La probabilità classica

• Spazio campionario

Si dice *spazio campionario* l'insieme S di tutti i possibili risultati di un esperimento.

Esempio:

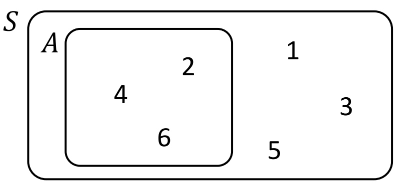
- *Lancio di una moneta* S = {T, C}
- *Nascita di un figlio* S = {M, F}
- *Lancio di un dado* S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- *Lancio di due dadi* S = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

• Evento

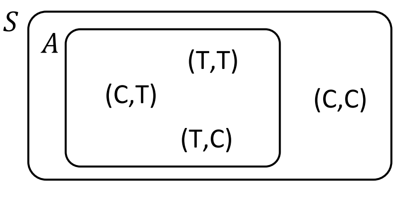
Si dice *evento* un sottoinsieme A dello spazio campionario.

Esempio:

- *Lancio di un dado* S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  A = {esce un numero pari} A = {2, 4, 6}

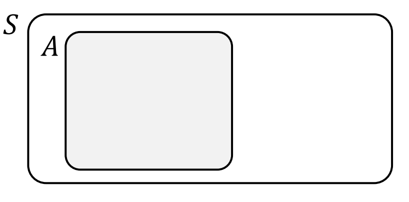


- *Lancio di due monete* S = {(T,T), (T,C)
(C,T), (C,C)}
  A = {esce almeno una T} A = {(T,T), (T,C), (C,T)}



• Probabilità di un evento

La *probabilità di un evento* è il rapporto tra il numero di risultati favorevoli all'evento e il numero di risultati possibili dell'esperimento, nell'ipotesi che siano tutti ugualmente possibili.



$$p(A) = \frac{\#A}{\#S}$$

La probabilità di un evento è un numero razionale tale che:

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

Se $p(A) = 0$, l'evento si dice *impossibile*.
Se $p(A) = 1$, l'evento si dice *certo*.

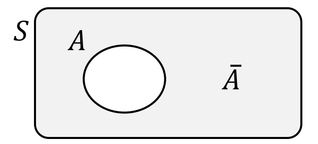
Esempio:

- *Lancio di un dado* S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\#S$ = 6
  A = {esce un numero pari} A = {2, 4, 6} $\#A$ = 3 ⇒ $p(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- *Somma di due dadi* S = {(1,1), (1,2), … (6,5), (6,6)} $\#S$ = 36
  A = {la somma è 5} A = {(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)} $\#A$ = 4 ⇒ $p(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

  Sarebbe errato considerare come spazio campionario i possibili esiti che si possono ottenere dalla somma del lancio di due dadi (S = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}) perché questi risultati non sono equiprobabili (ad es. il 6 esce più frequentemente del 2).

• Evento contrario

Dato un evento A, si dice *evento contrario* l'evento:



$$\bar{A} = \{\text{non si verifica A}\}$$

Esempio:

- *Lancio di un dado*

  A = {esce 1 o 2}
  $\bar{A}$ = {non esce né 1 né 2} = {esce 3, 4, 5 o 6}

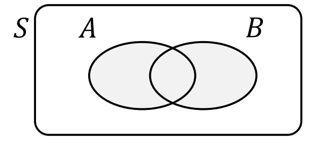
• Teorema dell'evento contrario

Dato un evento A, la probabilità dell'evento contrario è data da:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

• Evento unione

Dati due eventi A e B, si dice *evento unione* l'evento:



$$A \cup B = \{\text{si verifica A} \quad \mathbf{O} \quad \text{si verifica B}\}$$

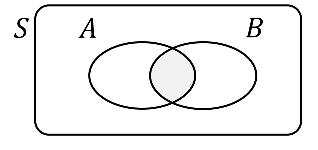
Esempio:

- *Lancio di un dado*

  A = {esce un numero pari} B = {esce un multiplo di 3}
  $A \cup B$ = {esce un numero pari O un multiplo di 3}

• Evento intersezione

Dati due eventi A e B, si dice *evento intersezione* l'evento:



$$A \cap B = \{\text{si verifica A} \quad \mathbf{E} \quad \text{si verifica B}\}$$

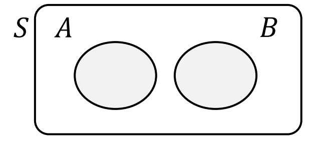
Esempio:

- *Lancio di un dado*

  A = {esce un numero pari} B = {esce un multiplo di 3}
  $A \cup B$ = {esce un numero pari E un multiplo di 3}

• Eventi incompatibili

Due eventi A e B si dicono *incompatibili* se non possono verificarsi simultaneamente, cioè se A e B sono disgiunti.



Esempio:

- *Lancio di due monete*

  A = {esce (T,T)} B = {esce (C,C)} sono incompatibili

- *Lancio di tre dadi*

  A = {ci sono due risultati uguali} B = {ci sono due risultati diversi} sono compatibili

• Teorema dell'evento unione

Dati due eventi A e B, la probabilità dell'evento unione $A \cup B$ è data da:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

In particolare, se i due eventi sono incompatibili:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

perché in tal caso $p(A \cap B) = 0$.

Eventi indipendenti

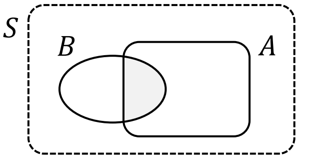
Un evento B si dice *indipendente* da un evento A se il verificarsi di A non influenza la probabilità con cui si verifica B.

Esempio:

- *Estrazione da un'urna con 5 palline bianche e 5 nere, con reimmissione*
  A = {esce una bianca} B = {esce una nera} sono indipendenti
- *Estrazione da un'urna con 5 palline bianche e 5 nere, senza reimmissione*
  A = {esce una bianca} B = {esce una nera} sono dipendenti

Probabilità condizionata

La probabilità che un evento A si realizzi, nell'ipotesi che l'evento B si sia realizzato, è data da:



$$p(B|A) = \frac{\#(A \cap B)}{\#A} = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Esempio:

- *Lancio di un dado*
  A = {esce un numero pari} $\#A$=3 B = {esce un multiplo di 3} $\#A \cap B$=1 $\Rightarrow$ $p(B|A) = \frac{1}{3}$

Teorema dell'evento intersezione

Dati due eventi A e B, la probabilità dell'evento intersezione $A \cap B$ è data da:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$$

In particolare, se i due eventi sono indipendenti:

$$p(A \cup B) = p(A) \cdot p(B)$$

perché in tal caso $p(B|A) = p(B)$.

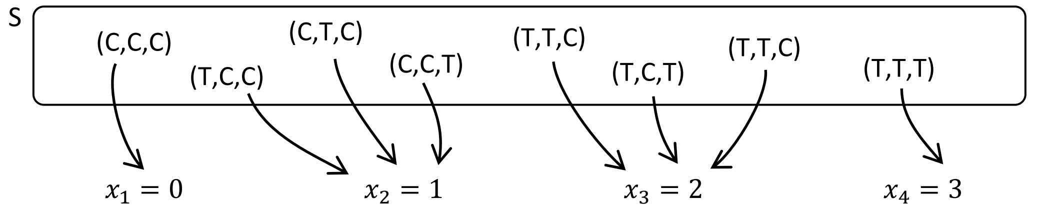
Distribuzioni di probabilità discrete

Variabile aleatoria

Si dice *variabile aleatoria* (o *variabile casuale*) una funzione $X: S \longrightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni possibile esito di un esperimento aleatorio un numero reale x_i.
La variabile aleatoria si dice *discreta* se assume un numero finito di valori.

Esempio:

- *Lancio di tre monete* X = numero di T uscite $x_1 = 0$ $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$



- *Lancio di un dado* X = esito del lancio $x_1 = 1$, $x_2 = 2, \dots$ $x_6 = 6$
- *Lancio di una moneta* X = 0 se esce C; 100 se esce T $x_1 = 0$, $x_2 = 100$
- *Test con 4 domande* X = numero di risposte giuste $x_1 = 0$, $x_2 = 1, \dots$ $x_5 = 4$
- *Lancio di due dadi* X = somma dei numeri usciti $x_1 = 2$, $x_2 = 3, \dots$ $x_{11} = 12$

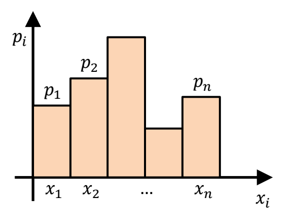
Distribuzione di probabilità

Sia X una variabile aleatoria che assume i valori $x_1, x_2, \dots x_n$ con probabilità rispettivamente $p_1, p_2, \dots p_n$.
Si dice *distribuzione di probabilità* (o *densità*) di X la funzione p che associa ogni x_i alla sua p_i.

$$p(X = x_i) = p_i$$

La distribuzione di probabilità si può rappresentare con una tabella o con un diagramma a barre.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

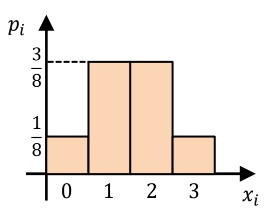


Poiché gli eventi $\{X = x_i\}$ costituiscono una partizione di S, si ha che $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Esempio:

- *Lancio di tre monete* X = numero di T uscite

x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$
$p(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8



Media

Sia X una variabile aleatoria che assume i valori $x_1, x_2, \dots x_n$ con probabilità rispettivamente $p_1, p_2, \dots p_n$.
Si dice *media* (o *valore atteso*) di X il numero:

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots x_n \cdot p_n$$

Si tratta di una media dei possibili valori assunti dalla variabile aleatoria, ovvero dei possibili esiti dell'esperimento, pesata in base alle probabilità che si verifichi ciascun esito.

Esempio:

- *Lancio di tre monete* X = numero di T uscite

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}5$$

- **Varianza**

Sia X una variabile aleatoria che assume i valori $x_1, x_2, \dots x_n$ con probabilità rispettivamente $p_1, p_2, \dots p_n$.
Si dice *varianza* di X il numero:

$$\sigma^2 = Var(X) = (x_1 - \mu) \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \cdots (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$$

La varianza misura lo scostamento della variabile aleatoria dal valor medio: è tanto più grande quanto più l'esperimento ammette esiti distanti dal valor medio. La varianza infatti è la media del quadrato degli scarti $(x_i - \mu)^2$ *- cioè delle distanze di ciascun esito dell'esperimento dal valor medio, elevate al quadrato in modo da ottenere valori sempre positivi che non si annullino reciprocamente - pesata in base alle probabilità che si verifichi ciascun esito.*
La varianza è sempre positiva o nulla; è nulla solo nel caso in cui la variabile aleatoria assuma un unico valore (che risulterebbe uguale quindi al valor medio).

Esempio:

- *Lancio di tre monete* X = numero di T uscite

$$\sigma^2 = (0 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{1}{8} + (1 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (2 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (3 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{1}{8} = 0{,}75$$

- **Deviazione standard**

Sia X una variabile aleatoria che assume i valori $x_1, x_2, \dots x_n$ con probabilità rispettivamente $p_1, p_2, \dots p_n$.
Si dice *deviazione standard* (o *scarto quadratico medio*) di X la radice quadrata della sua varianza σ^2:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Anche la deviazione standard misura lo scostamento della variabile aleatoria dal valor medio. A differenza della varianza, la sua unità di misura è la stessa della variabile aleatoria.

Esempio:

- *Lancio di tre monete* X = numero di T uscite

$$\sigma = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}866$$

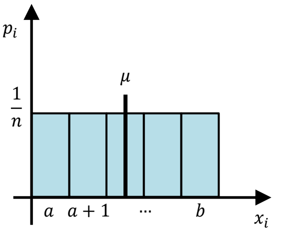
• Distribuzioni di probabilità discrete notevoli

Distribuzione uniforme

Una variabile aleatoria X si dice *uniforme* ($U(a,b)$) se assume come valori gli n numeri naturali compresi tra a e b con la stessa probabilità:

$$p(X=x)=\frac{1}{n} \qquad (n=b-a+1)$$

$$\mu=\frac{a+b}{2} \qquad \sigma^2=\frac{n^2-1}{12}$$



La distribuzione uniforme è utilizzata per calcolare la probabilità di eventi equiprobabili.

Esempi:

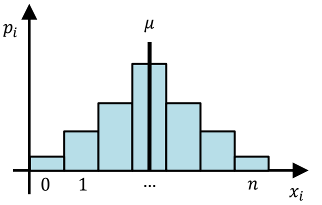
• *Lancio di un dado*	X = esito del lancio	a=1, b=6
• *Lancio di una moneta*	X = 0 se esce C; 1 se esce T	a=0, b=1
• *Estrazione di un numero al lotto*	X = numero estratto	a=1, b=90

Distribuzione binomiale

Una variabile aleatoria X si dice *binomiale di parametri n e p ($B(n,p)$)* se assume come valori i numeri naturali da 0 a n con probabilità:

$$p(X=x)=\binom{n}{x}\,p^x\,(1-p)^{n-x}$$

$$\mu=np \qquad \sigma^2=np(1-p)$$



Si consideri un esperimento che può avere due esiti: il successo con probabilità p, e l'insuccesso con probabilità $(1-p)$. La distribuzione binomiale è utilizzata per calcolare con che probabilità l'esperimento, ripetuto n volte, presenterà x successi.

Esempi:

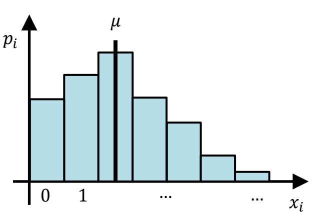
• *Lancio di n monete*	X = numero di teste	p=0,5
• *Test a risposta multipla (4 scelte)*	X = numero di risposte giuste	p=0,25
• *Macchinario*	X = numero di pezzi difettosi	
• *Estrazione con reimmissione da un'urna*	X = numero di biglie di un certo tipo estratte	

Distribuzione di Poisson

Una variabile aleatoria X si dice *di Poisson di parametro λ ($Po(\lambda)$)* se assume come valori i numeri naturali da 0 a $+\infty$ con probabilità:

$$p(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}\,e^{-\lambda}$$

$$\mu=\lambda \qquad \sigma^2=\lambda$$



Si consideri un evento che accade un numero medio λ di volte per unità di tempo. La distribuzione di Poisson è utilizzata per calcolare con che probabilità l'evento accade x volte nell'unità di tempo.
La distribuzione di Poisson è un'approssimazione di quella binomiale, quando n è grande e p è piccolo.

Esempi:

• *Arrivo dell'autobus*	X = numero di autobus in un'ora
• *Macchinario*	X = numero di pezzi difettosi
• *Radioattività*	X = numero di nuclei che decadono