calcolare nel seguente modo. Durante il tempo Δt la navicella percorre una distanza $2L = v\Delta t$, dove v è la velocità dell'astronave rispetto alla Terra (fig. 26-6b). Il cammino percorso dalla luce nel suo percorso diagonale è pertanto, in totale, $2\sqrt{D^2 + L^2}$, dove $L = v\Delta t/2$, e quindi

$$c = \frac{2\sqrt{D^2 + L^2}}{\Delta t} = \frac{2\sqrt{D^2 + v^2(\Delta t)^2/4}}{\Delta t}.$$

Eleviamo entrambi i membri al quadrato

$$c^2 = \frac{4D^2}{(\Delta t)^2} + v^2,$$

e risolviamo rispetto a Δt, ottenendo

$$(\Delta t)^2 = \frac{4D^2}{c^2 - v^2}$$

$$\Delta t = \frac{2D}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,.$$

Introducendo l'espressione di Δt_0 data sopra, troviamo

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \qquad \textbf{(26-1a)}$$

Formula della dilatazione del tempo

Poiché $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ è sempre minore di 1, concludiamo che $\Delta t > \Delta t_0$. Possiamo dire che l'intervallo di tempo tra due eventi (l'invio e la ricezione dell'impulso luminoso a bordo dell'astronave) è *maggiore* per l'osservatore che sta sulla Terra rispetto a quello rilevato dall'osservatore sull'astronave. Questo è un risultato generale della teoria della relatività e prende il nome di **dilatazione del tempo**. Detto in breve, il fenomeno della dilatazione del tempo si può esprimere così:

gli orologi in moto rispetto a un osservatore risultano a quest'ultimo più lenti (rispetto agli orologi per lui a riposo).

Dilatazione del tempo: gli orologi in movimento vanno lenti

Non bisogna naturalmente pensare che gli orologi siano in qualche modo difettosi. Il tempo che misurate scorre semplicemente a un ritmo più lento in qualunque sistema di riferimento in moto rispetto al vostro. Questo considerevole risultato è un'inevitabile conseguenza dei due postulati della teoria della relatività.

 ISBN 88-8-1336-5

Il fattore $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ capita così frequentemente in relatività che spesso lo indichiamo con il simbolo abbreviato γ e scriviamo l'equazione 26-1a come:

Dilatazione del tempo

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \tag{26-1b}$$

dove

Definizione di γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{26-2}$$

Si osservi che γ non è mai minore di 1. Per le velocità che si incontrano nell'esperienza quotidiana, γ è quasi uguale a 1; in generale, $\gamma \geq 1$.

Perché normalmente non notiamo la dilatazione del tempo

La dilatazione del tempo può essere un concetto difficile da accettare, dato che contrasta con le nostre comuni conoscenze. Si può vedere dall'equazione 26-1 che l'effetto di dilatazione del tempo è trascurabile quando v non è significativamente prossima a c. Se v è molto minore di c, il termine v^2/c^2 diventa molto minore di 1 nel denominatore della 26-1a e quindi $\Delta t \approx \Delta t_0$ (si veda l'esempio 26-2). Le velocità cui siamo abituati nella nostra vita quotidiana sono molto minori di c e non desta quindi grande meraviglia che non si abbia normalmente percezione della dilatazione del tempo. Questo effetto è stato invece provato con appositi esperimenti, confermando le previsioni di Einstein. Nel 1971, per esempio, orologi atomici di estrema precisione hanno fatto il giro del mondo in aereo. La velocità degli aviogetti (10^3 km/h) era ben lontana da c e pertanto, al fine di rilevare l'effetto di dilatazione del tempo, gli orologi presentavano un'accuratezza al nanosecondo (10^{-9} s); essi confermarono l'esattezza dell'equazione 26-1 entro gli errori sperimentali.

Conferma sperimentale

La dilatazione del tempo era già stata confermata decenni prima con osservazioni sulle «particelle elementari» (cap. 32), dotate di massa molto piccola (in genere tra 10^{-30} e 10^{-27} kg) e quindi accelerabili, con poca spesa di energia, a velocità prossime a c. Molte di queste particelle non sono stabili e decadono dopo un certo tempo in particelle più leggere. Un esempio è dato dal muone, la cui vita media è di 2.2 μs, se si trova a riposo. Accurati esperimenti hanno mostrato che per un muone che viaggia a elevata velocità, viene misurata una vita media più lunga di quando è a riposo, proprio nella misura prevista dalla formula della dilatazione del tempo.

ESEMPIO 26-1 **Vita media di un muone in moto.** (*a*) Qual è la vita media, misurata in laboratorio, di un muone, quando la sua velocità è $v = 0.60c = 1.8 \cdot 10^8$ m/s rispetto al laboratorio? La sua vita media a riposo è di $2.20\ \mu s = 2.20 \cdot 10^{-6}$ s. (*b*) Quanto spazio riesce a percorrere, in media, nel laboratorio prima di decadere?

APPROCCIO Un osservatore capace di muoversi assieme al muone (il muone per lui sarebbe a riposo) lo vedrebbe decadere mediamente dopo $2.2 \cdot 10^{-6}$ s. Per un osservatore fermo nel laboratorio il muone vive più a lungo a causa della dilatazione del tempo. Troviamo il tempo di vita medio usando l'equazione 26-1a e la distanza media dalla relazione $d = v\Delta t$.

SOLUZIONE (*a*) Ponendo $v = 0.60c$ nell'equazione 26-1a, otteniamo

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2.20 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}}{\sqrt{1-\frac{0.36c^2}{c^2}}} = \frac{2.20 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}}{\sqrt{0.64}} = 2.8 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}.$$

(b) La relatività prevede che un muone debba percorrere una distanza media $d = v\Delta t = (0.60)(3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s})(2.8 \cdot 10^{-6} \text{ s}) = 500 \text{ m}$, ed è questa la distanza che si riscontra sperimentalmente in laboratorio.

NOTA Alla velocità di $1.8 \cdot 10^8$ m/s, secondo la fisica classica con una vita media di 2.2 μs il muone percorrerebbe mediamente una distanza $d = vt = (1.8 \cdot 10^8 \text{ m/s})(2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}) = 400 \text{ m}$, cioè minore di quella misurata.

ESERCIZIO B Qual è la vita media del muone nell'Esempio 26-1 se v è (a) $0.10c$, (b) $0.90c$?

È necessario un commento sull'uso dell'equazione 26-1 e sul significato di Δt e Δt_0. L'equazione è valida solo quando Δt_0 rappresenta l'intervallo di tempo tra due eventi in un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengono nella stessa posizione (come nella fig. 26-6a dove i due eventi sono l'emissione e la ricezione del segnale luminoso; solo per chiarezza del disegno sorgente e rivelatore sono rappresentati in posizioni non perfettamente coincidenti). Questo intervallo di tempo, Δt_0, è chiamato **tempo proprio**. Di conseguenza Δt nell'equazione 26-1 rappresenta l'intervallo di tempo tra i due eventi, misurato in un sistema di riferimento che si muove con velocità v rispetto al primo. Nell'esempio 26-1 qui sopra, abbiamo attribuito il valore di $2.2 \cdot 10^{-6}$ s a Δt_0 e non a Δt, perché è solo nel riferimento a riposo del muone che i due eventi («nascita» e «decadimento» del muone) accadono nella stessa posizione.

Il tempo proprio Δt_0 è misurato in un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengono nello stesso punto dello spazio

Il tempo proprio Δt_0 è il tempo più breve tra due eventi che un qualsiasi osservatore possa misurare. In ogni altro sistema di riferimento in moto il tempo Δt è maggiore.

ESEMPIO 26-2 **Dilatazione del tempo a 100 km/h.** Vediamo quanto vale la dilatazione del tempo a velocità ordinarie. Un'auto lanciata a 100 km/h percorre una certa distanza in 10.00 s misurati con l'orologio del guidatore. Che intervallo di tempo misura un osservatore a terra?

APPROCCIO La velocità della macchina rispetto al terreno è $100 \text{ km/h} = (1.00 \cdot 10^5 \text{ m})/(3600 \text{ s}) = 27.8 \text{ m/s}$. Il guidatore è a riposo nel sistema di riferimento dell'auto e quindi poniamo nella formula della dilatazione del tempo $\Delta t_0 = 10.00$ s.

SOLUZIONE Usiamo l'equazione 26-1a:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{10.00 \text{ s}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{27.8 \text{ m/s}}{3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}\right)^2}} = \frac{10.00 \text{ s}}{\sqrt{1 - (8.59 \cdot 10^{-15})}} .$$

Se provate a fare il conto con la vostra calcolatrice, otterrete $\Delta t = 10.00$ s, poiché il denominatore differisce da 1 di una quantità piccolissima. Infatti, il tempo che misurerebbe l'osservatore a terra non sarebbe diverso da quello del pilota, anche utilizzando il migliore tra gli strumenti oggi disponibili. Se possedeste un calcolatore in grado di tener conto di un numero di cifre decimali sufficientemente elevato, potreste riuscire a rivelare con il calcolo che Δt è maggiore di Δt_0 di circa $4 \cdot 10^{-14}$ s.

PER RISOLVERE I PROBLEMI
Uso dello sviluppo binomiale

NOTA Possiamo comunque stimare facilmente questa differenza ricorrendo a uno sviluppo binomiale (vedi appendice),

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx . \qquad [\text{per } x \ll 1]$$

 ISBN 88-8-1336-5

Nella formula della dilatazione del tempo abbiamo il fattore $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$. Quindi

$$\begin{aligned}\Delta t &= \gamma \Delta t_0 \\ &= \Delta t_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx \Delta t_0 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \\ &\approx 10.00\ \text{s} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{27.8\ \text{m/s}}{3.00 \cdot 10^8\ \text{m/s}}\right)^2\right] \\ &\approx 10.00\ \text{s} + 4 \cdot 10^{-14}\ \text{s}\,.\end{aligned}$$

Si prevede dunque che la differenza tra Δt e Δt_0 sia $4 \cdot 10^{-14}$ s, un'inezia non misurabile.

ESERCIZIO C Un orologio atomico mantiene un tempo perfetto sulla Terra. Se l'orologio viene portato su una nave spaziale che viaggia alla velocità $v = 0.60c$, l'orologio andrà più lento per chi è (*a*) sull'astronave o (*b*) sulla Terra?

Navigazione spaziale?

La dilatazione del tempo ha fatto sorgere interessanti speculazioni sui viaggi spaziali. Secondo la fisica classica (newtoniana), non sarebbe possibile per comuni mortali raggiungere una stella lontana 100 anni-luce (1 anno-luce è la distanza che la luce percorre in 1 anno, cioè $3.0 \cdot 10^8\ \text{m/s} \cdot 3.16 \cdot 10^7\ \text{s} = 9.5 \cdot 10^{15}\ \text{m}$). Anche se una navicella spaziale potesse viaggiare quasi alla velocità della luce, impiegherebbe più di 100 anni per approdare a una stella simile. L'effetto di dilatazione del tempo però fa sì che, per un'astronauta, i tempi coinvolti siano minori. Su una navicella che viaggiasse alla velocità $v = 0.999c$ il tempo di viaggio sarebbe all'incirca solamente

$$\begin{aligned}\Delta t_0 &= \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ &= (100\ \text{anni}) \sqrt{1 - (0.999)^2} \\ &= 4.5\ \text{anni}\,.\end{aligned}$$

Una così ampia dilatazione del tempo permetterebbe un tale viaggio, ma gli enormi problemi pratici per ottenere velocità tanto elevate non sono forse superabili, certamente non in un futuro prossimo.

Si noti che in questo esempio, invece dei 100 anni che trascorrerebbe sulla Terra, per l'astronauta in viaggio passerebbero solo 4.5 anni. Sono solo gli orologi a rallentare per l'astronauta? La risposta è no. Tutti i processi, compresi quelli della vita biologica dell'astronauta, si evolvono secondo l'osservatore terrestre a un ritmo più lento. Per l'astronauta il tempo scorrerebbe normalmente; egli trascorrerebbe quattro anni e mezzo di vita ordinaria coi normali ritmi di sonno, di pasti, di letture ecc., mentre, d'altro canto, la gente sulla Terra trascorrerebbe 100 anni di normale attività.

Paradosso dei gemelli

Non molto tempo dopo che Einstein propose la sua teoria della relatività ristretta, fu messo in evidenza un apparente paradosso, detto **para-**

Il paradosso dei gemelli

dosso dei gemelli. Immaginate che uno di due gemelli ventenni decolli su un'astronave per un lungo viaggio ad altissima velocità fino a una stella lontana e ne faccia poi ritorno, mentre l'altro gemello lo aspetta sulla Terra. In base alle osservazioni del gemello che rimane a Terra, il fratello astronauta invecchia di meno; invece di, poniamo, 20 anni passati sulla Terra, per il gemello viaggiatore è passato magari un anno solo (a seconda della velocità del veicolo spaziale). Così, quando finalmente si rivedono, il gemello rimasto sul nostro pianeta ritiene di avere 40 anni mentre l'altro gemello ne avrebbe solo 21.

Questo è il punto di vista del gemello rimasto a terra, ma cosa dice il gemello viaggiatore? Se tutti i sistemi di riferimento inerziali sono ugualmente validi, non può forse il gemello viaggiatore fare tutte le medesime considerazioni, ma a rovescio? Non potrebbe dichiarare che, muovendosi la Terra a gran velocità rispetto a lui, il tempo sulla Terra scorre più lento e quindi il suo gemello terrestre rimane più giovane? Cioè potrebbe dire l'esatto opposto di ciò che prevede il gemello terrestre. Non possono aver ragione tutti e due, perché dopotutto l'astronave ritorna sulla Terra e a quel punto si può fare un confronto diretto di età e orologi.

In realtà non c'è nessuna contraddizione. La navicella infatti accelera sia all'inizio sia alla fine del suo viaggio e accelera pure per invertire la rotta. Durante queste fasi di accelerazione il gemello sull'astronave non si trova in un sistema di riferimento inerziale. Solo nei tratti intermedi il gemello astronauta può essere in un sistema di riferimento inerziale. Quindi le previsioni dell'astronauta basate sull'equivalenza dei due sistemi di riferimento non sono valide. Nessun paradosso dunque: il punto di vista sopradescritto del gemello viaggiatore non è corretto, mentre sono valide le previsioni del gemello che lo aspetta a Terra. Il gemello astronauta tornerà più giovane di lui.

* Un esempio in più: il fattore γ

ESEMPIO 26-3 **γ per varie velocità** Determinate il valore di γ per una velocità v uguale a (a) 0, (b) $0.010c$, (c) $0.10c$, (d) $0.50c$, (e) $0.90c$, (f) $0.990c$.

APPROCCIO Utilizziamo semplicemente l'equazione 26-2.

SOLUZIONE (a) $v = 0$, $\gamma = 1/1 = 1$.
(b) $v = 0.010c = 3.0 \times 10^6$ m/s (una velocità molto elevata)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{0.010c}{c}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(0.010)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.99990}} = 1.00005\,.$$

A meno che v venga dato con un numero maggiore di cifre significative, qui $\gamma = 1.0$. Vediamo che γ non è mai inferiore a 1.0 e può salire sensibilmente sopra 1.0 solamente ad alte velocità.
(c) Per una velocità 10 volte più alta, $v = 0.1c$, otteniamo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0.10)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.99}} = 1.005\,.$$

 ISBN 88-8-1336-5

TABELLA 26-1
Valore di γ

v	γ
0	1.000
$0.01c$	1.000
$0.10c$	1.005
$0.50c$	1.15
$0.90c$	2.3
$0.99c$	7.1

(*d*) A una velocità pari a metà di quella della luce

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0.50)^2}} = 1.15 .$$

(*e*) A $v = 0.90c$ otteniamo $\gamma = 2.3$.
(*f*) A $v = 0.990c$ otteniamo $\gamma = 7.1$.

La tabella 26-1 è un comodo riassunto di questi risultati.

* Global positioning system (GPS)

FISICA APPLICATA
Sistema Globale di posizionamento (GPS)

Aeroplani, automobili, natanti ed escursionisti usano il **global positioning system (GPS)**, ricevitori che segnalano, con grande precisione, la loro posizione in un certo momento. I 24 satelliti del GPS mandano precisi segnali temporali utilizzando orologi atomici. Il vostro ricevitore confronta i segnali pervenutigli da almeno quattro satelliti, i cui tempi sono tutti accuratamente sincronizzati entro 1 parte su 10^{13}. Confrontando le differenze di tempo con le posizioni note dei satelliti e con la velocità della luce, il ricevitore può determinare a che distanza è da ogni satellite e così in quale punto è sulla Terra. Può farlo con una precisione di 15 m, se è stato costruito per effettuare correzioni come quella sotto riportata, dovuta alla relatività ristretta.

ESEMPIO CONCETTUALE 26-4 Una correzione relativistica al GPS. I satelliti GPS si muovono a circa 4 km/s = 4000 m/s. Mostrate che un buon ricevitore GPS necessita di una correzione per la dilatazione del tempo se deve produrre risultati coerenti con orologi atomici precisi entro 1 parte su 10^{13}.

RISPOSTA Calcoliamo l'ampiezza dell'effetto dilatazione del tempo inserendo $v = 4000$ m/s nell'equazione 26-1a

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\Delta t_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{4\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}}{3\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}}\right)^2}}\Delta t_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-1.8\cdot 10^{-10}}}\Delta t_0 .\end{aligned}$$

Usiamo lo sviluppo binomiale: $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$ per $x \ll 1$ (vedi appendice) $(1-x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

$$\Delta t = \left(1 + \tfrac{1}{2}(1.8\cdot 10^{-10})\right)\Delta t_0 = (1 + 9\cdot 10^{-11})\Delta t_0 .$$

L'«errore» di tempo diviso per l'intervallo di tempo è

$$\frac{(\Delta t - \Delta t_0)}{\Delta t_0} = 1 + 9\cdot 10^{-11} - 1 = 9\cdot 10^{-11} \approx 1\cdot 10^{-10} .$$

La dilatazione del tempo, se non se ne tiene conto, può introdurre un errore di circa 1 parte su 10^{10}, che è 1000 volte più grande della precisione degli orologi atomici. Non effettuare la correzione per la dilatazione del tempo significa che un ricevitore può dare un'accuratezza di posizione molto più modesta.

NOTA Gli apparecchi GPS devono fare anche altre correzioni che includono gli effetti associati alla Relatività Generale.

26–5 Contrazione delle lunghezze

Gli intervalli di tempo non sono i soli a subire modifiche passando da un sistema di riferimento all'altro. Anche gli intervalli di spazio, cioè lunghezze e distanze, subiscono la stessa sorte nell'ambito della relatività ristretta e per illustrare questo fenomeno ci affideremo ancora a un esperimento mentale.

Un osservatore sulla Terra guarda una navicella spaziale in viaggio, con velocità v, dalla Terra verso Nettuno (fig. 26-7a). La distanza che separa i due pianeti, misurata dall'osservatore terrestre, sia L_0. Il tempo richiesto per il viaggio, sempre secondo questo osservatore, è

$$\Delta t = \frac{L_0}{v}. \qquad \text{[Osservatore terrestre]}$$

La figura 26-7b illustra il punto di vista dell'astronauta a bordo del veicolo spaziale. In questo sistema di riferimento l'astronave è a riposo. La Terra e Nettuno si muovono* invece con velocità di modulo v. Il tempo che intercorre tra la partenza dalla Terra e l'arrivo su Nettuno (rilevato dall'astronave) è il «tempo proprio» (i due eventi accadono nello stesso luogo, cioè sull'astronave). Questo tempo, misurato dall'astronauta, è pertanto minore di quello dell'osservatore terrestre, a causa della dilatazione del tempo. In base all'equazione 26-1 il tempo di viaggio secondo l'astronauta vale

$$\begin{aligned} \Delta t_0 &= \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} \\ &= \Delta t/\gamma\,. \end{aligned} \qquad \text{[Osservatore astronauta]}$$

Dato che per l'astronauta la velocità è la stessa ma l'intervallo di tempo tra i due eventi è inferiore, egli misurerà una distanza tra i pianeti pure inferiore. Detta L questa distanza «vista» dall'astronauta, avremo $L = v\Delta t_0$ che possiamo riscrivere come $L = v\Delta t_0 = v\Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} =$

* Assumiamo che v sia molto più grande che la velocità relativa di Nettuno rispetto alla Terra, così che quest'ultima possa essere trascurata.

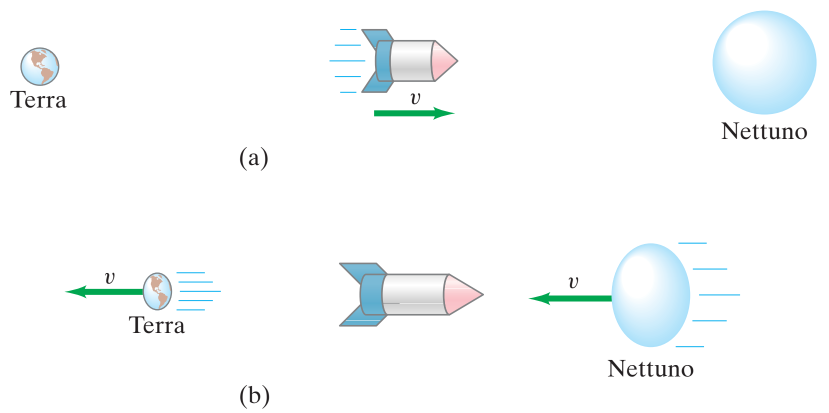


FIGURA 26-7 (a) Una navicella spaziale in viaggio a velocità elevatissima dalla Terra verso Nettuno, vista dal sistema di riferimento terrestre. (b) Secondo un osservatore a bordo della navicella, la Terra e Nettuno si stanno muovendo ad altissima velocità v: la Terra «lascia» la navicella e dopo un certo tempo Δt_0 il pianeta Nettuno «incontra» la navicella.

 ISBN 88-8-1336-5

$L_0\sqrt{1-v^2/c^2}$. Così abbiamo l'importante risultato che

Formula di contrazione delle lunghezze

$$L = L_0\sqrt{1-v^2/c^2}\,. \tag{26-3a}$$

Oppure, usando γ (eq. 26-2)

$$L = \frac{L_0}{\gamma}\,. \tag{26-3b}$$

Questo è un risultato generale per la teoria della relatività ristretta e si applica sia alla lunghezza di oggetti sia a distanze fra gli oggetti. Il risultato può esprimersi in parole semplici:

Contrazione delle lunghezze: gli oggetti in movimento sono più corti (nella direzione del moto)

la lunghezza di un oggetto, quando è in moto rispetto all'osservatore, risulta minore di quando è fermo rispetto ad esso.

Il fenomeno è chiamato **contrazione delle lunghezze**. La lunghezza L_0 che compare nell'equazione 26-3 è detta **lunghezza propria**, ed è la lunghezza di un oggetto (o la distanza tra due punti le cui posizioni sono misurate nello stesso istante) come viene misurata da *osservatori a riposo* rispetto ad esso. L'equazione 26-3 fornisce la lunghezza L misurata da un osservatore quando l'oggetto si muove rispetto ad esso con velocità v.

ATTENZIONE

La lunghezza propria è misurata nel sistema di riferimento in cui le due posizioni sono a riposo

È importante notare che la contrazione della lunghezza avviene *solo nella direzione del moto*. Per esempio, la navicella della figura 26-7a si accorcia nella direzione della lunghezza, ma la sua altezza rimane la stessa, come se fosse ferma.

La contrazione delle lunghezze, come la dilatazione del tempo, non è percepibile nella vita ordinaria, giacché il fattore $\sqrt{1-v^2/c^2}$ dell'equazione 26-3 differisce significativamente da 1.00 solo quando v è molto elevata.

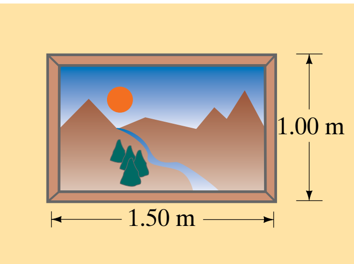
ESEMPIO 26-5 **Contrazione di dipinti.** Un quadro rettangolare misura 1.00 m in altezza e 1.50 m in larghezza. È appeso sulla parete laterale di un'astronave, in moto rispetto alla Terra alla velocità di $0.90c$. Si veda la figura 26-8a. (*a*) Che dimensioni ha il dipinto per il capitano dell'astronave? (*b*) Che dimensioni assume per un osservatore sulla Terra?

APPROCCIO Applichiamo la formula della contrazione delle lunghezze, equazione 26-3, alla dimensione parallela al moto; v è la velocità del dipinto relativa all'osservatore.

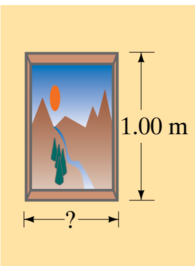
SOLUZIONE (*a*) Il quadro (come qualsiasi altro oggetto a bordo) appare perfettamente normale per chiunque stia sull'astronave. Dunque il capitano vede il quadro di 1.00 m per 1.50 m.
(*b*) Per un osservatore sulla Terra è solo la dimensione parallela all'asse del moto a subire contrazione, e quindi l'altezza rimane invariata: 1.00 m, come illustra la figura 26-8b. La larghezza invece si contrae:

$$\begin{aligned} L &= L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ &= (1.50\ \text{m})\sqrt{1-(0.90)^2} = 0.65\ \text{m}\,. \end{aligned}$$

Il dipinto quindi assume le dimensioni di 1.00 m per 0.65 m.



(a)



(b)

FIGURA 26-8 Esempio 26-5.

ESEMPIO 26-6 **Un supertreno immaginario.** Un treno superveloce di lunghezza 500 m sta passando sotto una galleria di 200 m. La velocità del treno è così grande che esso è contenuto tutto nella galleria per un osservatore in riposo sulla Terra (su una montagna sopra la galleria); cioè il locomotore sta appena per emergere da una estremità della galleria quando l'ultimo vagone scompare dentro l'altra estremità. Qual è la velocità del treno?

APPROCCIO Poiché il treno sta giusto dentro la galleria, la sua lunghezza misurata dall'osservatore è 200 m. La formula della contrazione delle lunghezze, equazione 26-3, può quindi essere usata per ottenere v.

SOLUZIONE Sostituendo $L = 200$ m e $L_0 = 500$ m nell'equazione 26-3, si ha

$$200 = 500\ \mathrm{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,;$$

dividendo entrambi i membri per 500 ed elevando al quadrato, otteniamo

$$(0.40)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

oppure

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-(0.40)^2}$$

$$v = 0.92c\,.$$

NOTA Nessun treno reale può andare così veloce. Ma è divertente immaginarlo.

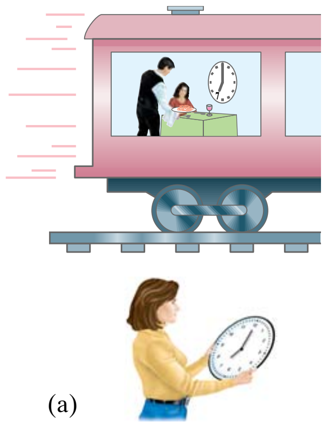
NOTA Un osservatore sul treno *non* vedrebbe le due estremità del treno dentro la galleria nello stesso tempo; la simultaneità è relativa.

ESERCIZIO D A quale velocità dell'astronave il dipinto dell'esempio 26-5 apparirebbe contratto di soli 10 cm (a $L_0 = 1.40$ m) secondo gli osservatori sulla Terra?

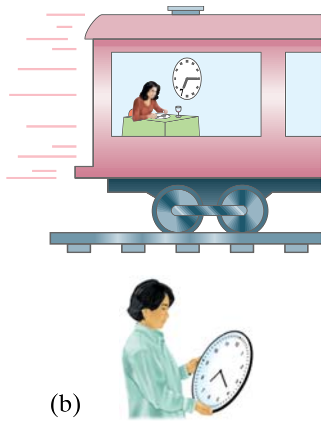
26–6 Spazio-tempo quadridimensionale

Proviamo a immaginare una persona a bordo di un treno che viaggia a enorme velocità, diciamo $0.65c$. Si veda la figura 26-9. Questa persona si accomoda a tavola e comincia la colazione alle ore 7:00, terminandola alle ore 7:15, secondo l'orologio affisso nel vagone ristorante. I due eventi (inizio e fine pasto) hanno luogo nello stesso posto, sul treno e quindi l'intervallo di tempo proprio tra i due eventi è di 15 min. Per un osservatore a Terra, il pasto dura più a lungo, 20 min in base all'equazione 26-1. Ora, supponiamo che la colazione sia stata servita su un piatto del diametro di 20 cm. Per l'osservatore a Terra il piatto risulta largo solo 15 cm (contrazione della lunghezza). Per l'osservatore a Terra quindi il pasto sembra più piccolo ma dura di più.

In un certo senso questi due effetti, la dilatazione del tempo e la contrazione della lunghezza, si compensano tra loro. Dal punto di vista



(a)



(b)

FIGURA 26-9 Secondo un preciso orologio a bordo di un treno rapidissimo, una viaggiatrice incomincia (a) la colazione alle ore 7:00 e la termina (b) alle ore 7:15. All'istante iniziale alcuni osservatori a Terra regolano il loro orologio come quello del treno. Per loro però la colazione durerà 20 minuti.

 ISBN 88-8-1336-5

di chi sta a Terra, il pasto sembra perdere in dimensioni e guadagnare in durata: una sorta di scambio tra lunghezza, cioè spazio, e tempo.

Considerazioni di questo tipo hanno portato all'idea dello **spazio-tempo quadridimensionale**: la descrizione dello spazio richiede fino a tre dimensioni, il tempo costituisce una quarta dimensione. Lo spazio e il tempo sono intimamente connessi. Proprio come quando, schiacciando un palloncino, esso si riduce in un senso ma cresce in un altro, così, quando esaminiamo oggetti ed eventi da diversi sistemi di riferimento, una certa quantità di spazio viene scambiata con una certa quantità di tempo e viceversa.

Per quanto l'idea di aver a che fare con quattro dimensioni possa sembrare strana, la definizione si limita a precisare che un oggetto o un evento è individuato da quattro quantità, tre per descrivere il dove e una per descrivere il quando. Il vero aspetto inusuale dello spazio-tempo quadridimensionale è che lo spazio e il tempo possono mescolarsi: quando si cambia sistema di riferimento, un poco dell'uno può scambiarsi con un poco dell'altro.

È difficile per la maggior parte di noi afferrare l'idea dello spazio-tempo quadridimensionale. Abbiamo in qualche modo la sensazione, proprio come i fisici prima dell'avvento della relatività, che lo spazio e il tempo siano entità completamente separate. La nostra difficoltà nell'accettare il contrario è insita nel retaggio che abbiamo ereditato dal XVII secolo, dai tempi cioè di Galileo e di Newton. In epoca precedente la direzione verticale, cioè quella in cui cadono i corpi, era considerata qualcosa di distinto dalle due dimensioni orizzontali. Fu Galileo a dimostrare che la dimensione verticale differisce solo per il fatto che, casualmente, è la direzione in cui agisce la gravità. Per il resto le tre dimensioni sono equivalenti, un punto di vista che oggi accettiamo tutti pacificamente. Ora ci viene chiesto di accettare una dimensione in più, il tempo, che avevamo sempre concepito come un'entità in qualche modo diversa. Non stiamo dicendo che non vi sia distinzione tra spazio e tempo. Ciò che la relatività ci insegna è che le determinazioni dello spazio e del tempo non sono indipendenti l'una dall'altra.

26–7 Quantità di moto e massa relativistiche

Finora in questo capitolo abbiamo visto che due grandezze fondamentali della meccanica, le lunghezze e gli intervalli di tempo, necessitano di correzioni perché sono relative, i loro valori cioè dipendono dal sistema di riferimento rispetto al quale sono misurate. Possiamo attenderci che anche altre grandezze fisiche possano dover essere modificate in accordo con la teoria della relatività, come la quantità di moto, l'energia e la massa.

L'analisi dei processi d'urto tra due particelle dimostra che, se vogliamo preservare il principio di conservazione della quantità di moto anche nell'ambito della relatività, dobbiamo ridefinire la quantità di moto come

Quantità di moto relativistica

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0 v \, . \qquad \textbf{(26-4)}$$

Anche qui γ è una abbreviazione per $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (eq. 26-2). Per velocità molto inferiori alla velocità della luce, l'equazione 26-4 fornisce la classica quantità di moto, $p = m_0 v$.

Abbiamo scritto m_0 anziché m perché l'equazione 26-4 suggerisce un'interpretazione relativistica della massa. Precisamente che un oggetto a riposo ha una **massa a riposo** m_0 ma che la sua massa può crescere con la velocità secondo la formula

$$m_{\text{rel}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0 , \qquad \textbf{(26-5)}$$

Formula dell'aumento della massa

dove m_{rel} è chiamata **massa relativistica**. Ma fate attenzione a non pensare che un oggetto acquisisca più molecole quando la velocità diventa molto grande. In effetti molti fisici pensano che un oggetto ha solo una massa (la sua massa a riposo) e che è solo la quantità di moto che cresce con la velocità, un effetto relativistico su cui tutti concordano. [Noi usiamo i pedici su m (m_0 e m_{rel}) per evitare ogni fraintendimento. Se vedete m senza alcun pedice, potete stare sicuri che significa la massa a riposo.]

L'aumento relativistico della quantità di moto è stato sperimentato molte volte sulle particelle elementari più piccole (come i muoni) e tale aumento è in accordo con l'equazione 26-4.

ESEMPIO 26-7 **Quantità di moto di un elettrone in movimento.** Confrontate la quantità di moto di un elettrone con velocità di (a) $4.00 \cdot 10^7$ m/s all'interno di un tubo catodico da televisore, e di (b) $0.98c$ in un acceleratore impiegato nelle terapie oncologiche.

APPROCCIO Usiamo l'equazione 26-4 per la quantità di moto di un elettrone in movimento.

SOLUZIONE A $v = 4.00 \cdot 10^7$ m/s la quantità di moto dell'elettrone è

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{(4.00 \cdot 10^7\ \text{m/s})^2}{(3.00 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2}}} = 1.01 m_0 v .$$

Il fattore $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1.01$, così la quantità di moto è solo circa l'1 % più grande del valore classico. (Se inseriamo la massa a riposo di un elettrone $m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, la quantità di moto è $p = 1.01 m_0 v = 3.68 \cdot 10^{-23}$ kg · m/s.)

(b) Con $v = 0.98c$, la quantità di moto è

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{(0.98c)^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (0.98)^2}} = 5.0 m_0 v.$$

Un elettrone che viaggia al 98% della velocità della luce ha $\gamma = 5.0$ e una quantità di moto 5.0 volte più grande del valore classico.

26–8 La velocità limite

Come conseguenza fondamentale della teoria della relatività ristretta, si ha che nessun oggetto può assumere una velocità che raggiunga o superi quella della luce. Vale a dire che la velocità della luce rappresenta il limite superiore naturale di velocità nell'Universo, come si riconosce da qualunque delle equazioni 26-1, 26-3 e 26-4. Lo si rileva più

 ISBN 88-8-1336-5

facilmente forse da quest'ultima, la 26-4: man mano che un oggetto viene accelerato a velocità sempre più elevate, la sua quantità di moto cresce via via. Infatti, al tendere di v a c, il denominatore di quest'equazione tende a zero (come pure nelle altre equazioni) e quindi la quantità di moto tende all'infinito. Per accelerare un corpo alla velocità della luce si richiederebbe dunque un'energia infinita, e quindi ciò non è possibile.

26–9 $E = mc^2$; massa ed energia

Se la quantità di moto deve essere modificata per essere coerente con la relatività, come abbiamo appena mostrato nell'equazione 26-4, allora possiamo aspettarci che anche l'energia debba essere riconsiderata. In effetti Einstein non solo sviluppò una nuova formula per l'energia cinetica, ma trovò anche una nuova relazione fra la massa e l'energia ed ebbe la sconcertante idea che esista un'equivalenza tra massa ed energia.

Possiamo cominciare col teorema dell'energia cinetica (cap. 6) e assumere che sia ancora valido nell'ambito della relatività. Cioè, il lavoro totale compiuto su una particella è pari alla variazione della sua energia cinetica (K). Partendo da questo teorema Einstein dimostrò che la formula $K = \frac{1}{2}mv^2$ alle alte velocità non è corretta. Einstein dimostrò, invece, che l'energia cinetica di una particella con massa a riposo m_0 in moto a velocità v è data da

Energia cinetica relativistica

$$K = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2 \, . \tag{26-6a}$$

In termini di $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ possiamo riscrivere l'equazione 26-6a come

$$K = \gamma m_0c^2 - m_0c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2 \, . \tag{26-6b}$$

L'equazione 26-6 necessita di essere interpretata. Il primo termine cresce con la velocità v della particella. Il secondo termine m_0c^2 è costante: viene chiamato **energia a riposo** della particella e rappresenta una forma di energia che una particella ha anche quando è a riposo. Si noti che se una particella è a riposo ($v = 0$) il primo termine della 26-6a diventa m_0c^2 e quindi $K = 0$, come deve essere.

Possiamo riarrangiare l'equazione 26-6b per ottenere

$$\gamma m_0c^2 = m_0c^2 + K \, .$$

γm_0c^2 è detta *energia totale* E della particella (assumendo che non ci sia energia potenziale) poiché equivale all'energia a riposo più l'energia cinetica:

Definizione di energia totale

$$E = m_0c^2 + K \, . \tag{26-7a}$$

L'energia totale può anche essere scritta, usando l'equazione 26-6a, come

$$E = \gamma m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \, . \tag{26-7b}$$

Per una particella a riposo in un certo sistema di riferimento, K è zero nell'equazione 26-7 e quindi la sua energia totale è la sua energia a riposo E_0.

LA MASSA IN RELAZIONE ALL'ENERGIA

$$E_0 = m_0c^2 \, . \tag{26-8}$$

Ecco qui la celebre formula di Einstein, usualmente scritta semplicemente $E = mc^2$.

Questa formula lega matematicamente i concetti di massa e di energia. Affinché però quest'idea abbia qualche significato dal punto di vista pratico, occorre che la massa sia convertibile in altre forme di energia e viceversa. Einstein suggerì che questa possibilità era reale, e infatti si sono trovate innumerevoli conferme sperimentali della conversione di massa in altre forme di energia. Si può più facilmente riscontrare quest'interconversione tra massa ed energia nella fisica del nucleo e delle particelle elementari; per esempio, si può osservare il decadimento del pione neutro (π^0), di massa a riposo pari a $2.4 \cdot 10^{-28}$ kg, in pura radiazione elettromagnetica (fotoni). Il pione scompare completamente nel processo e la quantità di energia elettromagnetica prodotta è esattamente uguale a quella prevista dalla formula di Einstein, $E = mc^2$. In laboratorio si osserva comunemente anche il processo inverso: la radiazione elettromagnetica, sotto certe condizioni, può trasformarsi in particelle materiali, come gli elettroni (vedi par. 27-6 sulla produzione di coppie elettrone-positrone).

Massa ed energia intercambiabili

Su più larga scala, l'energia prodotta nelle centrali nucleari è il risultato della perdita di massa del combustibile di uranio, quando subisce un processo detto di fissione nucleare (cap. 31). Anche l'irraggiamento che riceviamo dal Sole è un esempio di fenomeno che segue la legge $E = mc^2$; la massa del Sole, man mano che emette energia elettromagnetica, si riduce continuamente.

Si ritiene oggigiorno che la relazione $E = mc^2$ si applichi a tutti i processi, sebbene le variazioni siano spesso troppo piccole per potere essere misurate. Più precisamente, quando l'energia di un sistema cambia di una quantità ΔE, la massa del sistema varia di una quantità Δm data da

$$\Delta E = (\Delta m)(c^2)\,. \tag{26-9}$$

In una reazione nucleare in cui viene rilasciata o richiesta un'energia E, le masse dei reagenti e dei prodotti finali saranno differenti di $\Delta m = \Delta E/c^2$. Anche riscaldando l'acqua su un fornello, la sua massa aumenta, sia pure di pochissimo.

ESEMPIO 26-8 **Energia cinetica del pione.** Un pione π^0, la cui massa a riposo m_0 vale $2.4 \cdot 10^{-28}$ kg, viaggia con velocità $v = 0.80c = 2.4 \cdot 10^8$ m/s. Che energia cinetica possiede? La si confronti con il valore classico.

APPROCCIO Il valore relativistico della sua energia cinetica è dato dall'equazione 26-6. Il valore classico è $K = \frac{1}{2}m_0v^2$.

SOLUZIONE L'energia cinetica del pione π^0 a velocità $v = 0.80c$ è (eq. 26-6a)

PER RISOLVERE I PROBLEMI

K relativistica

$$\begin{aligned} K &= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right) \\ &= (2.40 \cdot 10^{-28}\ \text{kg})(3.0 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2\left(\frac{1}{(1 - 0.64)^{\frac{1}{2}}} - 1\right) \\ &= 1.4 \cdot 10^{-11}\ \text{J}\,. \end{aligned}$$

 ISBN 88-8-1336-5

Si osservi che l'unità di misura di mc^2 è il $kg \cdot m^2/s^2$, che equivale a 1 joule. Il calcolo classico darebbe

$$K = \tfrac{1}{2}m_0v^2 = \tfrac{1}{2}(2.4 \cdot 10^{-28}\ \text{kg})(2.4 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = 6.9 \cdot 10^{-12}\ \text{J},$$

cioè circa la metà, ma è un risultato errato.

NOTA Non cercate di calcolare l'energia cinetica relativistica usando le equazioni classiche con la massa relativistica invece della massa a riposo (qui $m_{\text{rel}} = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 4.0 \cdot 10^{-28}$ kg). Darebbe come risultato $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(4.0 \cdot 10^{-28}\ \text{kg})(2.4 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = 1.2 \cdot 10^{-11}$ J che è errato.

ESEMPIO 26-9 **Energia ottenuta da un decadimento nucleare.** L'energia richiesta o prodotta nelle reazioni e nei decadimenti nucleari deriva dalla variazione di massa tra le particelle iniziali e finali. In un tipo di decadimento radioattivo (cap. 30) un atomo di uranio ($m = 232.03714$ u) decade in un atomo di torio ($m = 228.02873$ u) più un atomo di elio ($m = 4.00260$ u), dove le masse sono date in unità di massa atomica ($1\ \text{u} = 1.6605 \cdot 10^{-27}$ kg). Calcolate l'energia emessa in questo decadimento.

APPROCCIO La massa iniziale meno la massa finale totale dà la massa persa in unità atomiche (u); convertiamo il risultato in kg e moltiplichiamo per c^2 per trovare l'energia rilasciata, $\Delta E = \Delta mc^2$.

Energia prodotta in un processo nucleare

SOLUZIONE La massa iniziale è 232.03714 u e dopo il processo è $228.02873\ \text{u} + 4.00260\ \text{u} = 232.03133$ u; la perdita di massa è dunque di 0.00581 u ($\frac{\Delta m}{m} \approx 10^{-6}$), equivalente a $(0.00581\ \text{u})\ (1.66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}) = 9.64 \cdot 10^{-30}$ kg, convertita in energia. Da $\Delta E = \Delta mc^2$ abbiamo

$$\Delta E = (9.64 \cdot 10^{-30}\ \text{kg})(3.0 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = 8.68 \cdot 10^{-13}\ \text{J}.$$

Poiché $1\ \text{MeV} = 1.60 \cdot 10^{-13}$ J, l'energia liberata è di 5.4 MeV.

ESEMPIO 26-10 **Variazione di massa in una reazione chimica.** Quando due moli di idrogeno e una mole di ossigeno reagiscono per formare due moli di acqua, l'energia prodotta è 484 kJ. Di quanto diminuisce la massa in questa reazione?

APPROCCIO Usiamo il fondamentale concetto di Einstein dell'equivalenza fra massa ed energia, $E = mc^2$.

SOLUZIONE Usando l'equazione 26-9 abbiamo per la variazione di massa Δm:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{(-484 \cdot 10^3\ \text{J})}{(3.00 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2} = -5.38 \cdot 10^{-12}\ \text{kg}.$$

La massa iniziale del sistema è $0.002\ \text{kg} + 0.016\ \text{kg} = 0.018$ kg. Quindi la variazione di massa è relativamente molto piccola ($\frac{\Delta m}{m} \approx 10^{-9}$) e può normalmente essere trascurata. [La conservazione della massa è di solito un principio applicabile alle reazioni chimiche.]

Unità di misura: eV/c per p, eV/c^2 per m

Nel microcosmo degli atomi e dei nuclei è abitudine esprimere le energie in eV (elettronvolt) o suoi multipli come il MeV (10^6 eV). La quantità di moto può essere espressa (eq. 26-4) in unità eV/c (o MeV/c) e la massa può esprimersi (da $E = mc^2$) in unità eV/c^2 (o MeV/c^2). Si noti l'uso di c per mantenere corrette le unità di misura. Si dimostra facilmente che le masse a riposo dell'elettrone e del protone sono, rispettivamente, $0.511\ \text{MeV}/c^2$ e $938\ \text{MeV}/c^2$. Vedere anche la tavola all'interno della copertina.

ESEMPIO 26-11 **Un protone da 1-TeV.** L'acceleratore Tevatron al Fermilab nell'Illinois può accelerare i protoni fino all'energia cinetica di 1.0 TeV (10^{12} eV). Qual è la velocità di un tale protone?

APPROCCIO Risolviamo la formula dell'energia cinetica (eq. 26-6a) rispetto a v.

SOLUZIONE L'energia a riposo del protone è 938 MeV o $9.38 \cdot 10^8$ eV. In confronto con l'energia di 10^{12} eV, l'energia a riposo può essere trascurata e quindi semplifichiamo la 26-6a

$$K \approx \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} .$$

Risolviamo rispetto a v con i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} &= \frac{m_0 c^2}{K} ; \\
1 - \frac{v^2}{c^2} &= \left(\frac{m_0 c^2}{K}\right)^2 ; \\
\frac{v^2}{c^2} &= 1 - \left(\frac{m_0 c^2}{K}\right)^2 = 1 - \left(\frac{9.38 \cdot 10^8\ \text{eV}}{1.0 \cdot 10^{12}\ \text{eV}}\right)^2 ; \\
v &= \sqrt{1 - (9.38 \cdot 10^{-4})^2}\, c = 0.99999956c .
\end{aligned}$$

Quindi il protone sta viaggiando a una velocità quasi uguale a c .

A velocità moderate v, molto minori di c, la formula relativistica per K si riduce a quella classica, come possiamo mostrare usando lo sviluppo binomiale $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + n(n-1)x^2/2! + \dots$. Con $n = -\frac{1}{2}$, sviluppiamo la radice quadrata dell'equazione 26-6a

$$K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)$$

così che

$$\begin{aligned}
K &\approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots - 1\right) \\
&\approx \tfrac{1}{2} m_0 v^2 ,
\end{aligned}$$

dove i puntini nella prima espressione rappresentano termini molto piccoli che abbiamo trascurato dal momento che $v \ll c$. Sicché vediamo che a velocità modeste la forma relativistica dell'energia cinetica si riduce alla forma classica, $K = \frac{1}{2}mv^2$. Ciò attribuisce una validità più generale alla teoria della relatività in quanto capace di prevedere con precisione risultati sperimentali sia a basse sia ad alte velocità. In effetti anche le altre equazioni della relatività ristretta si riducono alle loro equivalenti classiche in caso di velocità ordinarie: la contrazione delle lunghezze, la dilatazione dei tempi e la modificazione delle espressioni della quantità di moto e dell'energia cinetica sono tutti effetti che scompaiono quando $v \ll c$ poiché $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1$.

Si può ricavare anche una relazione utile tra l'energia totale E di una particella e la sua quantità di moto p. La quantità di moto di una

 ISBN 88-8-1336-5

particella di massa a riposo m_0 e di velocità v è data dall'equazione 26-4:

Quantità di moto relativistica

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0 v\,.$$

L'energia totale è (eq. 26-7b)

$$E = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,.$$

Elevando al quadrato questa equazione (e aggiungendo il termine "$v^2 - v^2$", che è zero, ma ci servirà):

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{m_0^2 c^2 (v^2 - v^2 + c^2)}{1 - v^2/c^2} \\ &= p^2 c^2 + \frac{m_0^2 c^4 (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} \end{aligned}$$

cioè

Relazione tra energia e quantità di moto

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4\,, \qquad \textbf{(26-10)}$$

in cui si è assunto che non vi sia in gioco energia potenziale. In definitiva l'energia totale si può scrivere in termini di quantità di moto p, o in termini di energia cinetica (eq. 26-7a).

* Quando si usano le formule relativistiche?

Dal punto di vista pratico, non abbiamo molte occasioni nella vita di tutti i giorni di usare la matematica della relatività. Per esempio il fattore $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, che appare in molte formule relativistiche, ha il valore di 1.005 quando $v = 0.10c$. Così, per velocità anche pari a $0.10c = 3.0 \cdot 10^7$ m/s il fattore $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ nelle formule relativistiche introduce una correzione numerica di meno dell'1 %. Per velocità inferiori a $0.10c$, a meno che non vi siano scambi fra massa ed energia, usualmente non abbiamo bisogno di usare le più complicate formule relativistiche e possiamo usare le più semplici formule classiche.

Se avete una particella di massa a riposo m_0, potete fare un rapido calcolo per determinare se è necessario usare le formule relativistiche o se quelle classiche sono adeguate, basta che calcoliate il rapporto K/m_0c^2 in quanto (eq. 26-6b)

$$\frac{K}{m_0 c^2} = \gamma - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\,.$$

Se questo rapporto risulta essere inferiore di, diciamo, 0.01, allora γ è minore o uguale a 1.01 e le equazioni relativistiche correggeranno quelle classiche di circa l'1 %. Se non avete bisogno di una precisione migliore dell'1 %, vanno bene le formule classiche. Ma, se la vostra precisione è di 1 parte su 1000 (0.1 %), allora sarà necessario usare le formule relativistiche. Se la precisione che desiderate è solo del 10 %, avrete bisogno della relatività se (K/m_0c^2) è maggiore o uguale a 0.1.

ESERCIZIO E Volendo una precisione dell'1 %, un elettrone con $K = 100$ eV deve essere trattato relativisticamente? [*Suggerimento*: la massa a riposo di un elettrone è 0.511 MeV.]

ISBN 88-8-1336-5

26–10 Addizione relativistica delle velocità

Consideriamo un'astronave che si allontana dalla Terra con velocità v e supponiamo che lanci un razzo con velocità u' rispetto all'astronave stessa (fig. 26-10). Ci potremmo aspettare che la velocità u del razzo rispetto alla Terra sia $u = v + u'$, che in questo caso, dai valori dati in figura, sarebbe $u = 0.60c + 0.60c = 1.20c$. Tuttavia, come abbiamo visto nel paragrafo 26-8, nessun oggetto può avere velocità superiore a quella della luce in nessun sistema di riferimento. Infatti Einstein dimostrò che, data la differenza di lunghezze e tempi in sistemi di riferimento diversi, la vecchia formula di addizione delle velocità non è più valida e la formula corretta per il moto rettilineo è

ATTENZIONE

Le velocità relativistiche non si sommano semplicemente come nella meccanica classica ($v \ll c$)

Formula dell'addizione relativistica delle velocità ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralleli)

$$u = \frac{v + u'}{1 + vu'/c^2}. \qquad [\vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ paralleli fra loro}] \tag{26-11}$$

Se u' e v rappresentano velocità dirette in verso opposto, dobbiamo attribuire un segno meno a u' ottenendo $u = (v - u')/(1 - vu'/c^2)$.

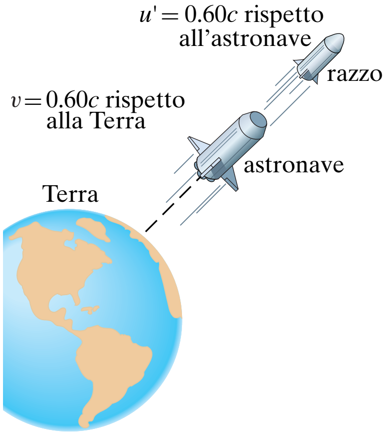


FIGURA 26-10 L'astronave spara il razzo a velocità $u' = 0.60c$. Qual è la velocità del razzo rispetto alla Terra?

ESEMPIO 26-12 **Velocità relativa, in termini relativistici.** Calcolate la velocità del razzo di figura 26-10 rispetto alla Terra.

APPROCCIO Aggiungiamo la velocità del razzo relativa all'astronave alla velocità dell'astronave rispetto alla Terra, usando la formula relativistica (eq. 26-11) perché le velocità sono alte e sono nella stessa direzione.

SOLUZIONE Il razzo si muove con velocità $u' = 0.60c$ rispetto all'astronave. Quest'ultima ha velocità $v = 0.60c$ rispetto alla Terra. La velocità del razzo rispetto alla Terra è quindi (eq. 26-11)

$$u = \frac{0.60c + 0.60c}{1 + \dfrac{(0.60c)(0.60c)}{c^2}} = \frac{1.20c}{1.36} = 0.88c.$$

NOTA La velocità del razzo rispetto alla Terra è risultata inferiore a c, come deve essere.

Si può notare che l'equazione 26-11 si riduce alla forma classica quando le velocità considerate sono piccole rispetto a quella della luce: infatti per v e $u \ll c$, si ha $1 + vu'/c^2 \approx 1$. Pertanto $u \approx v + u'$, come in fisica classica (cap. 3).

Proviamo a usare questa formula in un altro caso particolare, quando una velocità è pari a c. Si supponga che l'astronave di figura 26-10 emetta, anziché un razzo, un raggio di luce e quindi sia $u' = c$. Dall'equazione 26-11 ricaviamo che la velocità di questo raggio luminoso rispetto alla Terra è

$$u = \frac{0.60c + c}{1 + \dfrac{(0.60c)(c)}{c^2}} = \frac{1.60c}{1.60} = c,$$

risultato del tutto coerente col secondo postulato della relatività.

ESERCIZIO F Usate l'equazione 26-11 per calcolare la velocità del razzo rispetto alla Terra nella figura 26-10 assumendo che sia stato lanciato dall'astronave a una velocità $u' = 3000\ \text{km/s} = 0.010c$ e che l'astronave abbia una velocità $v = 6000\ \text{km/s} = 0.020c$.

 ISBN 88-8-1336-5

26–11 L'impatto della relatività ristretta

Per verificare le previsioni della teoria della relatività ristretta sono stati effettuati molti esperimenti. Entro gli errori sperimentali non è mai stata trovata alcuna contraddizione. Gli scienziati hanno quindi finito per accettare la relatività come un'accurata descrizione della natura.

Come abbiamo già visto, a velocità molto minori di quella della luce le formule relativistiche si riducono a quelle classiche. Noi speriamo – e anzi confidiamo – che ciò avvenga, dato che la meccanica newtoniana funziona perfettamente per gli oggetti animati da velocità $v \ll c$. Questo insistere sul requisito richiesto a una teoria più generale (come la relatività) di fornire gli stessi risultati che già fornisce con successo una teoria più limitata (quale la meccanica classica, valida per $v \ll c$) è detto **principio di corrispondenza**. Le due teorie devono coincidere laddove i loro domìni di validità si sovrappongono. In questo modo la relatività non contraddice la meccanica classica. Piuttosto è da considerarsi una teoria più ampia, della quale la meccanica classica è oggi ritenuta un caso limite.

Principio di corrispondenza

Non bisogna ridurre l'importanza della relatività all'aver dato semplicemente risultati più accurati, in special modo a velocità elevate. Merito ben più significativo è l'aver mutato la nostra concezione del mondo. I concetti di spazio e tempo sono ora considerati relativi e intimamente legati tra loro, mentre prima erano entità assolute e ben distinte. Anche i concetti di materia ed energia sono cambiati: esse si possono convertire l'una nell'altra. L'impatto della relatività si estende addirittura al di là della fisica; ha influenzato le altre scienze e persino il mondo dell'arte e della letteratura; è davvero penetrata nella nostra cultura generale.

All'atto pratico non abbiamo molte occasioni di servirci nella vita quotidiana delle equazioni relativistiche. Per esempio, il fattore relativistico γ, $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ che compare nelle formule, vale solo 1.005 anche a velocità così elevate come $0.10c = 3.0 \cdot 10^7$ m/s, fornendo una correzione nelle formule relativistiche inferiore all'1 %. A velocità più modeste, a meno che intervengano scambi tra massa ed energia, non abbiamo normalmente necessità di ricorrere alle equazioni relativistiche, che sono più complicate di quelle classiche; ci basta usare queste ultime.

La teoria della relatività ristretta che abbiamo studiato in questo capitolo tratta dei sistemi di riferimento inerziali (accelerazione nulla). Nel capitolo 33 discuteremo brevemente la più complessa teoria della «relatività generale», che affronta il problema dei sistemi di riferimento non inerziali.

Sommario

Dicesi **inerziale** un sistema di riferimento in cui vale la legge d'inerzia di Newton. I sistemi di riferimento inerziali possono muoversi a velocità costante relativamente l'uno all'altro: i sistemi di riferimento che accelerano sono **non inerziali**.

La **teoria della relatività ristretta** si basa su due princìpi: il **principio di relatività**, che sancisce la validità delle stesse leggi della fisica in tutti i sistemi di riferimento inerziali, e il principio di **costanza della velocità** della luce, secondo il quale la velocità della luce nel vuoto ha sempre lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Come conseguenza della teoria della relatività, due eventi che risultano simultanei in un sistema di riferimento possono non esserlo in un altro. Altri effetti sono la **dilatazione del tempo**: gli orologi in moto rallentano; la **contrazione della lunghezza**: la lunghezza di un corpo in moto diminuisce (nella direzione del moto) rispetto a quando è fermo. Quantitativamente:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \Delta t_0 \quad \textbf{(26–1)}$$

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{L_0}{\gamma} \quad \textbf{(26–3)}$$

ove L e Δt rappresentano la lunghezza e l'intervallo di tempo di corpi (o eventi) osservati mentre si muovono con velocità v; L_0 e Δt_0 sono la **lunghezza propria** e il **tempo proprio**, ovvero le medesime quantità misurate nel sistema di riferimento in cui i corpi (o gli eventi) sono a riposo. La grandezza γ è l'abbreviazione di

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \quad \textbf{(26-2)}$$

La teoria della relatività ha modificato le nostre nozioni di spazio e tempo, così come quelle di quantità di moto, massa ed energia. Spazio e tempo si possono considerare come intimamente connessi e il tempo può rappresentare una quarta coordinata in aggiunta alle tre dello spazio.

La **quantità di moto** di un oggetto è data da

$$p = \gamma m_0 v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \quad \textbf{(26-4)}$$

Questa formula può essere interpretata come un **aumento della massa**, dove la massa relativistica è

$$m_{\rm rel} = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \quad \textbf{(26-5)}$$

e m_0 **è la massa a riposo** dell'oggetto ($v = 0$).

La massa e l'energia si possono trasformare l'una nell'altra. L'equazione

$$E_0 = m_0 c^2 \quad \textbf{(26-8)}$$

consente di conoscere quanta energia E_0 è necessaria per ottenere una massa m_0, o viceversa. Possiamo anche dire che $E_0 = m_0 c^2$ è l'energia posseduta da un corpo in virtù della sua massa m_0. La legge di conservazione dell'energia deve comprendere la massa come forma di energia.

L'energia cinetica di un corpo animato da velocità v è data da

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2 \quad \textbf{(26-6)}$$

dove m_0 è la massa a riposo dell'oggetto. L'energia totale E, se non c'è energia potenziale, è

$$\begin{aligned} E &= K + m_0 c^2 \\ &= \gamma m_0 c^2 . \end{aligned} \quad \textbf{(26-7)}$$

La quantità di moto p di un oggetto è legata alla sua energia totale E (in assenza di energia potenziale) dalla equazione

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 . \quad \textbf{(26-10)}$$

Anche l'addizione delle velocità richiede un procedimento particolare. Tutti questi effetti relativistici sono rilevanti solo ad altissime velocità, prossime a quella della luce, che rappresenta un limite assoluto della velocità nell'Universo.

Quesiti

1. Siete in una carrozza senza finestrini di un treno straordinariamente silenzioso, confortevole e privo di scossoni. Esiste qualche esperimento di fisica con il quale potete stabilire se vi trovate in moto o fermi? Spiegate la vostra risposta.
2. Vi sarà forse capitato di essere fermi a un semaforo rosso, di percepire con la coda dell'occhio che l'auto a fianco avanza lentamente rispetto a voi e di premere istintivamente il pedale del freno, credendo di essere voi a indietreggiare. Cosa ci insegna questo episodio sui moti relativi e assoluti?
3. Un ferroviere sta in piedi sul tetto di un vagone in moto; lancia verticalmente verso l'alto (dal suo punto di vista) una pesante pallina. Se la resistenza dell'aria è trascurabile, la pallina atterrerà sul vagone o più indietro?
4. La Terra gira veramente intorno al Sole? O si può anche sostenere che il Sole ruota attorno alla Terra? Discutetene tenendo presente il principio di relatività. (Non esiste sistema di riferimento privilegiato.) Spiegate la vostra risposta.
5. Se vi trovate su un'astronave che si allontana da una stella alla velocità di $0.5c$, a che velocità vi sorpasserà la luce della stella?
6. L'effetto di dilatazione del tempo talvolta si riassume così: «Gli orologi in moto battono il tempo più lentamente». Questo effetto però non ha nulla a che vedere con possibili influenze sul meccanismo d'orologeria dovute al moto. Con che cosa ha a che fare allora?
7. Quando parliamo di dilatazione del tempo vogliamo dire che effettivamente il tempo scorre più lentamente nei riferimenti in moto oppure solo che così *appare*?
8. Una bella astronauta di aspetto giovanile è appena rientrata a casa dopo un lunghissimo viaggio. Corre incontro a salutare un vecchio incanutito e si rivolge a lui come a suo figlio. Come è possibile?
9. Mentre viaggiate allontanandovi dalla Terra alla velocità di $0.5c$, il vostro battito cardiaco subisce modificazioni? E la vostra massa, la vostra altezza, la vostra silhouette cambierebbero? Che cosa direbbero di voi degli astronomi sulla Terra che vi guardassero con un potente telescopio?
10. A una velocità ordinaria, diciamo 90 km/h, avvengono i fenomeni della dilatazione del tempo e della contrazione delle lunghezze?

 ISBN 88-8-1336-5

11. Supponete che la velocità della luce sia infinita. Che cosa comporterebbe riguardo ai fenomeni della dilatazione del tempo e della contrazione delle lunghezze?

12. Descrivete cosa succederebbe di diverso nella vita quotidiana se la velocità della luce fosse di soli 25 m/s.

13. Spiegate come si potrebbe arguire dalle formule di dilatazione del tempo e di contrazione della lunghezza che c è una velocità limite universale.

14. La vignetta all'inizio di questo capitolo mostra la strada come vista da Mr Tompkins, per cui la velocità della luce è 10 m/s. Come apparirà Mr. Tompkins alla gente che sta nella strada? (fig. 26-11). Spiegate la vostra risposta.

15. Un elettrone può solo viaggiare a una velocità inferiore a c. Ciò costituisce un limite alla sua quantità di moto? In caso affermativo che valore ha questo limite? In caso negativo, spiegate perché.

16. Può una particella di massa a riposo non nulla raggiungere la velocità della luce?

17. L'equazione $E = mc^2$ contrasta con il principio di conservazione dell'energia? Spiegate la vostra risposta.

18. Se la massa è una forma di energia, ciò significa che una molla ha massa maggiore quando è compressa?

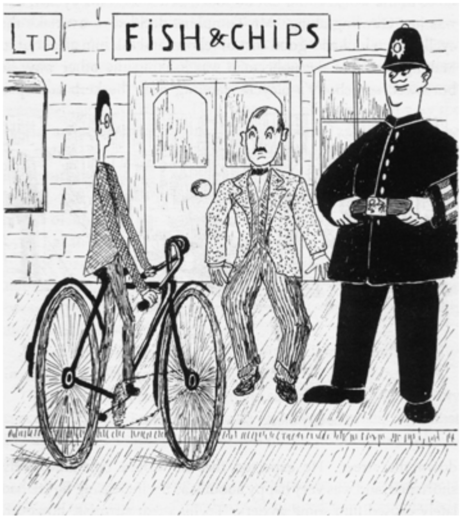


FIGURA 26-11 Quesito 14. Mr. Tompkins come è visto dalle persone sul marciapiede. Vedi anche la figura a inizio capitolo.

19. Non è corretto affermare che «la materia non si crea né si distrugge». Cosa dovremmo dire invece?

20. La nozione intuitiva secondo la quale le velocità si sommano semplicemente, come abbiamo fatto nel paragrafo 3-8, è completamente sbagliata?

Problemi

26-4 e 26-5 Dilatazione del tempo, contrazione delle lunghezze

1. (I) Un'astronave vi passa vicino alla velocità di $0.750c$. Misurando la sua lunghezza trovate il valore di 28.2 m. Quanto sarebbe lunga se fosse ferma?

2. (I) Un fascio di particelle elementari viaggia a una velocità di $2.70 \cdot 10^8$ m/s. A questa velocità si misura una vita media prima del decadimento pari a $4.76 \cdot 10^{-6}$ s. Quale sarebbe la vita media a riposo?

3. (I) Secondo la teoria della relatività (eq. 26-1 e 26-3) le lunghezze e gli intervalli di tempo dipendono dal fattore

$$\sqrt{1 - v^2/c^2}\,.$$

Calcolate questo fattore correttivo per i seguenti valori di velocità (a) 20 000 m/s (velocità tipica di un satellite), (b) $0.020c$, (c) $0.200c$, (d) $0.95c$, (e) $0.98c$, (f) $0.999c$.

4. (I) Se foste in viaggio verso una stella distante 125 anni-luce dalla Terra alla velocità di $2.50 \cdot 10^8$ m/s, quanto varrebbe per voi la misura di questa stessa distanza?

5. (II) Se per un pione misuriamo una vita media di $4.10 \cdot 10^{-8}$ s, qual è la sua velocità? La vita media del pione a riposo è di $2.60 \cdot 10^{-8}$ s.

6. In un sistema di riferimento terrestre, una stella è lontana 82 anni-luce. A che velocità dovreste viaggiare affinché per voi la distanza fosse soltanto 35 anni-luce?

7. (II) Supponete di dover compiere una missione verso una stella distante 85 anni-luce a una velocità tale che la distanza si riduce a 25 anni-luce. Quanti anni vi occorrerebbero per fare il viaggio?

8. (II) A quale velocità la lunghezza di un bastone di 1.00 m appare del 10.0 % più corta (90.0 cm)?

9. (II) La velocità di fuga dalla Terra è 40 000 km/h. Quanto diminuirebbe percentualmente in lunghezza una astronave di 95.2 m viaggiando a questa velocità?

10. (II) A che velocità le formule relativistiche danno un risultato che differisce dell'1.00 % dal risultato classico (a) per le lunghezze e (b) per gli intervalli di tempo? (Questo è un criterio ragionevole per decidere quando usare le formule relativistiche invece di quelle classiche.)

11. (II) Sul giornale leggete che la navicella Enterprise è appena rientrata da un viaggio durato 5 anni alla velocità di $0.84c$. (a) Se l'articolo si riferiva a 5.0 anni di *tempo terrestre*, quanto tempo è trascorso a bordo dell'astronave? (b) Se invece nella notizia si intendeva 5.0 anni di *tempo a bordo*, quanto tempo è passato sulla Terra?

12. (II) Una stella dista 10.6 anni-luce dalla Terra. In quanto tempo la raggiungerebbe un'astronave che viaggiasse alla velocità di $0.960c$ secondo un osservatore (*a*) sulla Terra e (*b*) sull'astronave? (*c*) Quant'è la distanza percorsa, misurata da un astronauta a bordo? (*d*) Che velocità calcolerebbero i piloti in base alle loro misurazioni (*b*) e (*c*)?

13. (II) Una vostra amica vi passa vicino sulla sua astronave alla velocità di $0.660c$. Le dimensioni del veicolo misurate da voi sono 4.80 m di lunghezza e 1.25 m di altezza. (*a*) Che dimensioni avrebbe l'astronave se fosse a riposo? (*b*) Se al vostro orologio passano 20.0 s, quanto tempo pensate che duri il medesimo intervallo misurato con l'orologio della vostra amica? (*c*) Che velocità avete voi secondo la vostra amica? (*d*) Se sul suo orologio vede passare 20.0 s, quanto tempo ritiene che sia passato secondo il vostro?

14. (III) A che velocità deve muoversi un pione per percorrere in media 15.0 m prima di decadere? La sua vita media a riposo è di $2.60 \cdot 10^{8}$ s.

26-7 Quantità di moto relativistica

15. (I) Che quantità di moto possiede un protone con velocità di $0.85c$?

16. (I) Che velocità deve acquisire un corpo perché la sua massa relativistica sia il doppio della sua massa a riposo?

17 (II) Una particella di massa a riposo m_0 viaggia alla velocità di $0.20c$. A quale velocità la sua quantità di moto sarà raddoppiata?

18. (II) (*a*) Una particella viaggia a $v = 0.10c$. Di quale percentuale sarà errato il calcolo della sua quantità di moto se si usa la formula classica? (*b*) Ripetete l'esercizio per $v = 0.50c$.

19. (II) Qual è la variazione percentuale della quantità di moto di un protone che accelera (*a*) da $0,45c$ a $0,90c$, (*b*) da $0.90c$ a $0.98c$?

26-9 $E = mc^2$

20. (I) Per fare avvenire una certa reazione chimica occorre fornire $4.82 \cdot 10^{4}$ J di energia. Qual è l'aumento di massa dei prodotti rispetto a quella dei reagenti?

21. (I) Quando in un reattore un nucleo di uranio a riposo si spezza per il processo chiamato di fissione nucleare, i frammenti che ne risultano hanno un'energia cinetica complessiva di 200 MeV. Quanta massa si è perduta nel processo?

22. (I) Calcolate l'energia a riposo di un elettrone in J e in MeV ($1\ \text{MeV} = 1.60 \cdot 10^{-13}$ J).

23. (I) Calcolate la massa a riposo del protone in MeV/c^2.

24. (I) Il consumo totale annuo di energia negli USA è di circa $8 \cdot 10^{19}$ J. Quanta massa dovremmo convertire in energia per soddisfare questa esigenza?

25. (II) Quanta energia si può ottenere dalla conversione di 1.0 g di massa? Questa energia, che massa sarebbe in grado di sollevare all'altezza di 250 m sopra la superficie terrestre?

26. (II) Qual è la velocità di una particella quando la sua energia cinetica uguaglia la sua energia a riposo?

27. II) A quale velocità l'energia cinetica di un oggetto sarà il 25 % della sua energia a riposo?

28. (II) (*a*) Quanta energia occorre per accelerare un protone da fermo fino alla velocità di $0.997c$? (*b*) Che quantità di moto avrà questo protone?

29. (II) Calcolate l'energia cinetica e la quantità di moto di un protone con velocità $2.60 \cdot 10^{8}$ m/s.

30. (II) Quant'è la quantità di moto di un protone da 750 MeV (cioè avente energia cinetica di 750 MeV)?

31. (II) Qual è la velocità di un protone accelerato da una differenza di potenziale di 105 MV?

32. (II) Che velocità ha un elettrone dotato di energia cinetica pari a 1.00 MeV?

33. (II) Che velocità ha un elettrone appena prima di colpire lo schermo di un televisore, dopo che è stato accelerato da fermo con una differenza di potenziale di 25 000 V nel tubo catodico?

34. (II) Due particelle identiche, di massa a riposo m_0 e animate entrambe da velocità di modulo v ma di verso opposto, si stanno avvicinando l'una all'altra. L'urto è totalmente anelastico e dà luogo alla formazione di un'unica particella a riposo. Quant'è la massa a riposo di questa nuova particella? Quanta energia si è persa nell'urto? Quanta energia cinetica si è persa nell'urto?

35. (II) Calcolate la velocità di un protone ($m_0 = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg) avente energia cinetica pari alla metà (*a*) della sua energia totale, (*b*) della sua energia di riposo.

36. (II) Quali sono la velocità e la quantità di moto di un elettrone ($m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg) avente energia cinetica pari alla sua energia a riposo?

37. (II) Immaginate un'astronave di massa a riposo 27.000 kg accelerata fino a $0.21c$. (*a*) Quanta energia cinetica possederebbe? (*b*) Se per calcolare quest'ultima vi serviste della formula classica, che errore percentuale commettereste?

38. (II) Calcolate l'energia cinetica e la quantità di moto di un protone ($m_0 = 167 \cdot 10^{-27}$ kg) con velocità pari a $7.35 \cdot 10^{7}$ m/s. Usando le formule classiche che errore percentuale si commetterebbe?

39. (II) Il nucleo di americio, $^{241}_{95}$Am, decade in un nucleo di nettunio, $^{237}_{93}$Np, emettendo una particella alfa di massa 4.00260 u e di energia cinetica 5.5 MeV. Stimate la massa del nucleo di nettunio, trascurando il fenomeno del rinculo, sapendo che la massa del nucleo di americio è 241.05682 u.

40. (II) Un elettrone ($m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg) viene accelerato da fermo alla velocità v da una forza conservativa. In questo processo la sua energia potenziale diminuisce di $6.60 \cdot 10^{-14}$ J. Determinate la velocità dell'elettrone.

41. (II) Riportate su un grafico l'andamento dell'energia cinetica in funzione della quantità di moto per

 ISBN 88-8-1336-5

una particella (*a*) di massa a riposo finita e (*b*) di massa a riposo nulla.

42. (II) Che intensità di campo magnetico occorre per mantenere su un'orbita circolare di raggio 1.0 km (come nel sincrotrone del Fermilab) dei protoni di energia 998 GeV? Considerate la massa relativistica. La massa a riposo del protone è 0.938 GeV/c^2 (1 GeV = 10^9 eV). [*Suggerimento*: in relatività è ancora vero che in un campo magnetico $mv^2/r = qvB$.]

26-10 Addizione relativistica di velocità

43. (I) Un osservatore a bordo di un razzo in moto a velocità $0.50c$ (rispetto alla Terra) vede un meteorite che, provenendo da dietro, lo sorpassa a una velocità che egli misura come $0.50c$. Che velocità ha il meteorite rispetto alla Terra?

44. (II) Due astronavi lasciano la Terra in verso opposto, ciascuna con velocità di $0.50c$ rispetto alla Terra. (*a*) Che velocità possiede l'astronave 1 rispetto alla 2? (*b*) E l'astronave 2 rispetto alla 1?

45. (II) Una navicella spaziale lascia la Terra viaggiando alla velocità di $0.71c$. Un modulo si stacca dall'astronave con velocità di $0.87c$ rispetto a quest' ultima. Calcolate la velocità del modulo rispetto alla Terra se viene lanciato (*a*) in verso concorde all'astronave e (*b*) in senso opposto, cioè verso la Terra.

46. (II) Un osservatore sulla Terra individua un'astronave di alieni in avvicinamento alla velocità di $0.60c$. L'Entreprise giunge in soccorso (fig. 26-12) e sorpassa l'intruso con velocità di $0.90c$ rispetto alla Terra e sempre in direzione di essa. Qual è la velocità relativa di un'astronave vista dall'altra?

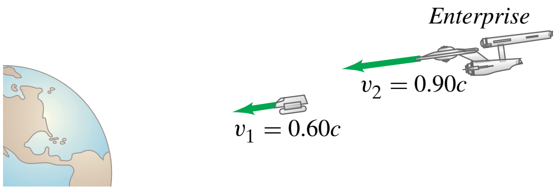


FIGURA 26-12 Problema 46.

47. (II) Una navicella spaziale in difficoltà espelle due gusci di salvataggio in due direzioni opposte. Uno viaggia a velocità $v_1 = -0.60c$ in una direzione e l'altro a velocità $v_2 = +0.70c$ nella direzione opposta rispetto alla navicella spaziale. A quale velocità il primo guscio vede viaggiare il secondo?

48. (II) Il razzo A passa vicino alla Terra con velocità $0.75c$; contemporaneamente il razzo B passa a velocità $0.95c$ rispetto a Terra nella stessa direzione. Con che velocità si muove B rispetto ad A quando lo sorpassa?

Problemi generali

49. La stella più vicina a noi è Proxima Centauri, distante 4.3 anni-luce. (*a*) A che velocità dovrebbe viaggiare un'astronave per raggiungerla in 4.0 anni, misurati dagli astronauti? (*b*) Quanto dura il viaggio secondo gli osservatori sulla Terra?

50. Come regola pratica, i corpi in moto a velocità superiore a circa $0.1c$ si considerano relativistici, tali cioè da rendere significativa la correzione ottenuta con le formule della relatività ristretta. Determinate la velocità di un elettrone nell'atomo d'idrogeno (raggio $0.5 \cdot 10^{-10}$ m) e stabilite se è relativistico. (Trattate l'elettrone come fosse su un'orbita circolare attorno al nucleo.)

51. (*a*) Qual è la velocità v di un elettrone la cui energia cinetica è 14 000 volte la sua energia a riposo? Calcolate quanto vale la differenza $c - v$. Tali velocità vengono raggiunte allo Stanford Linear Accelerator, SLAC. (*b*) Se gli elettroni in laboratorio viaggiano attraverso un tubo lungo 3.0 km (come allo SLAC), quanto è lungo questo tubo nel sistema di riferimento degli elettroni? [*Suggerimento*: usate lo sviluppo binominale.]

52. Per mantenere accesa una lampadina da 100 W per un anno, quanti grammi di materia bisognerebbe distruggere completamente?

53. Quanta energia elettromagnetica occorre, come minimo, per generare una coppia elettrone-positrone? Il positrone è una particella avente la stessa massa dell'elettrone e carica uguale ma opposta. (Si noti che in questo processo la carica elettrica si conserva. Vedi par. 27-6.)

54. Un elettrone ($m = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg) entra in un campo magnetico uniforme $B = 1.8$ T in direzione perpendicolare alle linee di campo con velocità $v = 0.92c$. Qual è il raggio di curvatura della sua traiettoria? Guardate il suggerimento al problema 42.

55. Un muone negativo che viaggia al 33% della velocità della luce urta frontalmente un muone positivo che viaggia al 50% della velocità della luce. I due muoni (ognuno di massa a riposo 105.7 MeV/c^2) si annichilano: quanta energia elettromagnetica si produce?

56. Un neutrone libero può decadere dando origine a un elettrone, un protone e un neutrino. Assumete che la massa a riposo del neutrino sia nulla; gli altri valori di massa si trovano nella tavola all'interno della copertina del testo. Determinate l'energia cinetica totale distribuita fra le tre particelle quando il neutrone decade a riposo.

57. La potenza irradiata dal Sole è di circa $4 \cdot 10^{26}$ W. (*a*) A che ritmo decresce la massa solare? (*b*) Quanto tempo impiega il Sole a perdere una massa pari a quella della Terra? (*c*) Stimate quanto può durare il Sole irraggiando sempre allo stesso modo.

58. Si è trovato che una particella sconosciuta ha carica negativa e velocità di $2.24 \cdot 10^8$ m/s. La sua quantità di moto misurata è di $3.07 \cdot 10^{-22}$ kg · m/s. Identificate la particella determinando la sua massa a riposo.

59. Quanta energia è necessaria per separare un nucleo di elio nei suoi componenti, due protoni e due neutroni? Le masse a riposo di un protone (compreso un elettrone), di un neutrone e del nucleo di elio sono, rispettivamente, 1.00783 u, 1.00867 u e 4.00260 u (la differenza di energia è chiamata energia totale di legame del nucleo di elio $^4_2$He).

60. Un'auto viaggia a 110 km/h; di quale percentuale aumenta la sua massa (relativistica) rispetto al valore a riposo? [*Suggerimento*: usate uno sviluppo binomiale.]

61. Due protoni, entrambi dotati di velocità pari a $0.935c$ nel riferimento del laboratorio, sono in rotta di collisione frontale. Determinate (*a*) la quantità di moto di ciascun protone nel sistema del laboratorio, (*b*) la quantità di moto totale dei due protoni sempre nel sistema del laboratorio e (*c*) la quantità di moto di un protone misurata nel sistema di riferimento dell'altro.

62. Dimostrate analiticamente che un punto materiale con quantità di moto p ed energia E ha velocità data da

$$v = \frac{pc^2}{E} = \frac{pc}{\sqrt{m_0^2c^2 + p^2}}.$$

63. L'astronave fantascientifica Enterprise ricava la sua potenza dalla combinazione di materia e antimateria, ottenendo la totale conversione della massa in energia. Se la massa dell'Enterprise è approssimativamente $5 \cdot 10^9$ kg, quanta massa deve essere convertita in energia cinetica per accelerarla da ferma a un decimo della velocità della luce?

64. Un elettrone viene accelerato così che la sua energia cinetica sia maggiore di quella a riposo m_0c^2 di un fattore (*a*) 5.00, (*b*) 999. Qual è la velocità dell'elettrone in ognuno dei due casi?

65. Un ragazzo di campagna che studia fisica è convinto di poter fare in modo che un palo lungo 15.0 m sia contenuto in un granaio lungo 12.0 m: basta correre col palo in spalla a velocità opportuna. È possibile? Si discuta in dettaglio. Come si concilia questa convinzione con la nozione per cui mentre egli corre, il granaio gli appare ancora più corto di 12.0 m?

66. Quando due moli di idrogeno e una di ossigeno reagiscono per formare una mole di acqua, l'energia prodotta è 484 kJ. Di quanto diminuisce la massa degli elementi nella reazione? Questa variazione quale percentuale della massa totale originaria del sistema rappresenta?

67. In una reazione nucleare vengono create due identiche particelle che viaggiano in direzioni opposte. Se la velocità di ogni particella è $0.75c$ rispetto al sistema di riferimento del laboratorio, qual è la velocità di una particella rispetto all'altra?

68. Un astronauta su una navicella che viaggia a $0.75c$ rispetto alla Terra misura la lunghezza della sua navicella pari a 25 m. Sulla navicella egli consuma il suo pasto in 23 minuti. (*a*) Qual è la lunghezza della navicella secondo gli osservatori sulla Terra? (*b*) Quanto dura il suo pasto secondo gli osservatori sulla Terra?

69. State viaggiando su una astronave che si allontana dalla Terra alla velocità di $0.85c$. Inviate verso la Terra un raggio laser che viaggia a velocità c rispetto a voi. Quanto vale la misura della velocità del raggio laser effettuata dagli osservatori sulla Terra?

70. Una astronave e i suoi occupanti hanno una massa totale di 150 000 kg. Gli occupanti vorrebbero andare su una stella che dista 25 anni-luce a una velocità di $0.60c$. Per accelerare, il motore dell'astronave converte direttamente massa in energia. Quanta massa sarà convertita in energia per accelerare l'astronave fino a quella velocità? Assumete che l'accelerazione sia rapida, così che la velocità per l'intero viaggio si possa considerare di $0.60c$ e ignorate nel calcolo la diminuzione della massa totale. Quanto durerà il viaggio secondo gli astronauti a bordo?

71. Supponete che una astronave di 12 500 kg lasci la Terra alla velocità di $0.99c$. Qual è l'energia cinetica dell'astronave? Confrontatela con il consumo totale annuo di energia degli U.S.A. (circa 10^{20} J).

72. Un'astronave di 42 000 kg sta viaggiando nelle vicinanze di una stella a 6.0 anni-luce dalla Terra. I passeggeri desiderano che il viaggio (sola andata) duri non più di 1 anno. Quanto lavoro deve essere compiuto per portare l'astronave alla velocità necessaria per questo viaggio?

73. Una massa di 1.68 kg oscilla appesa a una molla di costante $k = 48.7$ N/m. Se questo sistema si trova su una navicella che passa vicino alla Terra con velocità di $0.900c$, qual è il suo periodo di oscillazione secondo un osservatore (*a*) a bordo e (*b*) a Terra?

74. Un mesone pi di massa a riposo m_π decade da fermo in un muone (massa a riposo m_μ) e in un neutrino di massa a riposo trascurabile o nulla. Dimostrate che l'energia cinetica del muone è $K_\mu = (m_\pi - m_\mu)^2c^2/2m_\pi$.

Risposte agli esercizi

A: Sì.
B: (*a*) 2.21 μs ; (*b*) 5.0 μs.
C: (*a*) No; (*b*) sì.
D: 0,36c
E: No.
F: $0.030c$, cioè lo stesso valore del caso classico entro una precisione maggiore dello 0.1 %.