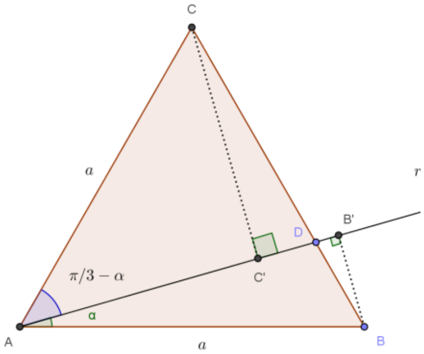
ORDINAMENTO 2013 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

ABC è un triangolo equilatero di lato a. Dal vertice A, e internamente al triangolo, si conduca una semiretta r che formi l'angolo α con il lato AB. Si denotino con B' e C' , rispettivamente, le proiezioni ortogonali su r dei vertici B e C.



1)

Si calcoli il rapporto:

$$\frac{BB'^2 + CC'^2}{a^2}$$

e lo si esprima in funzione di $x = tg\alpha$, controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3}{4(x^2+1)}$$

$BB' = AB \cdot sen\alpha = a \cdot sen\alpha \qquad CC' = ACB \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = a \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$

$$\frac{BB'^2 + CC'^2}{a^2} = \frac{(a \cdot sen\alpha\,)^2 + \left(a \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\right)^2}{a^2} = sen^2\alpha + sen^2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) =$$

$$= sen^2\alpha + \left(sen\frac{\pi}{3}cos\alpha - cos\frac{\pi}{3}sen\alpha\right)^2 = sen^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}cos\alpha - \frac{1}{2}sen\alpha\right)^2 =$$

$$= sen^2\alpha + \frac{3}{4}\cos^2\alpha + \frac{1}{4}sen^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}cos\alpha\ sen\alpha = \frac{5}{4}sen^2\alpha + \frac{3}{4}\cos^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4}sen\ 2\alpha =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 + tg^2\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha} = \frac{5\,tg^2\alpha + 3 - 2\sqrt{3}tg\alpha}{4(1 + tg^2\alpha)}$$

E ponendo $x = tg\alpha$ *(con* $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{3}$), si ottiene: $f(x) = \frac{5x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3}{4(x^2+1)}$.

2)

Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione f(x) e se ne tracci il grafico γ *.*

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{5x^2-2\sqrt{3}\,x+3}{4(x^2+1)}}$$

Dominio: $-\infty < x < +\infty$

Simmetrie notevoli:

$$f(-x)=\frac{5x^2+2\sqrt{3}\,x+3}{4(x^2+1)}\begin{cases}\neq f(x):\ non\ pari\\ \neq -f(x):\ non\ dispari\end{cases}$$

Intersezioni con gli assi cartesiani:

$$x=0,\qquad y=\frac{3}{4}\qquad\qquad y=0,\qquad 5x^2-2\sqrt{3}\,x+3=0\quad \Delta<0,\quad \nexists x$$

Segno della funzione: $y>0\ \ \forall\, x$

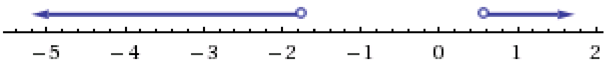
Limiti:

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^2-2\sqrt{3}\,x+3}{4(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5x^2}{4x^2}=\frac{5}{4}$ ($y=\frac{5}{4}$ asintoto orizzontale; non ci sono asintoti obliqui)

Derivata prima:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3}\,x^2+2\,x-\sqrt{3}}{2(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)>0\ \Longrightarrow\ \sqrt{3}\,x^2+2\,x-\sqrt{3}>0,\quad x<-\sqrt{3}\,,x>\frac{1}{\sqrt{3}}$$



La funzione è crescente per $x<-\sqrt{3}$, $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$, decrescente per $-\sqrt{3}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$; abbiamo un massimo relativo (e assoluto) in $M=\left(-\sqrt{3}\,;\frac{3}{2}\right)$ ed un minimo relativo (e assoluto) in $m=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\frac{1}{2}\right)$.

Derivata seconda:

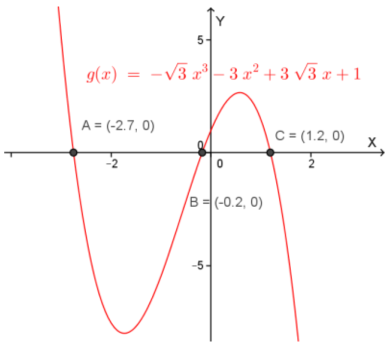
$$f''(x) = \frac{-\sqrt{3}x^3 - 3\,x^2 + 3\sqrt{3}x + 1}{(x^2+1)^3} > 0 \quad \Longrightarrow \quad -\sqrt{3}x^3 - 3\,x^2 + 3\sqrt{3}x + 1 > 0$$

L'equazione $-\sqrt{3}x^3 - 3\,x^2 + 3\sqrt{3}x + 1 = 0$ ha le radici approssimate

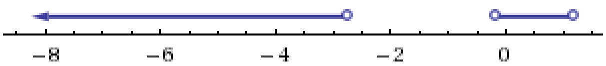
$x_1 \cong -2.7,\; x_2 \cong -0.2, \quad x_1 \cong -2.7$

come si può dedurre da uno studio approssimativo della funzione

$y = -\sqrt{3}x^3 - 3\,x^2 + 3\sqrt{3}x + 1$

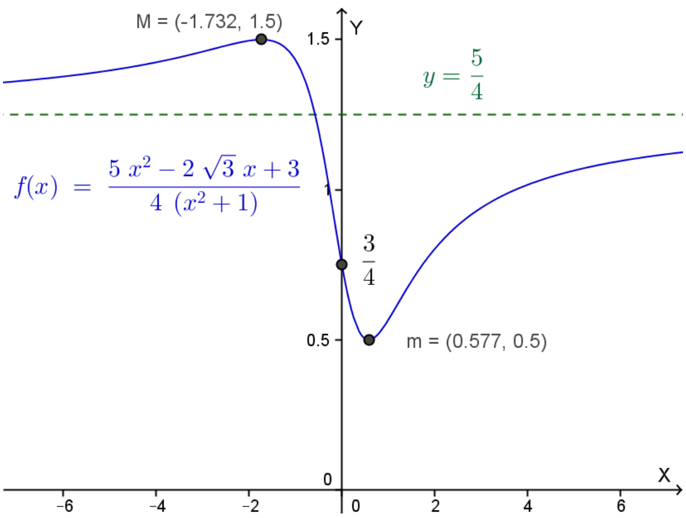


Pertanto $f''(x) > 0$ $se\ x < x_1\ \ oppure\ \ x_2 < x < x_3$ in cui il grafico è concavo verso l'alto:



Abbiamo 3 flessi per $x_1 \cong -2.7,\; x_2 \cong -0.2, \quad x_1 \cong -2.7$

Il grafico della funzione è il seguente:



3)

Si determinino le coordinate del punto in cui la curva γ incontra il suo asintoto e si scriva l'equazione della tangente ad essa in tale punto.

Il punto richiesto si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{5x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3}{4(x^2+1)} \\ y = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{5x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3}{4(x^2+1)} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad -2\sqrt{3}\,x + 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

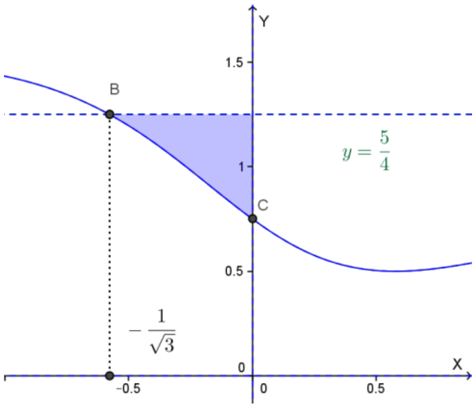
Le coordinate del punto A in cui la curva γ incontra il suo asintoto sono: $\boldsymbol{A = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{5}{4}\right)}$.

La tangente alla curva γ in A ha equazione $y - \frac{5}{4} = f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

essendo $f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{8}\sqrt{3} \cong -0.7$, la tangente ha equazione: $\boldsymbol{y = -\frac{3}{8}\sqrt{3}\,x + \frac{7}{8}}$

4)

Si determini l'area della superficie piana, appartenente al II quadrante, delimitata dall'asse y, dalla curva γ e dal suo asintoto.



$$Area = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \left(\frac{5}{4} - \frac{5x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3}{4(x^2+1)}\right) dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \left(\frac{2\sqrt{3}\,x + 2}{4(x^2+1)}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \left(\frac{\sqrt{3}\,x + 1}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \left(\frac{\sqrt{3}\,x}{x^2+1}\right) dx + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \left(\frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \left(\frac{2\,x}{x^2+1}\right) dx + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \left(\frac{1}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[ln|x^2+1|\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} + \frac{1}{2}\left[arctgx\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[0 - ln\frac{4}{3}\right] + \frac{1}{2}\left[0 - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = -\frac{\sqrt{3}}{4}ln\frac{4}{3} + \frac{\pi}{6}$$

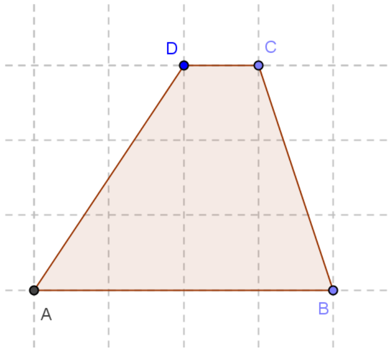
Quindi:

$$Area = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}ln\frac{4}{3}\right) u^2 \cong 0.40\, u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri

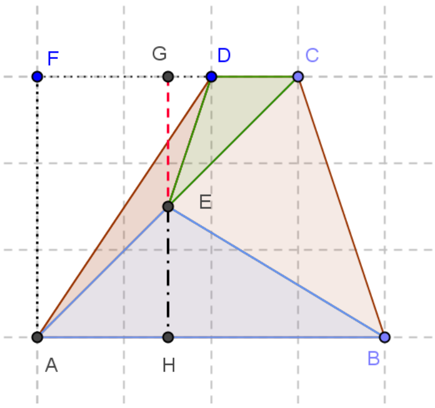
ORDINAMENTO 2013 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Del trapezio ABCD si hanno le seguenti informazioni: la base maggiore AB e la base minore DC misurano rispettivamente $4\ m$ *e* $1\ m$ *, l'altezza del trapezio misura* $3\ m$ *e la tangente dell'angolo* $B\hat{A}D$ *è uguale a* $\frac{3}{2}$.



1)

Si calcolino le aree dei quattro triangoli in cui il trapezio è diviso da una sua diagonale e dai segmenti che uniscono il punto medio di questa con gli estremi dell'altra diagonale.



Sia E il punto medio della diagonale AC. Tracciando il segmento GH passante per E e perpendicolare alle due basi del trapezio, risulta: $GH = 3$, *quindi* $GE = EH = \frac{3}{2}$.
Quindi:

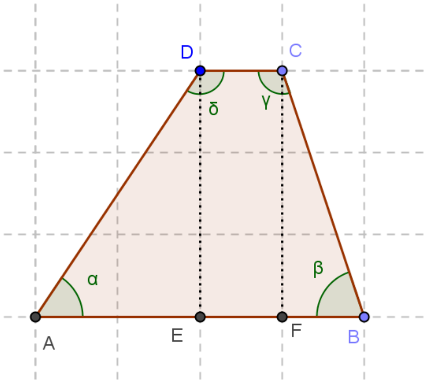
$$Area(ABE) = \frac{4 \cdot \frac{3}{2}}{2} = 3\ m^2 \qquad Area(CDE) = \frac{1 \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}\ m^2$$

$$Area(ADE) = Area(ACD) - Area(CDE) = \frac{CD \cdot AF}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\ m^2$$

$$Area(BCE) = Area(ABCD) - Area(ABE) - Area(ACD) = \frac{(4+1) \cdot 3}{2} - 3 - \frac{3}{2} = 3\ m^2$$

2)

Si determinino, con l'aiuto di una calcolatrice, le misure, in gradi e primi sessagesimali, degli angoli del trapezio.

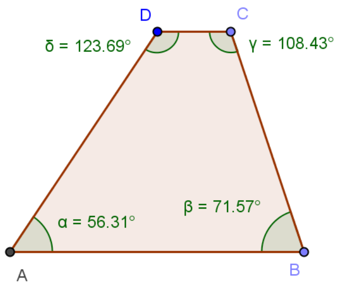


Risulta: $tg\alpha = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = arctg\left(\frac{3}{2}\right) \cong 56.31° = 56°19'$

Quindi $\delta = 180° - \alpha \cong 123.69° = 123°41'$

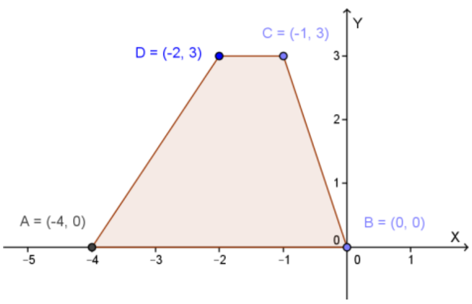
Risulta poi: $tg\beta = \frac{3}{1} \quad \Longrightarrow \quad \beta = arctg(3) \cong 71.57° = 71°34'$

Quindi $\gamma = 180° - 71.57° = 108°26'$



3)

Riferito il piano del trapezio ad un conveniente sistema di assi cartesiani, si trovi l'equazione della parabola Γ avente l'asse perpendicolare alle basi del trapezio e passante per i punti B, C, D.



Fissiamo il sistema di riferimento in modo che B sia l'origine, l'asse x coincida con la retta AB e l'asse y sia rivolto verso l'alto.
In tale sistema i vertici del trapezio avranno le seguenti coordinate:

$$A = (-4; 0),\ \ B = (0; 0),\ \ C = (-1; 3),\quad D = (-2; 3).$$

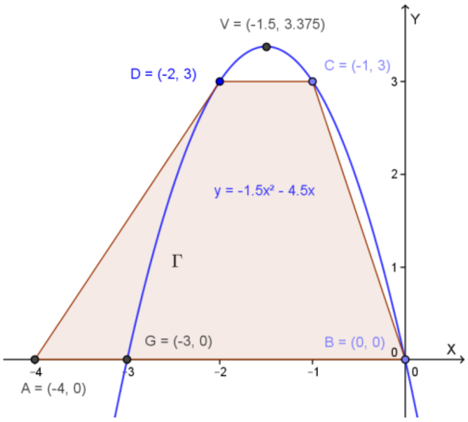
La parabola Γ deve avere l'asse perpendicolare alle basi del trapezio e passare per i punti B, C, D: $B = (0; 0),\ C = (-1; 3),\quad D = (-2; 3)$.

Γ ha equazione del tipo: $y = ax^2 + bx + c$; imponiamo il passaggio per B, C e D:

$$\begin{cases} 0 = c \\ 3 = a - b + c \\ 3 = 4a - 2b + c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 3 = a - b \\ 3 = 4a - 2b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b + 3 \\ 3 = 4b + 12 - 2b \quad \Longrightarrow \quad b = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

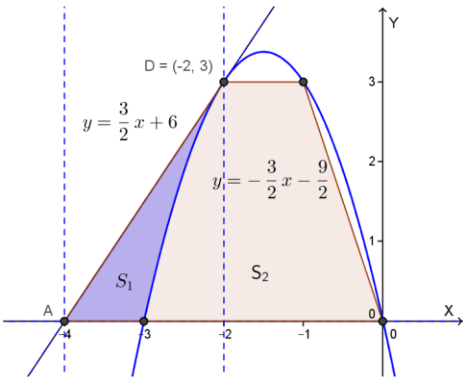
$$\begin{cases} c = 0 \\ a = -\dfrac{9}{2} + 3 \\ b = -\dfrac{9}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\dfrac{3}{2} \\ b = -\dfrac{9}{2} \end{cases} \Longrightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x = -\frac{3}{2}x(x+3)$$

La parabola ha vertice in $V = \left(-\frac{3}{2}; \frac{27}{8}\right)$.



4)

Si determinino le aree delle due regioni in cui il trapezio è diviso da Γ.



Dobbiamo calcolare le aree delle due regioni S_1 *ed* S_2.
La retta AD ha equazione $y = \frac{3}{2}x + 6$.

$$Area(S_1) = \int_{-4}^{-2} \left[\frac{3}{2}x + 6\right] dx - \int_{-3}^{-2} \left(-\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x\right) dx =$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^2 + 6x\right]_{-4}^{-2} - \left[-\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2\right]_{-3}^{-2} = [3 - 12 -$$

$$-(12 - 24)] - \left[4 - 9 - \left(\frac{27}{2} - \frac{81}{4}\right)\right] = \frac{5}{4}\ u^2$$

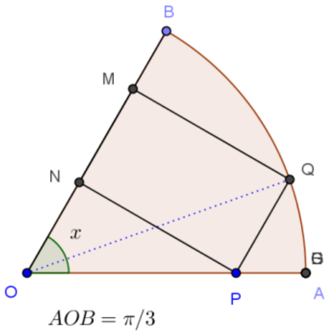
$$Area(S_2) = Area(trapezio) - Area(S_1) = \frac{15}{2} - \frac{5}{4} = \frac{25}{4}\ u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri

ORDINAMENTO 2013 SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

E' dato il settore circolare AOB, di centro O, raggio r e ampiezza $\frac{\pi}{3}$. Si inscriva in esso il rettangolo PQMN, con M ed N sul raggio OB, Q sull'arco AB e P su OA. Si determini l'angolo $Q\hat{O}B = x$, affinché il perimetro del rettangolo sia massimo.



Deve essere $2p(PQMN) = max$
$Q\hat{O}B = x$.
Se $Q \equiv B \quad x = 0$; se $Q \equiv A \quad x = \frac{\pi}{3}$: quindi $\quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$
Determiniamo i lati del rettangolo.

$MQ = OQ \cdot senx = r\ senx = PN$

Risulta: $P\hat{O}Q = \frac{\pi}{3} - x$, $O\hat{P}Q = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$
Quindi, per il *Teorema dei seni* applicato al triangolo OPQ, risulta:

$$\frac{PQ}{sen\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} = \frac{OQ}{sen\left(\frac{2}{3}\pi\right)} \quad \Longrightarrow \quad PQ = \frac{OQ \cdot sen\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{sen\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{r\cdot\left(sen\frac{\pi}{3}cosx - cos\frac{\pi}{3}senx\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{r\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cosx - \frac{1}{2}senx\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$PQ = \frac{r\cdot\left(\sqrt{3}cosx - senx\right)}{\sqrt{3}} = MN$$

Il perimetro del rettangolo è quindi:

$$2p(PQMN) = 2PN + 2MN = 2\,r\,senx + 2\cdot\frac{r\cdot\left(\sqrt{3}cosx - senx\right)}{\sqrt{3}} = max\ se\ lo\ \text{è}:$$

$$z = senx + \frac{\left(\sqrt{3}cosx - senx\right)}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}cosx + \left(\sqrt{3}-1\right)senx}{\sqrt{3}} = max\ se\ lo\ \text{è}$$

$$y = \sqrt{3}cosx + \left(\sqrt{3}-1\right)senx$$

Pertanto il perimetro del rettangolo è massimo quando è massima la funzione

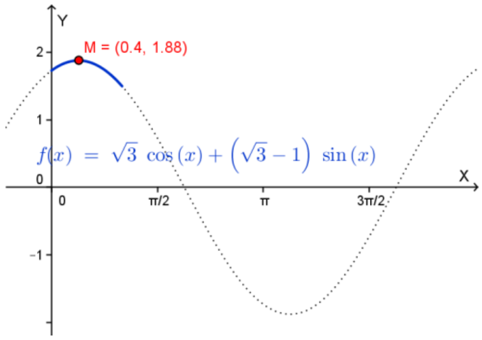
$f(x) = \sqrt{3}cosx + (\sqrt{3}-1)senx$ nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

$f'(x) = -\sqrt{3}senx + \left(\sqrt{3}-1\right) cosx = 0 \quad se \quad tgx = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

$x_0 = arctg\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) \cong 0.40\, rad \cong 22.9°$ (notiamo che x_0 è nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$)

$f'(x) \geq 0 \;\; se\; tgx \leq \frac{3-\sqrt{3}}{3} \;\; quindi \;\; per \;\; 0 \leq x \leq x_0$

La funzione (quindi il perimetro del rettangolo) cresce in $0 \leq x < x_0$ e decresce in $x_0 < x < \frac{\pi}{3}$; ha massimo per $x = x_0 = arctg\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$

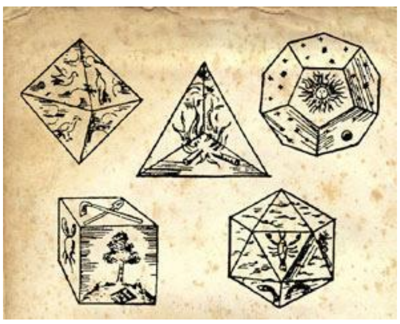


QUESITO 2

*Quali sono i poliedri regolari? Perché sono detti anche **solidi platonici**?*

I poliedri regolari (detti **solidi platonici**) sono **5,** e le loro facce possono essere solo triangoli equilateri, quadrati o pentagoni regolari.

Il termine **Solidi Platonici** è dovuto al fatto che Platone ne dà una dettagliata descrizione nel dialogo "**Timeo**". Platone associa ogni elemento a un solido regolare:
la **Terra** è associata all'**Esaedro (**il **Cubo**);
l'**Acqua** si associa all'**Icosaedro;**
all'**Aria** si associa l'**Ottaedro;**
al **Fuoco** si associa il **Tetraedro.**
Platone fa solo un breve cenno al **Dodecaedro:** "il dio se ne servì per decorare l'universo"; nel **Fedone** afferma che il Dodecaedro fosse la forma dell'universo.



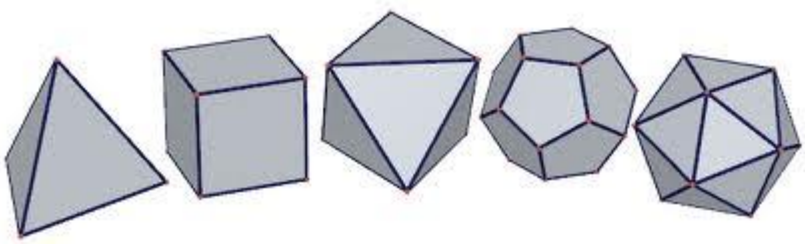
Vediamo come mai **ci sono solo 5 poliedri regolari**.

Poiché in ogni vertice di un poliedro devono convergere almeno tre facce (non complanari), la somma dei loro angoli deve essere inferiore ad un angolo giro.
Le facce possono essere solo triangoli equilateri (**tetraedro, ottaedro, icosaedro**), quadrati (**esaedro o cubo**), pentagoni regolari (**dodecaedro**).

Con tre facce esagonali avremmo come somma almeno 120°x3=360°, quindi non esiste un poliedro regolare a facce esagonali.

Si hanno infatti le seguenti possibilità:

1. Le facce del poliedro sono triangoli (equilateri): le facce degli angoloidi possono essere 3 (3x60°=180°<360°), 4 (4x60°=240°<360°), 5 (5x60°=300°<360°), ma non di più: con 6 facce avremmo 6x60°=360° che non è minore di 360°.
   Abbiamo quindi tre poliedri regolari con le facce triangolari: **il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro.**
2. Se le facce del poliedro sono quadrate, le facce degli angoloidi non possono essere più di 3 (3x90°=270°, ma 4x90°=360°): in questo caso si ha l'**esaedro (il cubo).**
3. Se le facce del poliedro sono pentagoni (regolari), ogni angoloide può avere al massimo 3 facce (3x108°=324°): in questo caso si ha il **dodecaedro regolare.**
4. Non possono esistere poliedri regolari le cui facce abbiamo più di 5 lati (per esempio già con l'esagono avremmo 3x120°=360°).



QUESITO 3

Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione:

$$x = \frac{1}{2} log\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$

Nel punto P di ordinata $y = 2$.

Con $y = 2$ otteniamo $x = \frac{1}{2} log3$, quindi P ha coordinate: $P = \left(\frac{1}{2} log3; 2\right)$
La tangente in P ha equazione: $x - \frac{1}{2} log3 = x'(2)(y-2)$

$x' = \frac{1}{2} \cdot \frac{D\left(\frac{y+1}{y-1}\right)}{\frac{y+1}{y-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{2}{(y-1)^2}}{\frac{y+1}{y-1}} = -\frac{1}{y^2-1} \quad \Longrightarrow \quad x'(2) = -\frac{1}{3}$. Quindi la tangente in P ha equazione: $x - \frac{1}{2} log3 = -\frac{1}{3}(y-2) \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{3} y + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} log3$

N.B.

Troviamo l'inversa di $x = \frac{1}{2} log\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$; $2x = log\left(\frac{y+1}{y-1}\right) \implies e^{2x} = \frac{y+1}{y-1} \quad e^{2x}(y-1) = y+1$

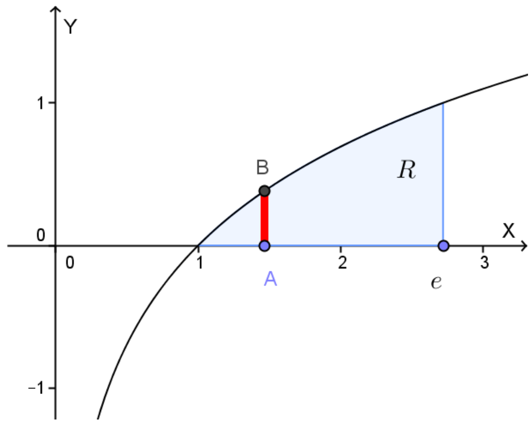
$$y(e^{2x}-1) = 1 + e^{2x} \qquad \implies \quad y = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

Trovare la tangente a $= \frac{1}{2} log\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$ in $P = \left(\frac{1}{2} log3; 2\right)$ equivale a trovare la tangente a $y = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ in $P' = \left(\frac{1}{2} log3; 2\right)$, che è $y - 2 = f'(\frac{1}{2} log3)\left(x - \frac{1}{2} log3\right)$ equivalente a:

$y - 2 = -3\left(x - \frac{1}{2} log3\right) \implies y = -3x + \frac{3}{2} log3 + 2$ che è uguale alla retta trovata prima: $x = -\frac{1}{3} y + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} log3.$

QUESITO 4

Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x) = ln\, x$ e dall'asse x sull'intervallo [1, e]. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura dell'altezza del solido è data da $h(x) = x$. Quale sarà il volume del solido?



Il volume infinitesimo dV è dato da $dV = S(x) \cdot h = (f(x) \cdot dx) \cdot h(x) = (lnx) \cdot x\, dx$ quindi:

$$V = \int_1^e x\, lnx\, dx$$

Integrando per parti cerchiamo una primitiva di $x\, lnx$:

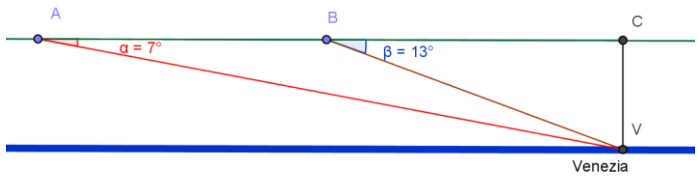
$$\int x\, lnx\, dx = \frac{x^2}{2} lnx - \int \frac{x^2}{2} . \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} lnx - \frac{1}{2} \int x\, dx = \frac{x^2}{2} lnx - \frac{1}{4} x^2 + C$$

Quindi:

$V = \int_1^e x\, lnx\, dx = \left[\frac{x^2}{2} lnx - \frac{1}{4} x^2\right]_1^e = \left[\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \left(0 - \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{4}(e^2 + 1)\, u^3 \cong 2.097\, u^3$

QUESITO 5

Un aereo civile viaggia in volo orizzontale con velocità costante lungo una rotta che lo porta a sorvolare Venezia. Da uno squarcio nelle nuvole il comandante vede le luci della città con un angolo di depressione di 7°. Tre minuti più tardi ricompaiono nuovamente le luci, questa volta però l'angolo di depressione misurato è di 13°. Quanti minuti saranno ancora necessari perché l'aereo venga a trovarsi esattamente sopra la città?



Al primo avvistamento delle luci: $B\hat{A}V = 7°$; da A a B trascorrono 3 minuti; $C\hat{B}V = 13°$; Dobbiamo calcolare i tempo in minuti che impiega l'aereo a passare da B a C (esattamente sopra Venezia).

Indichiamo con t il tempo in minuti impiegato per passare da B a C.

$CV = AC \cdot tg7° = BC \cdot tg13°$; ma, essendo la velocità costante: $\frac{AB}{3} = \frac{BC}{t} \Rightarrow BC = \frac{t \cdot AB}{3}$
Ma $AC = AB + BC = AB + \frac{t \cdot AB}{3} = AB\left(1 + \frac{t}{3}\right)$; quindi, da $AC \cdot tg7° = BC \cdot tg13°$:

$$AB\left(1 + \frac{t}{3}\right) \cdot tg7° = \frac{t \cdot AB}{3} \cdot tg13° \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}(3+t) \cdot tg7° = \frac{1}{3} t \cdot tg13° \quad \Rightarrow$$

$$t(tg13° - tg7°) = 3tg7° \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3tg7°}{tg13° - tg7°} \cong 3.41 \; minuti \; \cong 3'25''$$

QUESITO 6

Si consideri la curva d'equazione $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$. La curva ha asintoti? In caso affermativo, se ne determinino le equazioni.

La funzione è definita e continua su tutto R, quindi potrebbe avere asintoti orizzontali e/o obliqui.
Risulta: $\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x^3 - x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$:

quindi non possono esserci asintoti orizzontali ma potrebbero esserci asintoti obliqui; notiamo che la funzione è un infinito del primo ordine per $x \to \pm\infty$, quindi è soddisfatta la condizione necessaria; essendo $\sqrt[3]{x^3 - x} \sim x \quad per \;\; x \to \pm\infty$, il coefficiente angolare m degli eventuali asintoti obliqui è 1.

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} - x\right) =$$

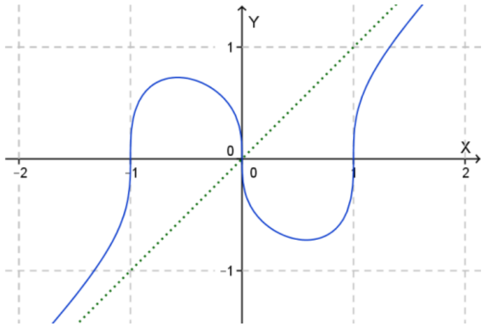
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\cdot\left(\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\cdot\left(\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{3x}\right) = 0 = \mathrm{q}$$

Abbiamo usato il limite notevole:

$\lim_{x\to P}\left[\frac{(1+f(x))^k-1}{x} = k\right]$ $\ se\ f(x)\to\infty\quad per\ \ x\to P$ da cui segue che: $(1+f(x))^k - 1 \sim kx$.

Pertanto la curva ammette $per\ \ x\to\pm\infty$ l'asintoto obliquo di equazione: $y = x$.

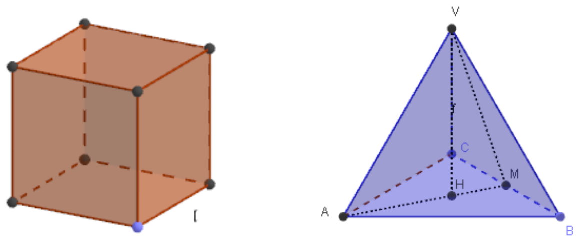
Forniamo, anche se non richiesto, il grafico della funzione.



QUESITO 7

Un cubo di legno di pioppo (densità $\rho_1 = 0{,}385\ g/cm^3$) ed un tetraedro regolare di cristallo ($\rho_2 = 3{,}33\ g/cm^3$) hanno entrambi lo spigolo $l = 5\ cm$. Quale dei due ha la massa maggiore?

Sia l lo spigolo dei due solidi.



$V(cubo) = l^3 = 125\ cm^3$

$V(tetraedro) = \frac{1}{3}Area(base)\cdot h$

L'area di base del tetraedro è quella di un triangolo equilatero:

$Area(base) = \frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{4}$

$$h = VH = \sqrt{VM^2 - MH^2} = \sqrt{AM^2 - \left(\frac{AM}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}AM^2} = \frac{2}{3}AM\sqrt{2} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$

$$V(tetraedro) = \frac{1}{3}\cdot\frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{l\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}l^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}\cdot 125\ cm^3 \cong 14.732\ cm^3$$

Siccome $\rho = \frac{m}{V}$ $m = \rho V$. Quindi:

$$massa(cubo) = m_1 = \rho_1 V_1 = 0{,}385 \frac{g}{cm^3} \cdot 125\ cm^3 \cong 48{,}125\ g$$

$$massa(tetraedro) = m_2 = \rho_2 V_2 = 3{,}33 \frac{g}{cm^3} \cdot 14.732\ cm^3 \cong 49{,}058\ g$$

Quindi ha massa maggiore il tetraedro di cristallo.

QUESITO 8

Tommaso ha costruito un modello di tetraedro regolare e vuole colorare le 4 facce, ognuna con un colore diverso. In quanti modi può farlo se ha a disposizione 10 colori? E se invece si fosse trattato di un cubo?

Nel caso del tetraedro il numero di modi per colorare le 4 facce è dato dalle combinazioni semplici di 10 oggetti a 4 a 4:

$$C_{10,4} = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$$

Nel caso del cubo il numero di modi per colorare le 6 facce è dato dalle combinazioni semplici di 10 oggetti a 6 a 6:

$$C_{10,6} = \binom{10}{6} = \binom{10}{4} = C_{10,4} = 210$$

N.B.

$C_{10,4} = C_{10,6}$ in base alla proprietà dei coefficienti binomiali secondo cui: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

QUESITO 9

Si calcoli il valore medio della funzione:

$$f(x) = \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

nell'intervallo $1 \le x \le 4$.

Il valor medio richiesto è dato da:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{\int_1^4 \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx}{4-0} = \frac{1}{4}\int_1^4 \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{4}\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \frac{1}{4}\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx + \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\left[\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx + \int_1^4 e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left[\sqrt{x}\right]_1^4 + \left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^4\right] = \frac{1}{2}[(2-1)+(e^2-e)] = \frac{e^2-e+1}{2} \cong 2.84$$

QUESITO 10

Si controlli se la funzione $f(x) = tgx + senx + 7$, nell'intervallo chiuso $[0;\pi]$ verifica le ipotesi del teorema di Rolle e, in caso affermativo, si calcoli l'ascissa dei punti ove si annulla la derivata prima.

La funzione non è continua in $\frac{\pi}{2}$, che appartiene all'intervallo $[0;\pi]$ quindi il teorema di Rolle non è applicabile.