Calcolo Combinatorio

- **Principio del contare**

Se una prima scelta può essere effettuata in i_1 modi diversi, e una seconda scelta può essere effettuata in i_2 modi diversi, ecc… e una n-esima scelta può essere effettuata in i_n modi diversi, allora la successione di scelte può essere compiuta in $i_1 \cdot i_2 \cdot \ldots \cdot i_n$ modi diversi.

$$\boxed{i_1}\ \boxed{i_2}\ \boxed{\ldots}\ \boxed{\ldots}\ \boxed{i_n}$$

Esempio: *Se il mio armadio contiene 3 maglioni, 2 paia di scarpe e 6 jeans, in quanti modi mi posso vestire?*

$$\boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{6} \quad = \quad 36$$

La prima scelta è: che maglione scelgo? (3 possibilità). La seconda scelta è: che paio di scarpe scelgo? (2 possibilità). La terza scelta è: che jeans scelgo? (6 possibilità).

Esempio: *Quanti divisori ha il numero* $17640 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$*?*

$$\boxed{4}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{3} \quad = \quad 72$$

Infatti ogni divisore si può ottenere a partire dalla scelta di un sottoinsieme dei suoi fattori primi (con esponente compreso tra 0 e il massimo esponente con cui quel fattore compare nella scomposizione). La prima scelta è: con che esponente considero il fattore 2? (4 possibilità: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$*). La seconda scelta è: con che esponente considero il fattore 3? (3 possibilità:* $3^0, 3^1, 3^2$*)...*

Esempio: *Quanti sono i possibili sottoinsiemi di un insieme con* n *elementi?*

$$\underbrace{\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{\ldots}\ \boxed{2}}_{n \text{ volte}} \quad = \quad 2^n$$

Infatti ogni sottoinsieme si può ottenere scegliendo, di volta in volta, se ciascun elemento dell'insieme fa parte del sottoinsieme oppure no. La prima scelta è: il primo elemento dell'insieme fa parte del sottoinsieme? (2 possibilità: sì o no). La seconda scelta è: il secondo elemento dell'insieme fa parte del sottoinsieme? (2 possibilità: sì o no)…
In simboli si scrive che la cardinalità dell'insieme delle parti di un insieme A è pari a: $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$.

- **Permutazioni**

P_n conta in quanti modi si possono ordinare n elementi distinti.

$$P_n \quad = \quad \boxed{n}\ \boxed{n\text{-}1}\ \boxed{\ldots}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1} \quad = \quad n!$$

dove $n!$ è il *fattoriale di* n, che si definisce nel seguente modo:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$
$$1! = 1$$
$$0! = 1$$

Esempio: *Quanti sono gli anagrammi della parola FIORE?*

$$P_5 \quad = \quad \boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1} \quad = \quad 5! \quad = \quad 120$$

Infatti ogni anagramma si può ottenere scegliendo, una per volta, le lettere che compongono la parola. La prima scelta è: che lettera scelgo in prima posizione? (5 possibilità: F, I, O, R, E). La seconda scelta è: che lettera scelgo in seconda posizione? (4 possibilità: 5 lettere meno quella scelta precedentemente)...

● Permutazioni con ripetizione

P'_n conta in quanti modi si possono ordinare n elementi, tra cui i_1 indistinguibili tra di loro, i_2 indistinguibili tra di loro… e i_k indistinguibili tra di loro.

$$P'_n = \frac{\boxed{n}\ \boxed{n\text{-}1}\ \boxed{\dots}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_k!} = \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_k!}$$

Esempio: *Quanti sono gli anagrammi della parola GIOCO?*

$$P'_5 = \frac{\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}}{2!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

Infatti con una permutazione semplice, che non tiene conto della presenza dei due elementi indistinguibili (le due O: O_1 e O_2) ogni anagramma sarebbe contato $2!$ volte (tante volte quanti sono i modi in cui possono permutare le due O: ad esempio, O_1GO_2IC e O_2GO_1IC). Pertanto il risultato della permutazione semplice va diviso per $2!$.

Esempio: *Quanti sono gli anagrammi della parola NONNO?*

$$P'_5 = \frac{\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}}{2! \cdot 3!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

Infatti con una permutazione semplice, che non tiene conto della presenza degli elementi indistinguibili (le due O e le tre N: O_1 e O_2, N_1, N_2 e N_3) ogni anagramma sarebbe contato $2! \cdot 3!$ volte (tante volte quanti sono i modi in cui possono permutare le due O e le tre N: ad esempio, $O_1N_1O_2N_3N_2$ e $O_2N_3O_1N_1N_2$). Pertanto il risultato della permutazione semplice va diviso per $2! \cdot 3!$.

Esempio: *Si dispone di 5 palline (indistinguibili) e 8 cassetti. In quanti modi si possono inserire le palline nei cassetti, in modo che ogni cassetto contenga al più una pallina?*

$$P'_8 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

Infatti, detto P un cassetto con pallina e V un cassetto vuoto, il problema è equivalente a contare gli anagrammi della parola PPPPPVVV.

● Disposizioni

$D_{n,k}$ conta quanti insiemi <u>ordinati</u> di k elementi si possono formare a partire da un insieme di n elementi.
(ad es. ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA sono contati una volta ciascuno).

$$D_{n,k} = \underbrace{\boxed{n}\ \boxed{n\text{-}1}\ \boxed{\dots}\ \boxed{n\text{-}k\text{+}1}}_{k \text{ fattori}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esempio: *Quanti sono i possibili podi (prime 3 posizioni) in una gara con 10 corridori?*

$$D_{10,3} = \boxed{10}\ \boxed{9}\ \boxed{8} = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$$

Infatti ogni possibile podio si può ottenere scegliendo, uno per volta, i corridori che compongono il podio. La prima scelta è: che corridore scelgo in prima posizione? (10 possibilità). La seconda scelta è: che corridore scelgo in seconda posizione? (9 possibilità: 10 meno quello scelto precedentemente). La terza scelta è: che corridore scelgo in terza posizione? (8 possibilità: 10 meno i due scelti precedentemente).

- **Combinazioni**

$C_{n,k}$ conta quanti insiemi <u>non ordinati</u> di k elementi si possono formare a partire da un insieme di n elementi. (ad es. ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA sono contati una volta sola).

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{\overbrace{\boxed{n}\ \boxed{n\text{-}1}\ \boxed{\dots}\ \boxed{n\text{-}k\text{+}1}}^{k\ \text{fattori}}}{k!} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Esempio: *Quante sono le possibili squadre di basket (5 giocatori) che si possono formare a partire da una rosa di 8 giocatori?*

$$C_{8,5} = \frac{\boxed{8}\ \boxed{7}\ \boxed{6}\ \boxed{5}\ \boxed{4}}{5!} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$$

Infatti con la disposizione $D_{8,5}$, che conta il numero di insiemi <u>ordinati</u> di 5 giocatori che si possono formare a partire da un insieme di 8 giocatori , ogni squadra sarebbe contata $5!$ volte (tante volte quanti sono i modi in cui possono permutare ABCDE: ad esempio, ABCDE, BECDA…). Pertanto il risultato della disposizione va diviso per $5!$.

Esempio: *Quante sono le possibili strette di mano tra 10 persone?*

$$C_{10,2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$$

Infatti il problema è equivalente a contare i gruppi di 2 persone che si possono formare a partire da un insieme di 10 persone (ogni gruppo che si può formare corrisponde ad una stretta di mano).

Esempio: *Qual è il coefficiente numerico del termine $a^k b^{n-k}$ nello sviluppo di $(a+b)^n$?*

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Infatti, espandendo la potenza:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n\ \text{volte}}$$

si può notare che lo sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale alla somma di tutti i possibili termini che si ottengono scegliendo di volta in volta da ciascuno degli n fattori $(a+b)$ uno dei due monomi (o a o b) e facendone il prodotto. In particolare i termini che contribuiscono al termine $a^k b^{n-k}$ sono quelli che si ottengono scegliendo k volte il monomio a (e per esclusione n-k volte il monomio b). Il problema si riconduce allora a contare quanti insiemi non ordinati di k elementi si possono formare a partire da un insieme di n elementi.
Pertanto si può scrivere che (formula del binomio di Newton):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$