Equazioni differenziali

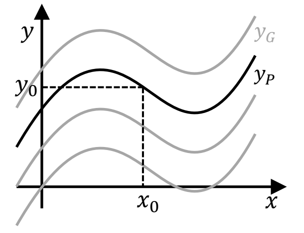
● Equazione differenziale

Un'equazione differenziale è un'equazione in cui l'incognita è una funzione y, e in cui compaiono una o più derivate della funzione incognita. L'ordine dell'equazione è l'ordine massimo di derivazione che vi compare.

$$f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Una funzione è soluzione dell'equazione differenziale in un intervallo I se è derivabile n volte in I e soddisfa l'equazione per ogni $x \in I$.

Un'equazione differenziale può avere infinite soluzioni, che spesso vengono rappresentate da una legge che dipende da uno o più parametri (integrale generale). Una particolare soluzione può essere ottenuta da essa imponendo una particolare condizione iniziale (integrale particolare).



● Problema di Cauchy

Il problema di Cauchy consiste nel trovare la soluzione di un'equazione differenziale di ordine n che soddisfi n condizioni iniziali:

$$\begin{cases} f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Si può dimostrare che, sotto opportune ipotesi, la soluzione di un problema di Cauchy è unica.

● Equazioni differenziali del primo ordine

<u>Equazioni immediate</u>

$$y' = a(x)$$

Per risolvere un'equazione immediata del primo ordine si integra una volta. L'integrale generale è:

$$y = A(x) + c$$

dove $A(x)$ è una qualunque primitiva di $a(x)$.

<u>Equazioni del primo ordine complete</u>

$$y' = a(x)\, y + b(x)$$

Si può dimostrare che l'integrale generale di un'equazione del primo ordine completa è espresso da:

$$y = e^{A(x)} \int e^{-A(x)}\, b(x)\, dx$$

dove $A(x)$ è una qualunque primitiva di $a(x)$.

<u>Equazioni a variabili separabili</u>

$$y' = a(x)\, b(y)$$

Per risolvere un'equazione a variabili separabili:

1) Si controlla se la funzione y che rende $b(y) = 0$ è soluzione dell'equazione.
2) Si suppone $b(y) \neq 0$ e:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)\, b(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b(y)} dy = a(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{b(y)} dy = \int a(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad \dots$$

- **Equazioni differenziali del primo ordine**

Equazioni immediate

$$y'' = a(x)$$

Per risolvere un'equazione immediata del secondo ordine si integra due volte. L'integrale generale è:

$$y'' = a(x) \quad \Longrightarrow \quad y' = A_1(x) + c_1 \quad \Longrightarrow \quad y = A_2(x) + c_1 x + c_2$$

dove $A_1(x)$ è una qualunque primitiva di $a(x)$, e $A_2(x)$ è una qualunque primitiva di $A_1(x)$.

Equazioni del secondo ordine omogenee

$$ay'' + b\,y' + cy = 0 \qquad\qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Per risolvere un'equazione immediata del secondo ordine si considera l'equazione caratteristica:

$$ar^2 + b\,r + c = 0$$

1) Se $\Delta > 0$, si può dimostrare che l'integrale generale è espresso da:

$$y = c_1 e^{r_1\,x} + c_2 e^{r_2\,x}$$

dove $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ sono le soluzioni dell'equazione caratteristica.

2) Se $\Delta = 0$, si può dimostrare che l'integrale generale è espresso da:

$$y = e^{r\,x}(c_1 + c_2 x)$$

dove $r \in \mathbb{R}$ è la soluzione (doppia) dell'equazione caratteristica.

3) Se $\Delta < 0$, si può dimostrare che l'integrale generale è espresso da:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$$

dove $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ sono le soluzioni (complesse) dell'equazione caratteristica.