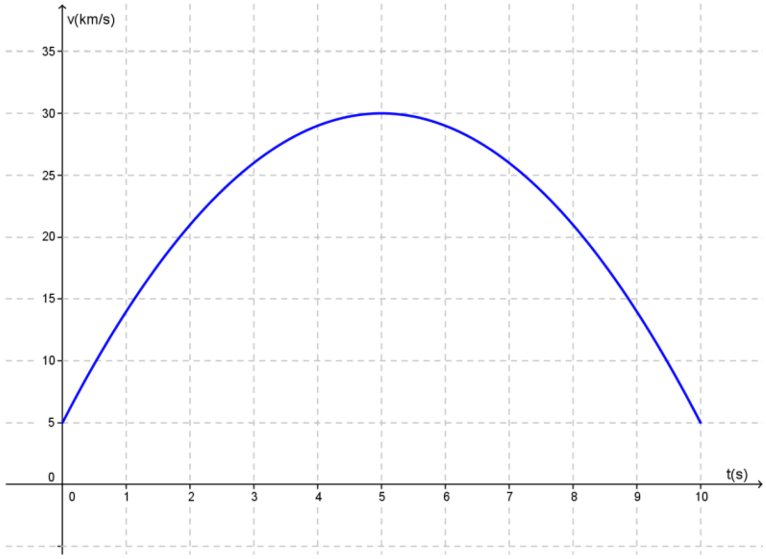
SIMULAZIONE - 25 FEBBRAIO 2015 - PROBLEMA 1



1)

Il grafico della velocità in funzione del tempo è una parabola con asse di simmetria $t = 5$, vertice $V = (5; 30)$ e passante per $A = (0; 5)$. Abbiamo quindi:

$v = at^2 + bt + c$, con:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 5 \\ 30 = 25a + 5b + c \\ 5 = c \end{cases} \quad \begin{cases} b = -10a \\ 30 = 25a - 50a + 5 \\ 5 = c \end{cases} \quad \begin{cases} b = 10 \\ a = -1 \\ c = 5 \end{cases}$$

Quindi l'espressione della velocità in funzione del tempo è:

$v = v(t) = -t^2 + 10t + 5$ (con t espresso in secondi e v in km/s).

2)

Tenendo presente che: $v = v(t) = s'(t)$ si ha:

$s'(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t\right) = -t^2 + 10t + 5 = v(t)$

Quindi effettivamente la funzione $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t$ rappresenta lo spazio percorso dal meteorite in funzione del tempo.

N.B. In generale alla $v(t) = -t^2 + 10t + 5$ corrisponde la legge oraria:

$s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t + s_0$, essendo s_0 la posizione assunta dal primo meteorite all'istante $t = 0$; porre $s_0 = 0$ equivale a dire che per $t = 0$ il meteorite si trova nell'origine degli spazi.

3)

Indicata con $s_2(t)$ la legge oraria del secondo meteorite, affinché avvenga l'urto è necessario che, detto t_{urto} l'istante in cui avviene l'urto, i due meteoriti in tale istante si trovino nella stessa posizione, cioè che:

$s(t_{urto}) = s_2(t_{urto})$.

4)

Dopo l'urto il primo meteorite si muove con la nuova legge oraria:

$$s(t) = 2t^2 + \frac{5}{3}t$$

Per determinare l'istante in cui avviene l'urto è sufficiente scoprire quando il primo meteorite cambia traiettoria, cioè quando (per $t > 0$):

$$-\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t = 2t^2 + \frac{5}{3}t \quad \Longrightarrow \quad -t^3 + 15t^2 + 15t = 6t^2 + 5t \quad \Longrightarrow \quad t^3 - 9t^2 + 10t = 0$$

Da cui: $t = 0 \quad e \quad t^2 - 9t + 10 = 0: \ t = -1 \quad e \quad t = 10$.

L'urto avviene quindi all'istante $t_{urto} = 10\ s$. Prima dell'urto il primo meteorite ha percorso uno spazio pari a $s = s(10) = \frac{650}{3} \cong 216.7\ m$.

5)

Si chiede di studiare la funzione di equazione:

$$\boldsymbol{s = s(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t, & se\ 0 \le t \le 10 \\ 2t^2 + \frac{5}{3}t, & se\ 10 < t \le 30 \end{cases}}$$

Studiamo la funzione per $0 \le t \le 10$:

$$\boldsymbol{s = s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t}$$

Si tratta di una cubica, definita su tutto R; studiamola su R e poi evidenziamo la parte richiesta.

Simmetrie notevoli:

$s(-t) \neq s(t)$: *non è pari*; $s(-t) \neq -s(t)$: *non è dispari*.

Ricordiamo che una cubica ha sempre uno ed un solo flesso, che è centro di simmetria per la curva.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $t = 0$, $s = 0$.

Se $s = 0$, $-\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t = 0$, $t^3 - 15t^2 - 15t = 0$, $t(t^2 - 15t - 15) = 0$

da cui:

$t = 0$, $t^2 - 15t - 15 = 0$: $t = \frac{15 \pm \sqrt{285}}{2}$ *da cui*:

$$t_1 = \frac{15 - \sqrt{285}}{2} \cong -094 \quad e \quad t_2 = \frac{15 + \sqrt{285}}{2} \cong 15.94$$

Segno della funzione:

$s > 0$ *se* $-\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t > 0 \quad \Longrightarrow \quad t^3 - 15t^2 - 15t = 0 < 0$, da cui:

$t(t^2 - 15t - 15) < 0$; studiando il segno dei due fattori otteniamo $s > 0$ se:

$t < \frac{15 - \sqrt{285}}{2}$ oppure $0 < t < \frac{\sqrt{285}+15}{2}$

Limiti:

$\lim_{t \to \mp\infty} \left(-\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t\right) = \pm\infty$ (non esistono asintoti obliqui)

Derivata prima:

$s' = -t^2 + 10t + 5 \geq 0$ se $t^2 - 10t - 5 \leq 0$ se:

$5 - \sqrt{30} \leq t \leq \sqrt{30} + 5$: in tale intervallo la funzione è crescente; inoltre:

$t = 5 - \sqrt{30} \cong -0.48$: punto di minimo relativo

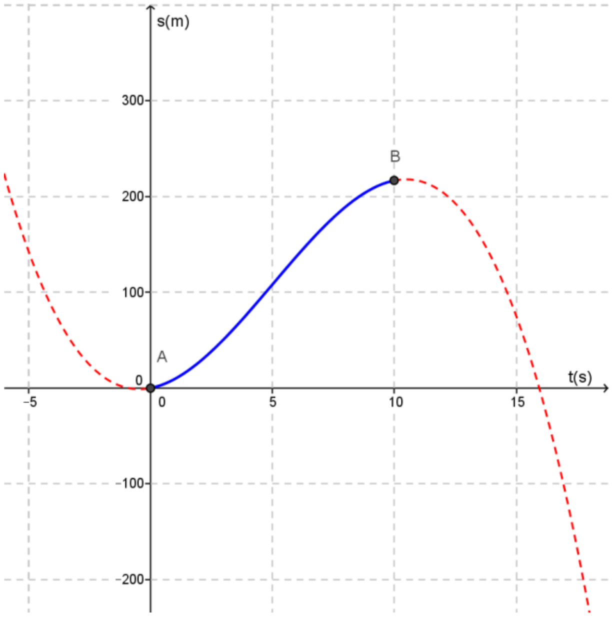
$t = 5 + \sqrt{30} \cong +10.48$: punto di massimo relativo

Derivata seconda:

$s'' = -2t + 10 \geq 0$ se $t \leq 5$ (concavità verso l'alto)

Abbiamo il flesso per $t = 5$, con ordinata $s(5) = 30$

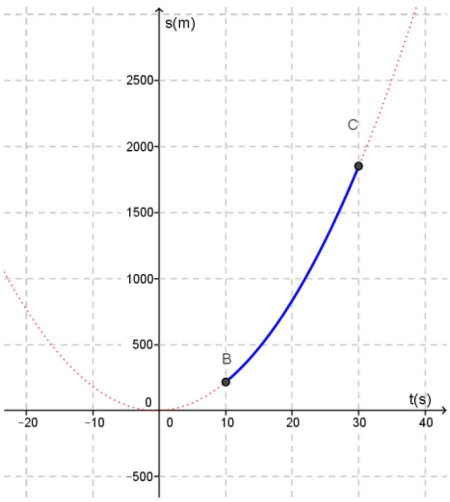
Il grafico della funzione è il seguente (è evidenziata da A a B la parte del grafico che tiene conto della limitazione $0 \leq t \leq 10$):



Studiamo la funzione per $10 < t \leq 30$:

$$\boldsymbol{s = s(t) = 2t^2 + \frac{5}{3}t}$$

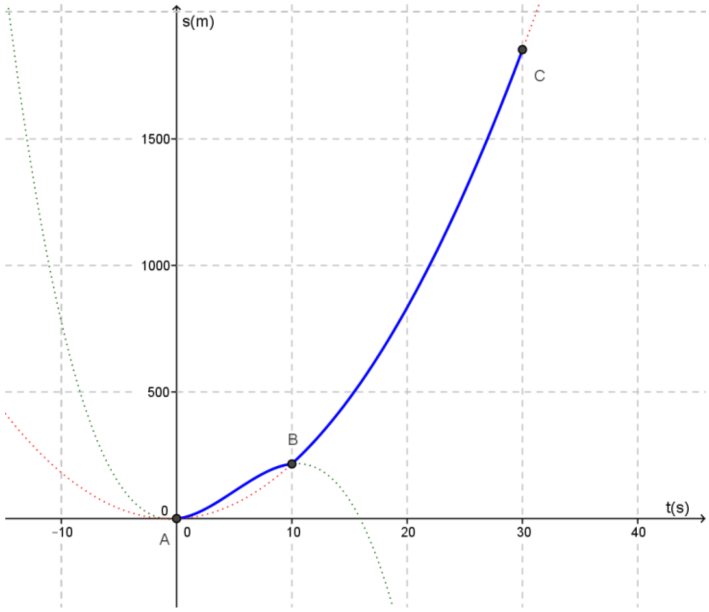
Si tratta di una parabola passante per l'origine, con asse di simmetria $t = -\frac{5}{12}$, vertice in: $V = \left(-\frac{5}{12}; -\frac{25}{72}\right)$:



La funzione di equazione:

$$\boldsymbol{s = s(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t, & se\ 0 \le t \le 10 \\ 2t^2 + \frac{5}{3}t, & se\ 10 < t \le 30 \end{cases}}$$

ha quindi il seguente grafico (tratti continui AB e BC):



La funzione è continua nell'intervallo $\mathbf{0 \le t \le 30}$ **ma non è derivabile nel punto di ascissa** $\boldsymbol{t = 10}$; infatti:

in un intorno sinistro di $t = 10$ risulta:

$$s'(t) = D\left(-\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t\right) = -t^2 + 10t + 5 \quad \Longrightarrow \quad s'_-(10) = 5$$

In un intorno destro di $t = 10$ risulta:

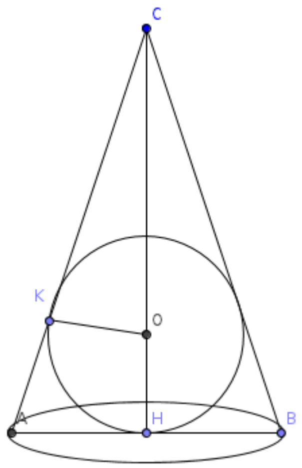
$$s'(t) = D\left(2t^2 + \frac{5}{3}t\right) = 4t + \frac{5}{3} \quad \Longrightarrow \quad s'_+(10) = \frac{125}{3}$$

Essendo $s'_-(10) \neq s'_+(10)$ la funzione non è derivabile per $t = 10$ (in particolare abbiamo un punto angoloso). Ciò equivale a dire che la velocità del meteorite prima dell'urto e dopo l'urto è diversa.

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri

SIMULAZIONE - 25 FEBBRAIO 2015 - PROBLEMA 2

Consideriamo il cono circoscritto alla sfera di raggio R



$CH = h > 2R, \quad AH = r > R$

1) 2)

Dobbiamo determinare il cono di superficie totale minima.

La superficie totale del cono è data da:

$S = \pi r^2 + \pi \cdot r \cdot a$, essendo r ed a rispettivamente il raggio e l'apotema del cono.

Detta h l'altezza del cono, risulta:

$S = \pi r^2 + \pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2}$

Notiamo che i triangoli AHC e KOC sono simili, quindi risulta:

CH:AH=CK:KO   e risulta:

CH=h,   AH=r, $CK = \sqrt{CO^2 - KO^2} = \sqrt{(h-R)^2 - R^2} = \sqrt{h^2 - 2hR}$, KO=R.

Quindi:

$h: r = \sqrt{h^2 - 2hR} : R \quad \Rightarrow \quad r = \frac{h \cdot R}{\sqrt{h^2 - 2hR}} \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{h^2 R^2}{h^2 - 2hR}$,   pertanto:

$$S=\pi r^2+\pi\cdot r\cdot\sqrt{h^2+r^2}=\pi\cdot\left(r^2+\sqrt{r^2(h^2+r^2)}\right)=$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{h^2R^2}{h^2-2hR}+\sqrt{\frac{h^2R^2}{h^2-2hR}\cdot\left(h^2+\frac{h^2R^2}{h^2-2hR}\right)}\right)=$$

$$=\ \pi\cdot\left(\frac{h^2R^2}{h^2-2hR}+\sqrt{\frac{h^2R^2}{h^2-2hR}\cdot\left(\frac{h^4-2h^3R+h^2R^2}{h^2-2hR}\right)}\right)=$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{h^2R^2}{h^2-2hR}+\frac{hR}{h^2-2hR}\cdot\sqrt{h^4-2h^3R+h^2R^2}\right)=$$

$$=\ \pi\cdot\left(\frac{h^2R^2}{h^2-2hR}+\frac{h^2R}{h^2-2hR}\cdot\sqrt{h^2-2hR+R^2}\right)=\pi\cdot\left(\frac{h^2R^2}{h^2-2hR}+\frac{h^2R}{h^2-2hR}\cdot(h-R)\right)=$$

$$=\pi\cdot h^2R\cdot\frac{R+h-R}{h^2-2hR}=\pi\cdot h^2R\cdot\frac{h}{h(h-2R)}=\pi R\cdot\frac{h^2}{h-2R}\ \ con\ \ h>2R$$

S è minima se lo è:

$$y=y(h)=\frac{h^2}{h-2R}$$

Risulta:

$y'=\frac{h^2-4hR}{(h-2R)^2}\geq 0\ \ se\ \ h^2-4hR\geq 0\ :\ \ \ h\leq 0\ \ oppure\ \ h\geq 4R$ quindi y è crescente se

$h>4R$, decrescente se $2R<h<4R$; pertanto y (e quindi S) è minima se $h=4R$: per tale valore di h si ottiene:

$$r=\frac{h\cdot R}{\sqrt{h^2-2hR}}=\frac{4R^2}{\sqrt{8R^2}}=R\sqrt{2}$$

3)

Indicata con $R_1(t)$ la resistenza all'usura della prima pellicola in funzione del tempo t (in anni), e con R_0 la resistenza all'usura per t=0, dato che ogni anno la pellicola perde il 3% della resistenza all'usura che ha a inizio anno, risulta:

$R_1(t)=R_0-0.03\cdot R_0=R_0\cdot(1-0.03)$ dopo 1 anno (t=1)
$R_1(t)=R_0\cdot(1-0.03)-0.03\cdot R_0\cdot(1-0.03)=R_0\cdot(1-0.03)^2$ dopo 2 anni (t=2)

In generale, dopo t anni, risulta:

$R_1(t) = R_0 \cdot (1 - 0.03)^t = R_0 \cdot 0.97^t$

Indicata con $R_2(t)$ la resistenza all'usura della seconda pellicola in funzione del tempo t (in anni), e con R_0 la resistenza all'usura per t=0, dato che ogni anno la pellicola perde il 3% della resistenza all'usura iniziale, risulta:

$R_2(t) = R_0 - 0.02 \cdot R_0 = R_0 \cdot (1 - 0.02)$ dopo 1 anno (t=1)
$R_2(t) = R_0 \cdot (1 - 0.02) - 0.02 \cdot R_0 = R_0 \cdot (1 - 2 \cdot 0.02)$ dopo 2 anni (t=2)

In generale, dopo t anni, risulta:

$R_2(t) = R_0 \cdot (1 - 0.02 \cdot t)$

Sappiamo che la pellicola deve essere cambiata quando la sua resistenza all'usura risulta inferiore al 30% della sua resistenza iniziale (che è la stessa per entrambe le pellicole).

La prima pellicola deve essere cambiata quando:

$R_0 \cdot 0.97^t < 0.30 \cdot R_0$ da cui $0.97^t < 0.30$, $t \cdot \ln(0.97) < \ln(0.30)$, $t > \frac{\ln(0.30)}{\ln(0.97)} \cong 39.53$

Quindi la prima pellicola deve essere cambiata dopo 39.53 anni.

La seconda pellicola deve essere cambiata quando:

$R_0 \cdot (1 - 0.02 \cdot t) < 0.30 \cdot R_0$ da cui $1 - 0.02 \cdot t < 0.30$, $t > \frac{1-0.30}{0.02} = 35$

Quindi la seconda pellicola deve essere cambiata dopo 35 anni.

Essendo il costo unitario delle due pellicole lo stesso, è più conveniente scegliere la prima pellicola, che deve essere sostituita dopo 39.53 anni, mentre la seconda deve essere sostituita dopo 35 anni.

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri