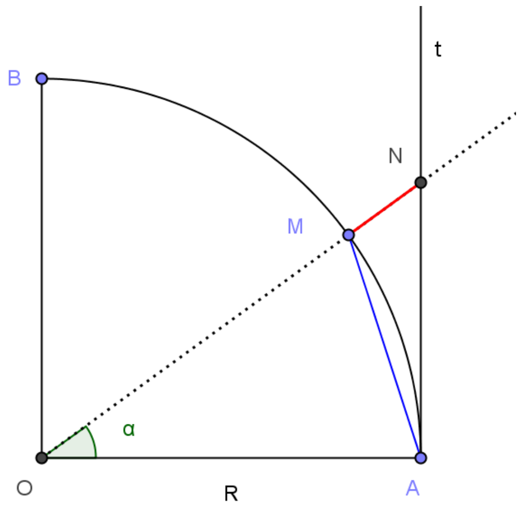
ORDINAMENTO 2014 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

Sono dati un quarto di cerchio AOB e la tangente t ad esso in A. Dal punto O si mandi una semiretta che intersechi l'arco AB e la tangente t, rispettivamente, in M ed N.

1)

Posto $A\hat{O}M = \alpha$ *, si calcoli il rapporto* $\frac{MN}{MA}$ *e lo si esprima in funzione di* $x = sen\ \frac{\alpha}{2}$*, controllando che risulta:* $f(x) = \frac{x}{1-2x^2}$ *.*



$\boldsymbol{A\hat{O}M = \alpha}$ **, con** $\boldsymbol{0 < \alpha < \frac{\pi}{2}}$

Indicato con R il raggio della circonferenza, abbiamo:

$MA = 2R\ sen\ \frac{\alpha}{2} = 2Rx$ (per il teorema della corda)

$$MN = ON - OM = \frac{R}{\cos\alpha} - R = R\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha} = R\frac{2sen^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2} - sen^2\frac{\alpha}{2}} = R\frac{2sen^2\frac{\alpha}{2}}{1-2\ sen^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2Rx^2}{1-2x^2}$$

Quindi risulta:

$$\frac{MN}{MA} = \frac{\frac{2Rx^2}{1-2x^2}}{2Rx} = \frac{x}{1-2x^2} = f(x)$$

2)

Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione f(x) e se ne tracci il grafico γ .

$$f(x) = \frac{x}{1-2x^2}$$

Dominio: $1 - 2x^2 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$-\infty < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < x < +\infty$$

Simmetrie notevoli: f(-x) = - f(x), quindi la funzione è dispari (grafico simmetrico rispetto all'origine).

Intersezioni con gli assi cartesiani: il grafico interseca gli assi nell'origine.

Segno della funzione: $\frac{x}{1-2x^2} > 0$ **… ….** $-\infty < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Limiti:

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-2x^2} = 0^{\mp}$ (y=0 asintoto orizzontale; non ci sono asintoti obliquiqui)

$\lim_{x\to\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\pm}} \frac{x}{1-2x^2} = \mp\infty$ $\left(x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right.$ asintoto verticale)

$\lim_{x\to\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\pm}} \frac{x}{1-2x^2} = \mp\infty$ $\left(x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right.$ asintoto verticale)

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2\,x^2 + 1}{(2x^2-1)^2}$$

$f'(x) > 0 \ \ \forall x \ del \ dominio$: la funzione è sempre crescente.

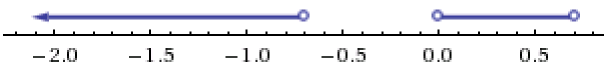
Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{4x(3+2x^2)}{(2x^2-1)^3}$$

$f''(x) > 0 \quad se$

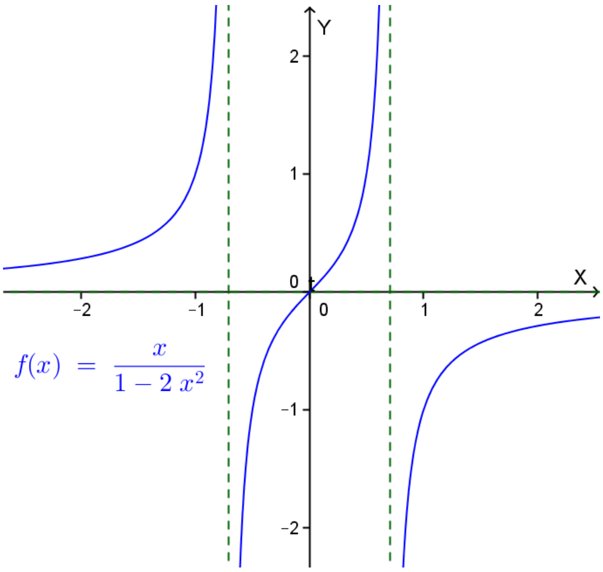
$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$



Abbiamo un flesso nell'origine.

Il grafico della funzione è il seguente:



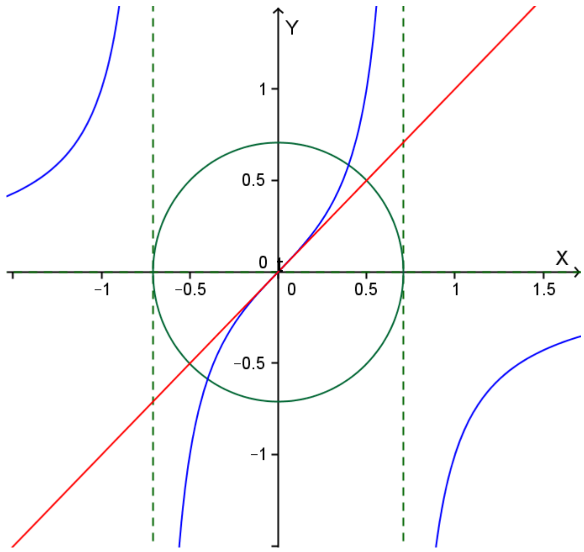
3)

Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso; si scriva poi l'equazione della circonferenza con il centro nel suddetto punto di flesso e tangente agli asintoti verticali di γ.

La tangente a γ nel punto di flesso O=(0;0) ha equazione $y - 0 = f'(0)(x - 0)$; essendo $f'(0) = 1$, la tangente ha equazione: $\boldsymbol{y = x}$.

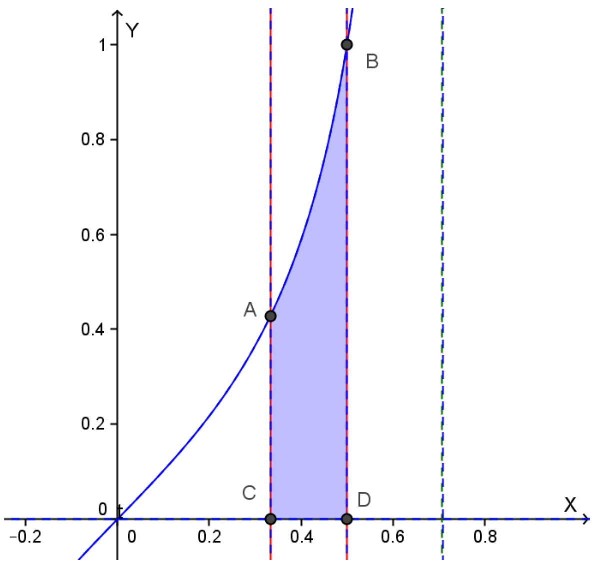
La circonferenza richiesta ha centro in O e raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Equazione circonferenza: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = \frac{1}{2}}$



4)

Si determini l'area della regione di piano limitata dalla curva γ *dall'asse x e dalle rette di equazioni* $x = \frac{1}{3}$ *e* $x = \frac{1}{2}$.



$$A = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-2x^2}dx = -\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{-4x}{1-2x^2}dx = -\frac{1}{4}\left[ln|1-2x^2|\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}ln\left(\frac{14}{9}\right) \cong 0.11$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri

ORDINAMENTO 2014 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x\, ln^2 x}$$

1)

Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

Dominio: x≠ $0,\ x > 0,\ \ln x \cong 0 \quad \Longrightarrow \quad x \neq 1$:

$0 < x < 1,\ \ 1 < x < +\infty$

Simmetrie notevoli: no (dominio non simmetrico).

Intersezioni con gli assi cartesiani: nessuna intersezione con glia assi.

Segno della funzione: $\frac{1}{x\, ln^2 x} > 0 \ \Longrightarrow x > 0\ con\ \ x \neq 1$

Limiti:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\, ln^2 x} = +\infty$ (x=0 asintoto verticale; **N.B.** $\lim_{x\to 0^+} x\, ln^2 x = 0^+$)

$\lim_{x\to (1)^\pm} \frac{1}{x\, ln^2 x} = +\infty$ ($x = 1$ asintoto verticale)

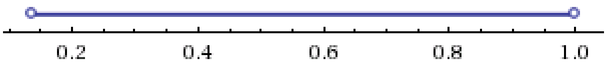
$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x\, ln^2 x} = 0^+$ ($y = 0$ asintoto orizzontale; non c'è asintoto obliquo)

Derivata prima:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x \log^2(x)}\right) = -\frac{\log(x) + 2}{x^2 \log^3(x)}$$

$f'(x) > 0 \quad -\frac{\ln x + 2}{x^2\, ln^3 x} > 0 \ \Longrightarrow \ \frac{\ln x + 2}{\ln x} < 0$

$\frac{1}{e^2} < x < 1$



Quindi la funzione è **crescente** per $\frac{1}{e^2} < x < 1$

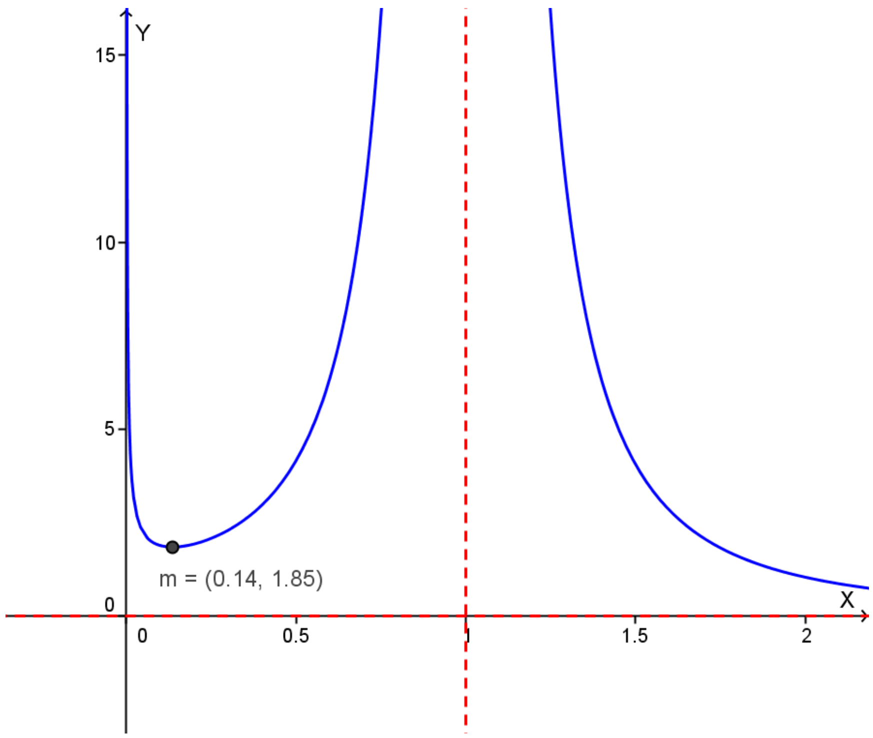
Abbiamo un minimo relativo nel punto $m = \left(\frac{1}{e^2}; \frac{e^2}{4}\right)$

Derivata seconda:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x\log^2(x)}\right) = \frac{2\left(\log^2(x) + 3\log(x) + 3\right)}{x^3\log^4(x)}$$

La derivata seconda risulta sempre positiva, quindi la concavità è sempre rivolta verso l'alto.

Il grafico della funzione è il seguente:



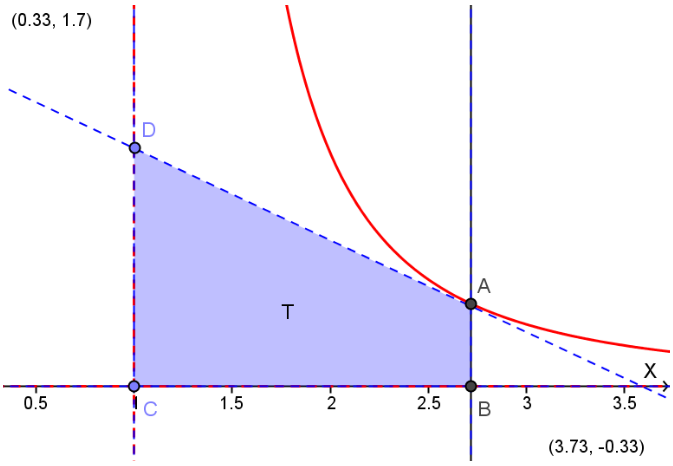
2)

Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di ascissa x=e, e si calcoli l'area del trapezio T che essa forma con l'asse x, con l'asintoto verticale e con la retta di equazione x=e.

Il punto di γ di ascissa x=e ha coordinate (e;1/e); il coefficiente angolare della tangente in tale punto è $f'(e) = -\frac{3}{e^2}$; la tangente ha equazione: $y - \frac{1}{e} == -\frac{3}{e^2}(x - e)$, cioè:

$$\boldsymbol{y = -\frac{3}{e^2}x + \frac{4}{e}}$$

Calcoliamo ora l'area del trapezio T che la tangente forma con l'asse x, con l'asintoto verticale e con la retta di equazione x=e.



Risulta:

$$AB = \frac{1}{e}, \qquad y_D = -\frac{3}{e^2} + \frac{4}{e} \quad da\ cui \quad CD = -\frac{3}{e^2} + \frac{4}{e} \qquad BC = e - 1$$

L'area richiesta è data da:

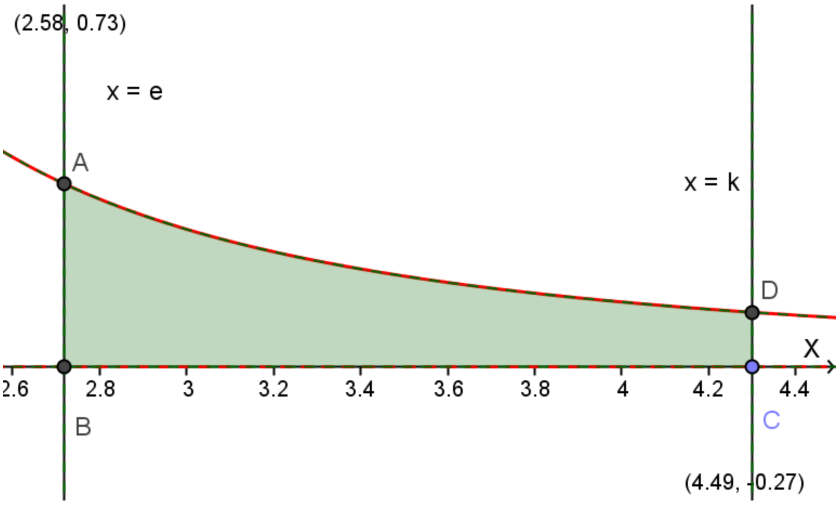
$$A(T) = \frac{(AB + CD) \cdot BC}{2} = \frac{\left(\frac{1}{e} + -\frac{3}{e^2} + \frac{4}{e}\right) \cdot (e - 1)}{2} = \frac{3 - 8e + 5e^2}{2e^2} \cong 1.23\ u^2$$

L'area del trapezio si può anche determinare con il calcolo integrale:

$$\int_1^e \left(-\frac{3x}{e^2} + \frac{4}{e}\right) dx = \frac{3 - 8e + 5e^2}{2e^2} \approx 1.23149$$

3)

*Si calcoli l'area della regione S_k delimitata dalla curva γ , dall'asse x e dalle rette di equazioni **x=e** ed **x=k** (con k>e).*



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$A(S_k) = \int_e^k f(x)dx = \int_e^k \frac{1}{x\,ln^2 x}dx = \int_e^k \left(ln^{-2}x\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{ln^{-1}x}{-1}\right]_e^k = \left[-\frac{1}{ln\,x}\right]_e^k =$$

$$= -\frac{1}{ln\,k} + 1$$

4)

Si faccia vedere che S_k tende verso un limite finito quando k tende a $+\infty$ e si confronti tale limite col valore numerico dell'area del trapezio T, arrotondato alla quarta cifra decimale.

$$\lim_{k\to+\infty} S_k = \lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{1}{ln\,k}+1\right) = 1$$

L'area del trapezio T, **arrotondata alla quarta cifra decimale** è: $A(T) = 1.2315.$

$$A(T) - \lim_{k\to+\infty} S_k = 1.2315 - 1 = 0.2315$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri

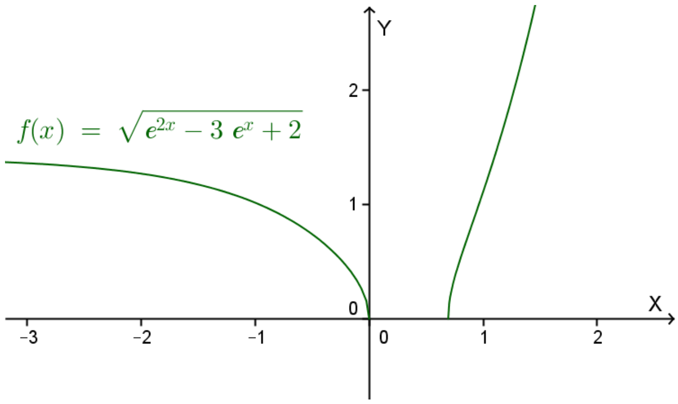
ORDINAMENTO 2014 SESSIONE SUPPLETIVA QUESTIONARIO

QUESITO 1

Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2}$

$e^{2x} - 3e^x + 2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad e^x \leq 1, \quad e^x \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad x \leq 0, \quad x \geq ln2$

DOMINIO: $-\infty < x \leq 0, \quad ln2 \leq x < +\infty$



QUESITO 2

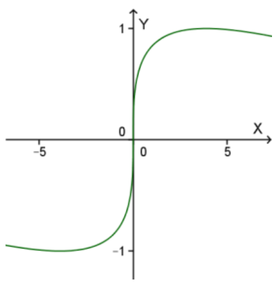
La funzione: $\boldsymbol{f(x) = sen\sqrt[3]{x}}$ *è evidentemente continua nel punto x=0. Si dimostri che nello stesso punto non è derivabile.*

$$\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\sqrt[3]{x}\right)\right) = \frac{\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)}{3\,x^{2/3}}$$

La derivata non esiste in x=0 ed è in particolare:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$$

Quindi in x=0 abbiamo un flesso a tangente verticale.



QUESITO 3

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{3}\left(2 + sen^2\frac{1}{x}\right)$$

nel punto P di ascissa $x = \frac{1}{\pi}$.

Risulta: $f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{2}{3\pi^2}$

La derivata $f'(x)$ della funzione è:

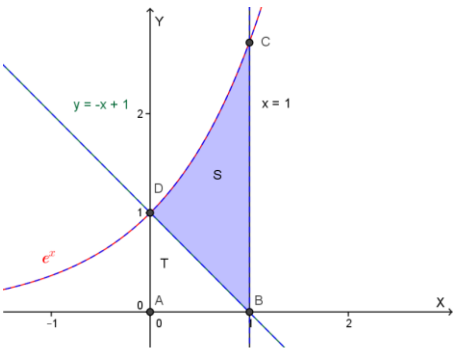
$$\frac{2}{3}x\left(\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)+2\right)-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$f'\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{4}{3\pi}$$

La tangente in P ha quindi equazione: $y - \frac{2}{3\pi^2} = \frac{4}{3\pi}\left(x - \frac{1}{\pi}\right) \implies y = \frac{4}{3\pi}x - \frac{2}{3\pi^2}$

QUESITO 4

Data la parte finita di piano compresa tra le rette x+y-1=0 e x-1=0 ed il grafico della funzione $y = e^x$ *, si determini la sua area ed il volume del solido ottenuto facendola ruotare di un giro completo attorno all'asse x.*



L'area della parte di piano richiesta è data da:

$$A(S) = \int_0^1 (e^x - (-x+1))dx = \left[e^x + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \left(e - \frac{3}{2}\right)u^2 \cong 1.22\ u^2$$

Il volume richiesto si ottiene sottraendo al volume V_1 ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x del trapezoide ABCD il volume V_2 del cono ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x del triangolo T (che ha raggio AD=1 e altezza AB=1).

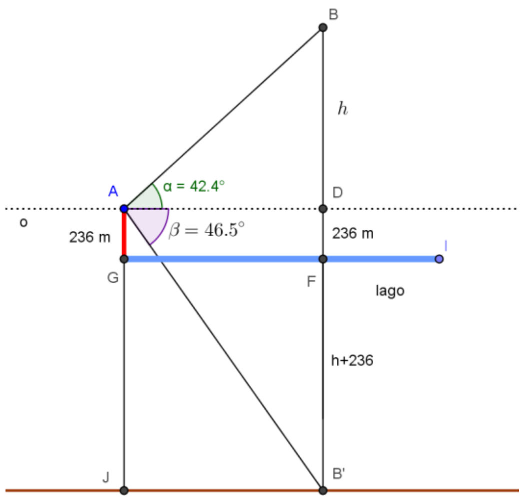
$$V_1 = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{1}{3}\pi$$

$$V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1) - \frac{1}{3}\pi = \frac{\pi}{6}(3e^2 - 5) \cong 8.989\ u^3$$

QUESITO 5

Un osservatore posto sulla riva di un lago a 236 m sopra il livello dell'acqua, vede un aereo sotto un angolo di elevazione α di 42,4° e la sua immagine riflessa sull'acqua sotto un angolo di depressione β di 46,5°. Si trovi l'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore.



BB' è perpendicolare alla linea dell'orizzonte o e risulta BF=B'F (B' è il simmetrico di B rispetto alla superficie del lago. L'altezza richiesta è h=BD.

$AD = h \cdot cotg\ \alpha = h \cdot cotg\ 42.4°$
$AD = B'D \cdot cotg\ \beta \cong \ (h + 472) \cdot cotg\ 46.5°$

Quindi: $h \cdot cotg\ 42.4° = (h + 472) \cdot cotg\ 46.5°$, da cui :

$$h = \frac{472 \cdot cotg\ 46.5°}{cotg\ 42.4° - cotg\ 46.5°} \cong 3064\ m$$

L'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore è di circa 3064 metri.

N.B.

Non abbiamo tenuto conto della rifrazione del raggio B'A nel passaggio acqua-aria.

QUESITO 6

Si trovino gli eventuali flessi della curva:

$$f(x) = x[(\log 3x)^2 - 2\log 3x + 2]$$

La funzione è definita per ogni x>0.
Calcoliamo la derivata prima:

$$\frac{d}{dx}\left(x\left(\log^2(3\,x) - 2\log(3\,x) + 2\right)\right) = \log^2(3\,x)$$

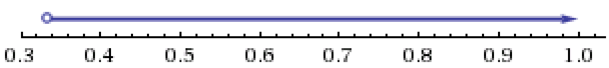
La funzione è derivabile in tutto il suo dominio (per x che tende a 0+ la derivata prima tende a + infinito: il grafico si avvicina ad O con tangente verticale).

Calcoliamo la derivata seconda:

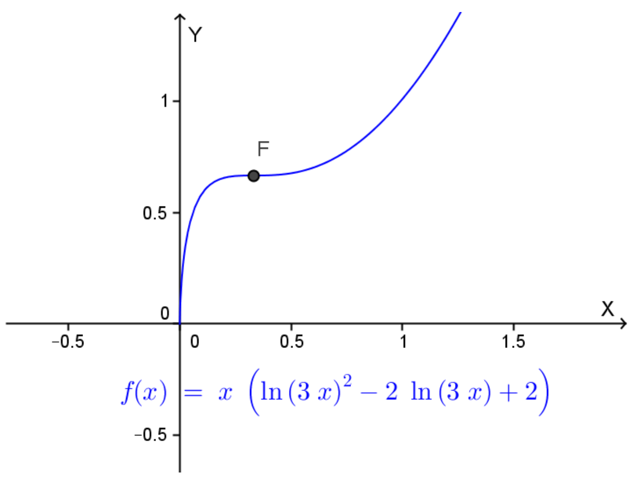
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x\left(\log^2(3\,x) - 2\log(3\,x) + 2\right)\right) = \frac{2\log(3\,x)}{x}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$\frac{2\log(3x)}{x} > 0 \quad \Rightarrow \quad \log(3x) > 0 \quad \Rightarrow 3x > 1 \quad \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$



Abbiamo quindi concavità verso l'alto per $x > \frac{1}{3}$ e verso il basso per $0 < x < \frac{1}{3}$: si ha quindi un flesso per $x = \frac{1}{3}$, di ordinata $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$



QUESITO 7

Una scatola di forma cilindrica ha raggio R e altezza h. Se si aumenta del 5% ciascuna sua dimensione, di quanto aumenterà, in termini percentuali, il suo volume?

$$V_1 = \pi R^2 h$$
$$V_2 = \pi\left(R + \tfrac{5}{100}R\right)^2\left(h + \tfrac{5}{100}h\right) = \pi(1.05\,R)^2(1.05\,h) = \pi R^2 h \cdot (1.05)^3 = V_1 \cdot (1.05)^3$$

L'aumento percentuale del volume è dato da:

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} \cdot 100 = \frac{V_1 \cdot (1.05)^3 - V_1}{V_1} \cdot 100 = \left((1.05)^3 - 1\right) \cdot 100 = 15.7625\ \%$$

QUESITO 8

Si calcoli il limite della funzione $\frac{sen\,x + cos x - \sqrt{2}}{log\ sen 2x}$*, quando x tende a* $\frac{\pi}{4}$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) + \cos(x) - \sqrt{2}}{\log(\sin(2\,x))} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Infatti:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{sen}(x) + \cos(x) - \sqrt{2}}{\log(sen(2x))} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}}{\log(1 + (sen(2x) - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\sqrt{2}\left(1 - cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)}{sen(2x) - 1} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\sqrt{2}\left(2\,sen^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 1} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\sqrt{2}\left(2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)^2\right)}{-2\,sen^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\sqrt{2}\left(2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)^2\right)}{-2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)^2} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)^2}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2} == \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)^2}{4\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Allo stesso risultato si può giungere applicando la regola di de L'Hôpital (di cui sono verificate le condizioni):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)-\sqrt{2}}{\log(sen(2x))} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)-sen(x)}{\frac{2\cos(2\mathrm{x})}{\operatorname{sen}(2\mathrm{x})}} == \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\big(\cos(x)-sen(x)\big)sen(2x)}{2\cos(2\mathrm{x})} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\big(\cos(x)-sen(x)\big)sen(2x)}{2(\cos^2(x)-sen^2(x))} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{\big(\cos(x)-sen(x)\big)}sen(2x)}{2\cancel{(\cos(x)-sen(x))}\cdot(\cos(x)+sen(x))} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

QUESITO 9

Si calcoli il valore medio della funzione: $y=\cos^5 x$, *nell'intervallo* $0\le x\le \frac{\pi}{2}$.

Troviamo una primitiva di $y=\cos^5 x$.

$$\int \cos^5 x\,dx = \int cosx\ \cdot\cos^4 x\,dx = \int cosx\ \cdot(1-sen^2x)^2dx =$$
$$= \int (cosx - 2cosx\ sen^2x + cosx\ sen^4x)dx = sen\ x - \frac{2}{3}sen^3x + \frac{1}{5}sen^5x + k$$

Valore medio:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_o^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\ \ dx = \frac{2}{\pi}\left[sen\ x - \frac{2}{3}sen^3x + \frac{1}{5}sen^5x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left[1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right] = \frac{16}{15\pi}$$

QUESITO 10

Un certo numero formato da tre cifre è uguale a 56 volte la somma delle cifre che lo compongono. La cifra delle unità è uguale a quella delle decine aumentata di 4, mentre, scambiando la cifra delle unità con quella delle centinaia, si ottiene un valore che è uguale a quello originario diminuito di 99. Si determini il numero di partenza.

Un numero di 3 cifre ha la forma

$$N = xyz = z + y\cdot 10 + x\cdot 10^2 = z + 10y + 100x \quad con\ x, y\ e\ z\ naturali\ da\ 0\ a\ 9$$

1) $z+10y+100x = 56\cdot(x+y+z)$
2) $z = y+4$
3) $x+10y+100z = z+10y+100x-99$

Dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 44x - 46y - 55z = 0 \\ z = y + 4 \\ 99x - 99z - 99 = 0 \implies x = z + 1 = y + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 44(y+5) - 46y - 55(y+4) = 0 \\ z = y + 4 \\ x = y + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -57y = 0 \implies y = 0 \\ z = y + 4 \\ x = y + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 4 \\ x = 5 \end{cases}$$

Il numero richiesto è quindi $\boldsymbol{N = 504}$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri