LA RELATIVITÀ RISTRETTA

Annotazioni

- **Sistemi di riferimento inerziali**

  Un sistema di riferimento si dice inerziale se in esso vale il primo principio della dinamica, ovvero se un punto materiale soggetto a forze la cui risultante è nulla rimane in quiete (se è in quiete) o si muove di moto rettilineo uniforme (se è in movimento).

  Dato un sistema inerziale, sono inerziali tutti e soli i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso.

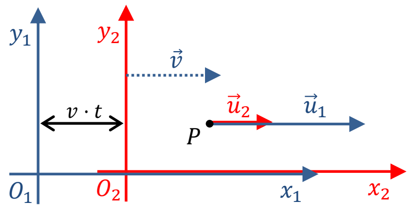
  Nota Bene

  - Non sono inerziali sistemi di riferimento in moto accelerato o in rotazione rispetto ad un sistema inerziale. In essi non vale il primo principio della dinamica (si assiste alla comparsa delle cosiddette «forze apparenti»).

- **Trasformazioni di Galileo**

  Si considerino due sistemi di riferimento inerziali O_1 e O_2, orientati in modo che gli assi x siano paralleli e tali che al tempo $t = 0$ le origini coincidano. Si consideri anche un punto P che si muove in direzione parallela agli assi x. Siano:

  - v la velocità di O_2 rispetto ad O_1;
  - (x_1, y_1, z_1) le coordinate di P rispetto a O_1;
  - (x_2, y_2, z_2) le coordinate di P rispetto a O_2;
  - u_1 la velocità di P rispetto ad O_1;
  - u_2 la velocità di P rispetto ad O_2.



  Allora valgono le seguenti relazioni:

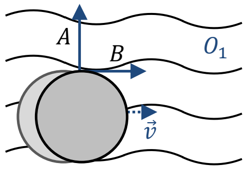
$$\begin{cases} x_2 = x_1 - v \cdot t \\ y_2 = y_1 \\ z_2 = z_1 \end{cases} \qquad\qquad u_2 = u_1 - v$$

  Nota Bene

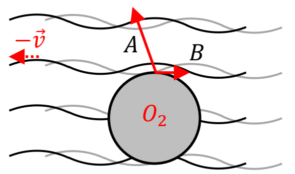
  - Alla fine del XIX secolo si pensava che la onde elettromagnetiche si propagassero nell'etere, un mezzo elastico che permeerebbe tutto l'universo. Secondo questa teoria la luce si propagherebbe a velocità $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ (valore che discende dalle equazioni di Maxwell) rispetto al sistema di riferimento dell'etere. Secondo sistemi di riferimento in movimento rispetto all'etere (ad es. la Terra) la luce avrebbe dovuto quindi avere velocità maggiore o minore di c, in accordo con le trasformazioni di Galileo.

- **Esperimento di Michelson-Morley**

  L'esperimento (1883-1887) aveva l'obiettivo di studiare il moto della Terra rispetto all'etere, attraverso la misurazione delle velocità di due fasci di luce in moto lungo direzioni diverse. Infatti i due fasci, propagandosi nell'etere, *avrebbero dovuto* presentare velocità diverse rispetto ad un osservatore sulla Terra a seconda che il moto di questa avvenisse nello stesso senso o in senso opposto rispetto alla direzione di propagazione del fascio.

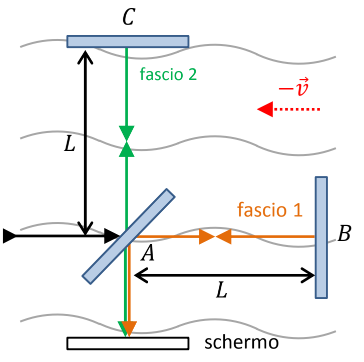


Sist. di rif. dell'etere:
la Terra *si sposterebbe* in esso con velocità v,
i raggi di luce *si propagherebbero* a velocità c.



Sist. di rif. della Terra:
l'etere *la attraverserebbe* con velocità $-v$,
i raggi di luce *avrebbero* velocità diverse da c.

Interferometro. Una sorgente di luce monocromatica emette un raggio che incide su uno specchio semi-riflettente, e viene diviso in due fasci. Dopo aver percorso una uguale distanza L, i due fasci vengono riflessi da due specchi, e dopo essere ritornati sullo specchio semi-riflettente raggiungono uno schermo. Osservando le figure di interferenza sullo schermo si può capire se i fasci di luce hanno percorso i cammini in tempi uguali (al centro dello schermo c'è interferenza costruttiva) o con in tempi diversi (interferenza distruttiva).



Cosa si aspettavano Michelson e Morley. Dal momento che i due fasci *dovrebbero avere* velocità diverse rispetto alla Terra (e quindi rispetto all'interferometro), i tempi di percorrenza dei cammini *dovrebbero essere* diversi e quindi si *dovrebbe osservare* interferenza distruttiva sullo schermo.

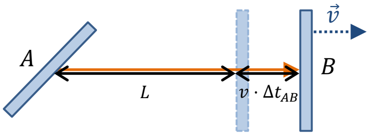
Dimostrazione

Dimostriamo che i due fasci dovrebbero percorrere i cammini in tempi diversi. Osserviamo l'esperimento nel sistema di riferimento dell'etere, in cui l'interferometro si sposta verso destra con una certa velocità v e i fasci si muovono con velocità c.

FASCIO 1

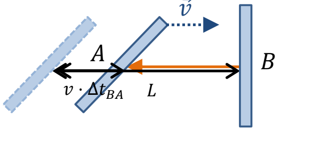
A -> B Mentre il fascio si sposta verso B (muovendosi a velocità c nell'etere), lo schermo in B si allontana con velocità v.

$$\Delta t_{AB} = \frac{L + v \cdot \Delta t_{AB}}{c} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{AB} = \frac{L}{c - v}$$



B -> A Mentre il fascio si sposta verso A (muovendosi a velocità c nell'etere), lo schermo in A si avvicina con velocità v.

$$\Delta t_{BA} = \frac{L - v \cdot \Delta t_{BA}}{c} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{BA} = \frac{L}{c + v}$$



Tempo totale di percorrenza: $\Delta t_1 = \Delta t_{AB} + \Delta t_{BA} = \dfrac{2Lc}{c^2 - v^2}$

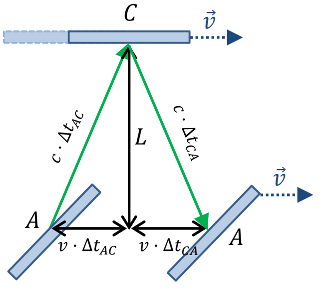
FASCIO 2

A -> C -> A Mentre il fascio si sposta verso C (muovendosi a velocità c nell'etere), lo schermo in C si sposta verso destra con velocità v. Analogamente quando torna verso A.

$$(c \cdot \Delta t_{AC})^2 = (v \cdot \Delta t_{AC})^2 + L^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{AC} = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$(c \cdot \Delta t_{CA})^2 = (v \cdot \Delta t_{CA})^2 + L^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{CA} = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Tempo totale di percorrenza: $\Delta t_2 = \Delta t_{AC} + \Delta t_{CA} = \dfrac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$



Esito dell'esperimento. In realtà si osservò che al centro dello schermo c'era interferenza costruttiva. L'esperimento venne ripetuto ruotando l'interferometro e in diversi periodi dell'anno (in modo da variare la velocità v della Terra rispetto all'etere, da cui dipende la variazione dei tempi di percorrenza), ma l'esito fu sempre lo stesso: la figura di interferenza non cambiava, gli effetti dovuti alla presenza dell'etere non comparivano. Era allora l'assunto su cui si basava l'esperimento (la teoria dell'etere) ad essere errato.

- **I postulati della relatività ristretta**

  La teoria della relatività ristretta (Einstein, 1905) si fonda su due postulati:

  1) <u>Principio di relatività</u>. Le leggi fisiche sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
  2) <u>Principio di invarianza della velocità della luce</u>. La velocità della luce nel vuoto, misurata in qualsiasi sistema di riferimento, ha sempre lo stesso valore c, indipendentemente dalla velocità relativa tra la sorgente di luce e l'osservatore.

  Nota Bene

  - Il primo principio afferma che nei sistemi inerziali non è valido solo il primo principio della dinamica, ma anche tutte le altre leggi fisiche (in particolare quelle di Maxwell dell'elettromagnetismo). Di conseguenza, non esistono esperimenti in grado di distinguere un sistema inerziale «fermo» da uno «in movimento» a velocità costante. Tutti i sistemi di riferimento inerziali sono dunque equivalenti e indistinguibili.
  - Il secondo principio implica che la velocità della luce non si compone quando si passa da un sistema di riferimento ad un altro, e in particolare non c'è un sistema di riferimento privilegiato (come l'etere) rispetto al quale la luce ha velocità c. Ciò sembra essere confermato dall'esperimento di Michelson e Morley.

- **La simultaneità degli eventi**

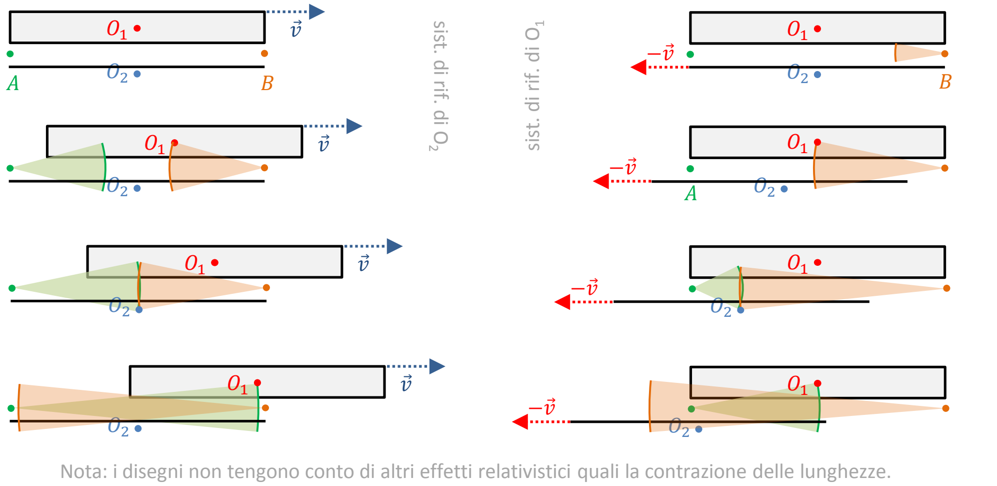
  Un osservatore, posto ad uguale distanza da due eventi A e B, li percepisce come simultanei se i fasci di luce che provengono da A e B lo raggiungono nello stesso istante di tempo. Nella teoria della relatività il concetto di simultaneità perde la sua assolutezza: due eventi che appaiono simultanei in un certo sistema inerziale non lo sono per un sistema inerziale in moto rispetto al primo.

  Dimostrazione

  Si consideri un treno in moto a velocità v verso destra rispetto alla banchina della stazione. Al centro del treno è posto un osservatore O_1 (il cui sistema di riferimento è quindi quello del treno), e al centro della banchina è posto un osservatore O_2 (il cui sistema di riferimento è quindi quello della banchina). Due luci si accendono ai capi del treno: evento A (retro) e evento B (fronte). Supponiamo (per ipotesi) che i due flash raggiungano l'osservatore O_2 allo stesso istante. Di conseguenza, l'osservatore O_1 verrà raggiunto prima dal flash partito da B (vedi entrambe le figure).

  - L'osservatore O_2 sa che la velocità dei due flash è uguale (è pari a c) e che hanno percorso la stessa distanza per raggiungerlo. Dal momento che lo hanno raggiunto nello stesso istante, può dedurre che i due eventi A e B sono stati simultanei.

  - L'osservatore O_1 sa che la velocità dei due flash è uguale (è pari a c) e che hanno percorso la stessa distanza per raggiungerlo. Dal momento che lo hanno raggiunto in istanti diversi (prima la luce di B e poi quella di A), non può fare a meno che dedurre che i due eventi A e B non sono stati simultanei (secondo i suoi calcoli, B dev'essere avvenuto prima di A).



Nota: i disegni non tengono conto di altri effetti relativistici quali la contrazione delle lunghezze.

Nota Bene

- Si noti che l'osservatore O_1 vede O_2 colpito allo stesso tempo dai due flash, e l'osservatore O_2 vede O_1 colpito prima dal flash di B e poi da quello di A.
- Nell'esperimento descritto non esiste un osservatore «privilegiato».
  - Non si può dire che un sistema di riferimento sia in moto e l'altro sia fermo: il movimento è relativo.
  - Il fatto che le sorgenti dei flash siano solidali ad un sistema di riferimento piuttosto che all'altro non cambia nulla: una volta lanciati i flash non importa come si spostino le sorgenti.
  - I flash (o fronti dell'onda elettromagnetica) non si propagano in un sistema di riferimento particolare (come sarebbe secondo la teoria dell'etere): la loro velocità è c rispetto ad ogni sistema di riferimento.
  - Il fatto che gli eventi appaiano simultanei all'osservatore O_2 dipende solo dalla scelta dell'ipotesi che è stata fatta. Si potrebbe riformulare l'esperimento supponendo che l'osservatore O_1 venga raggiunto contemporaneamente dai flash (e quindi possa dedurre la simultaneità degli eventi): in tal caso, O_2 supporrebbe che A sia avvenuto prima di B.
- Gli eventi di cui ci si interroga circa la simultaneità non sono l'arrivo dei flash all'osservatore, ma l'accensione delle luci in A e in B. Per inciso, un osservatore che si trovi a distanza L_A da un evento A e L_B da un evento B (con $L_A < L_B$) dedurrebbe comunque la simultaneità degli eventi proprio nel caso in cui venisse raggiunto prima dal flash di A e dopo da quello di B (in altre parole, la simultaneità dell'arrivo dei flash è equivalente alla simultaneità dell'accensione delle luci in A e B solo se l'osservatore è equidistante da A e B, come nell'esperimento descritto).
- Il ragionamento si basa sul fatto che entrambi gli osservatori, pur essendo in moto relativo, vedono la luce muoversi a velocità c. Se l'esperimento fosse ripetuto con delle palline o con onde sonore al posto della luce, entrambi gli osservatori dedurrebbero che gli eventi sono stati simultanei. Supponiamo infatti che le due palline vengano lanciate sulla banchina (ma un ragionamento analogo vale se fossero lanciate dentro al treno) con velocità u rispetto ad essa, e che raggiungano l'osservatore O_2 allo stesso istante (di conseguenza l'osservatore O_1 verrà raggiunto prima dalla pallina partita da B, perché egli si sta spostando verso B).

  - L'osservatore O_2 sa che la velocità delle palline è uguale (sono state lanciate dalla banchina con uguale velocità u) e che hanno percorso la stessa distanza per raggiungerlo. Dal momento che lo hanno raggiunto nello stesso istante, può dedurre che i due eventi A e B sono stati simultanei.

  - L'osservatore O_1 sa che la velocità delle palline è *diversa* (perché si compone con quella del treno: la pallina A ha velocità $u - v$ mentre la pallina B ha velocità $u + v$) e che hanno percorso la stessa distanza per raggiungerlo. Dal momento che lo hanno raggiunto in istanti diversi (prima la pallina B e poi la A), facendo i calcoli può dedurre ugualmente che i due eventi A e B sono stati simultanei (penserebbe infatti che le palline sono state lanciate simultaneamente, ma che la pallina B lo ha raggiunto prima perché ha velocità maggiore).
- Se due eventi che accadono nello stesso luogo sono simultanei per un osservatore, allora lo sono per qualsiasi altro osservatore inerziale.
- L'ordine in cui avvengono due eventi A e B può essere anche invertito a seconda del sistema di riferimento da cui essi si osservano, ma ciò non è sempre vero: ad esempio, è impossibile trovare un sistema di riferimento in cui si inverta l'ordine di due eventi quando questi sono uno la causa dell'altro.

- **La dilatazione dei tempi**

Un intervallo di tempo tra due eventi misurato da un osservatore che si trova in un sistema di riferimento in cui i due eventi accadono nello stesso luogo si dice *proprio* e si indica con Δt_0, e l'osservatore si dice *a riposo* rispetto ai due eventi.

Nella teoria della relatività il concetto di misurazione del tempo perde la sua assolutezza: un intervallo di tempo Δt_1 tra due eventi misurato da un osservatore in movimento a velocità v rispetto all'osservatore a riposo è sempre più lungo dell'intervallo di tempo proprio Δt_0 tra i due eventi:

$$\Delta t_1 = \gamma \cdot \Delta t_0 \qquad \text{con} \ \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \geq 1$$

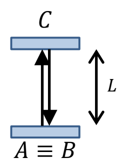
Dimostrazione

Si consideri un sistema di riferimento O_0 in moto a velocità costante v verso destra rispetto ad un sistema di riferimento inerziale O_1. Si consideri un «orologio a specchio» (che scandisce il tempo attraverso le riflessioni di un raggio di luce tra due specchi) solidale al sistema di riferimento O_0. Si vuole misurare l'intervallo di tempo che intercorre tra due riflessioni dell'orologio (eventi A e B).

OSSERVATORE O_0

L'osservatore O_0 è a riposo rispetto all'orologio (per lui gli eventi A e B avvengono nello stesso punto): misurerà quindi il tempo proprio tra i due eventi.

$$\Delta t_{AC} = \frac{L}{c} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta t_0 = \Delta t_{AB} = 2 \cdot \Delta t_{AC} = 2 \cdot \frac{L}{c}$$

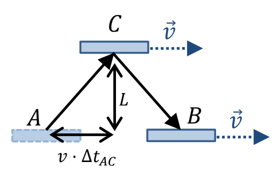


OSSERVATORE O_1

L'osservatore O_1 è in moto rispetto all'orologio (per lui gli eventi A e B avvengono in luoghi diversi, perché vede l'orologio spostarsi): misurerà quindi un tempo non proprio tra i due eventi.

$$\Delta t_{AC} = \frac{\sqrt{(v \cdot \Delta t_{AC})^2 + L^2}}{c} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta t_{AC} = \frac{L}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

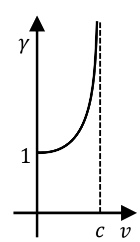
$$\Longrightarrow \qquad \Delta t_1 = 2 \cdot \frac{L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



Dai due risultati ottenuti si può dedurre la tesi.

Nota Bene

- Se $v = 0{,}1\,c$ si ha $\gamma = 1{,}005$ quindi Δt_1 è dello 0,5% maggiore di Δt_0,
  se $v = 0{,}3\,c$ si ha $\gamma = 1{,}048$ quindi Δt_1 è del 4,8% maggiore di Δt_0,
  se $v = 0{,}5\,c$ si ha $\gamma = 1{,}155$ quindi Δt_1 è del 15% maggiore di Δt_0,
  se $v = 0{,}7\,c$ si ha $\gamma = 1{,}400$ quindi Δt_1 è del 40% maggiore di Δt_0,
  se $v = 0{,}9\,c$ si ha $\gamma = 2{,}294$ quindi Δt_1 è del 129% maggiore di Δt_0.
  se $v = 0{,}99\,c$ si ha $\gamma = 7{,}089$ quindi Δt_1 è del 709% maggiore di Δt_0.
  Gli effetti della dilatazione dei tempi diventano significanti se $v > 0{,}3\,c$.



- Una conferma sperimentale degli effetti della contrazione delle lunghezze si ha osservando il tempo di vita media dei muoni (una particella elementare). Tale tempo è pari a $\Delta t_0 = 2{,}2\,\mu s$ quando si trova a riposo rispetto al sistema di riferimento in cui viene effettuata la misurazione (dunque questo è il tempo proprio). Se però si accelera la particella fino a velocità $v = 0{,}9\,c$ rispetto agli strumenti di misurazione, si misura un tempo pari a $\Delta t_1 = 5\,s$ (nonostante ciò per il muone e per chiunque sia solidale al suo sistema di riferimento, il tempo di vita media rimane di $2{,}2\,\mu s$).
- L'osservatore O_1 (e chiunque sia in moto rispetto all'orologio) misura un intervallo di tempo più lungo rispetto a quello di O_0 (a riposo). Si può dire che O_0 è un osservatore «privilegiato». Tuttavia, si osservi che O_0 misura intervalli di tempo più lunghi rispetto a quelli di O_1 per tutti gli eventi solidali al sistema di riferimento di O_1.

- Spesso si dice che «gli orologi in moto rallentano» perché chi osserva un orologio in moto vede la lancetta dei secondi che si sposta più lentamente rispetto a come si sposterebbe se l'orologio fosse a riposo, visto che l'intervallo di tempo osservato è maggiore di un fattore γ rispetto al tempo proprio.
- Se un orologio si muovesse a velocità tendente a c, considerando che:

$$\lim_{v\to c} \gamma = \lim_{v\to c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = +\infty$$

  si osserverebbe la lancetta dei secondi rallentare sempre più fino a fermarsi.
- (Paradosso dei gemelli) Consideriamo due gemelli: uno di essi viaggia in astronave a velocità elevata, mentre l'altro rimane sulla Terra. In base alle osservazioni di quest'ultimo, il tempo sull'astronave scorre più lentamente e quindi il gemello sull'astronave invecchia di meno di lui. Però, in base alle osservazioni del gemello sull'astronave (che potrebbe dire che è il sistema di riferimento della Terra a muoversi rispetto a quello dell'astronave), il tempo sulla Terra scorre più lentamente e quindi il gemello sulla Terra invecchia di meno di lui. Quando il gemello astronauta torna sulla Terra chi dei due è invecchiato di meno, allora?

  Il paradosso si risolve osservando che la situazione descritta non è del tutto simmetrica. Infatti l'astronave non è sempre un sistema di riferimento inerziale: durante il decollo, l'inversione di rotta e l'atterraggio l'astronave accelera o decelera. Durante tali fasi non valgono le considerazioni del gemello astronauta (si esce dal campo della relatività speciale), mentre sono valide le considerazioni del gemello sulla Terra: il gemello che è invecchiato di meno è il gemello astronauta.

- **La contrazione delle lunghezze**

La lunghezza di un oggetto misurata da un osservatore che si trova in un sistema di riferimento solidale all'oggetto si dice *propria* e si indica con ΔL_0, e l'osservatore si dice *a riposo* rispetto all'oggetto.

Nella teoria della relatività il concetto di misurazione delle lunghezze perde la sua assolutezza: la lunghezza ΔL_1 di un oggetto misurata da un osservatore in movimento a velocità v rispetto all'osservatore a riposo è sempre più corta della lunghezza propria ΔL_0 dell'oggetto:

$$\Delta L_1 = \frac{\Delta L_0}{\gamma} \qquad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \geq 1$$

Dimostrazione

Si consideri un sistema di riferimento O_0 in moto a velocità costante v verso destra rispetto ad un sistema di riferimento inerziale O_1. Si supponga che l'oggetto da misurare sia solidale al sistema di riferimento O_0.

OSSERVATORE O_0