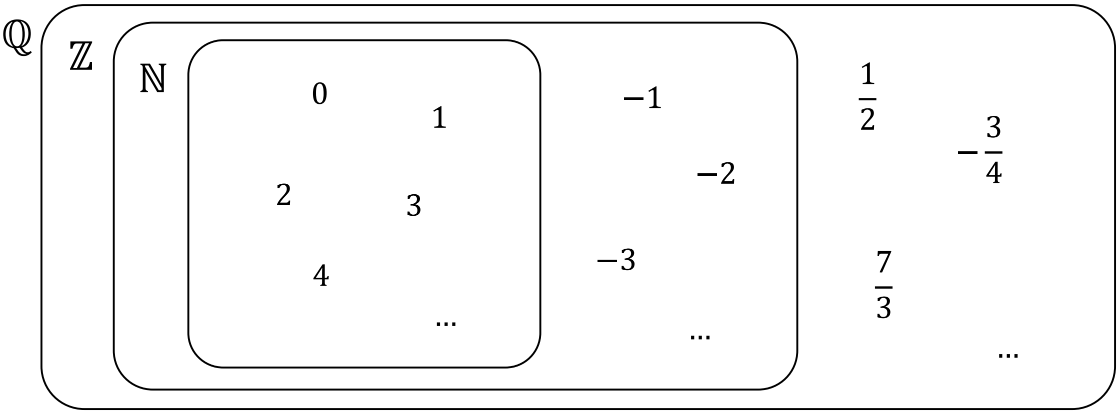
Insiemi numerici

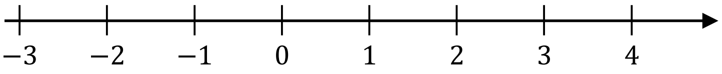


$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\dots\}$ = insieme dei *numeri naturali*
$\mathbb{Z}$ = insieme dei *numeri interi* (formato dall'unione dei numeri naturali e dei numeri interi negativi)
$\mathbb{Q}$ = insieme dei *numeri razionali* (formato da tutti i numeri che si possono scrivere sotto forma di frazione)

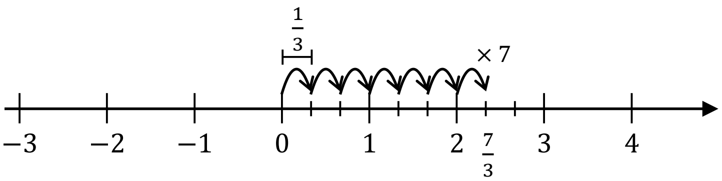
Alcune definizioni

Due numeri si dicono *concordi* se hanno lo stesso segno.	4 e 13 sono concordi
Due numeri si dicono *discordi* se hanno segno opposto.	7 e -2 sono discordi
Due numeri si dicono *opposti* se hanno segno opposto e sono uguali in valore assoluto.	3 e -3 sono opposti
Due numeri si dicono *reciproci* se il loro prodotto è 1.	6 e $\frac{1}{6}$ sono reciproci
Il *successivo* di un numero intero n è il numero $n+1$.	8 è il successivo di 7 -5 è il successivo di -6
Il *precedente* di un numero intero n è il numero $n-1$.	3 è il precedente di 4 -9 è il precedente di -8

La retta dei numeri



Per collocare una frazione sulla retta dei numeri si divide l'unità in tante parti quante indicato dal denominatore; quindi se ne considerano tante quante indicato dal numeratore, verso destra (o verso sinistra se la frazione è negativa) e partendo da zero.



Operazioni coi numeri interi

- **Operazioni coi numeri interi**

ADDIZIONE

$$\underset{\text{addendi}}{\underset{\uparrow}{a} + \underset{\uparrow}{b}} = \underset{\text{somma}}{\underset{\uparrow}{c}} \qquad a, b, c \in \mathbb{Z} \qquad 1 + 2 = 3$$

Proprietà commutativa

In un'addizione, cambiando l'ordine degli addendi il risultato non cambia.

$$a + b = b + a \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{Z} \qquad 2 + 5 = 5 + 2$$

Proprietà associativa

In un'addizione con più addendi, si possono sostituire alcuni addendi con la loro somma.

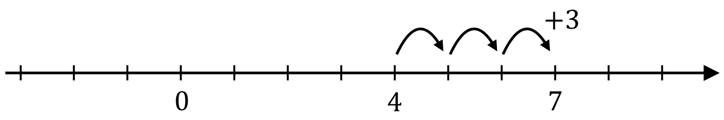
$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{Z} \qquad (1 + 2) + 4 = 1 + (2 + 4)$$

Elemento neutro

Sommando 0 a un qualsiasi numero si ottiene il numero stesso.

$$a + 0 = a \qquad \forall\, a \in \mathbb{Z} \qquad 3 + 0 = 3$$

Rappresentazione grafica



$$4 + 3 = 7$$

Sommare un numero b ad un numero a significa spostarsi sulla retta dei numeri, verso destra (o verso sinistra se b è negativo), di b posizioni partendo da a.

SOTTRAZIONE

$$\underset{\text{minuendo}}{\underset{\nearrow}{a}} - \underset{\text{sottraendo}}{\underset{\uparrow}{b}} = \underset{\text{differenza}}{\underset{\nwarrow}{c}} \qquad a, b, c \in \mathbb{Z} \qquad 5 - 3 = 2$$

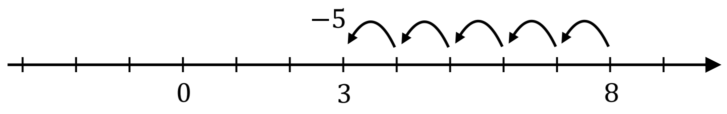
Proprietà invariantiva

In una sottrazione, sommando o sottraendo la stessa quantità al minuendo e al sottraendo il risultato non cambia.

$$a - b = (a \boxed{+\,c}) - (b \boxed{+\,c}) \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{Z} \qquad 7 - 3 = (7 + 5) - (3 + 5)$$

$$a - b = (a \boxed{-\,c}) - (b \boxed{-\,c}) \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{Z} \qquad 7 - 3 = (7 - 5) - (3 - 5)$$

Rappresentazione grafica



$$8 - 5 = 3$$

Sottrarre un numero b ad un numero a significa spostarsi sulla retta dei numeri, verso sinistra (o verso destra se b è negativo), di b posizioni partendo da a.

MOLTIPLICAZIONE

$$\underset{\text{fattori}}{\underset{\uparrow}{a} \cdot \underset{\uparrow}{b}} = \underset{\text{prodotto}}{\underset{\uparrow}{c}} \qquad a,b,c \in \mathbb{Z}$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

<u>Proprietà commutativa</u>

In una moltiplicazione, cambiando l'ordine degli addendi il risultato non cambia.

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall\, a,b \in \mathbb{Z}$$

$$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$$

<u>Proprietà associativa</u>

In una moltiplicazione con più fattori, si possono sostituire alcuni fattori con il loro prodotto.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad \forall\, a,b,c \in \mathbb{Z}$$

$$(3 \cdot 2) \cdot 4 = 3 \cdot (2 \cdot 4)$$

<u>Proprietà distributiva rispetto all'addizione e sottrazione</u>

Nel moltiplicare un numero per una somma o una differenza, si può distribuire la moltiplicazione su ogni termine dell'addizione o della sottrazione.

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \qquad \forall\, a,b,c \in \mathbb{Z}$$

$$(2 + 3) \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4$$

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c \qquad \forall\, a,b,c \in \mathbb{Z}$$

$$(2 - 3) \cdot 4 = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4$$

La distribuzione può avvenire anche «da sinistra».

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b \qquad \forall\, a,b,c \in \mathbb{Z}$$

$$4 \cdot (2 + 3) = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4$$

$$c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b \qquad \forall\, a,b,c \in \mathbb{Z}$$

$$4 \cdot (2 - 3) = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 4$$

<u>Elemento neutro</u>

Moltiplicando per 1 un qualsiasi numero si ottiene il numero stesso.

$$a \cdot 1 = a \qquad \forall\, a \in \mathbb{Z}$$

$$3 \cdot 1 = 3$$

<u>Elemento annullatore</u>

Moltiplicando per 0 un qualsiasi numero si ottiene 0.

$$a \cdot 0 = 0 \qquad \forall\, a \in \mathbb{Z}$$

$$3 \cdot 0 = 0$$

<u>Legge di annullamento del prodotto</u>

Se un prodotto è uguale a zero, allora almeno uno dei fattori sarà uguale a zero.

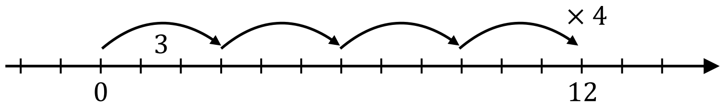
$$\begin{gathered} a \cdot b = 0 \\ \Downarrow \\ a = 0 \quad oppure \quad b = 0 \end{gathered} \qquad \forall\, a,b \in \mathbb{Z}$$

<u>Regola dei segni</u>

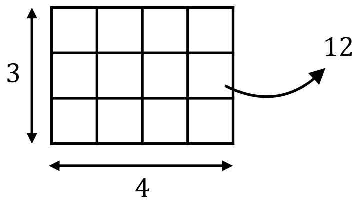
Il segno del prodotto dipende dal segno di a e b: se i segni sono concordi, il prodotto è positivo; se sono discordi, il prodotto è negativo.

·		Segno di b	
		+	-
Segno di a	+	+	-
	-	-	+

<u>Rappresentazione grafica</u>



$$3 \cdot 4 = 12$$



$$3 \cdot 4 = 12$$

Moltiplicare un numero a per un numero b significa spostarsi sulla retta dei numeri di a per un numero complessivo di b volte, partendo da 0 (il verso è determinato dalla regola dei segni). Oppure equivale a contare i quadrati che compongono un rettangolo avente base lunga a quadrati, e altezza lunga b quadrati.

DIVISIONE

$$\underset{\substack{\nearrow\\ \text{dividendo}}}{a} : \underset{\substack{\uparrow\\ \text{divisore}}}{b} = \underset{\substack{\nwarrow\\ \text{quoziente}}}{q} \text{ con resto di } \underset{\substack{\uparrow\\ \text{resto}}}{r} \qquad a, b, q, r \in \mathbb{Z} \quad b \neq 0$$

$$15 : 6 = 2 \text{ con resto di } 3$$

si può scrivere anche che $a = b \cdot q + r$

$$15 = 6 \cdot 2 + 3$$

Proprietà invariantiva

In una divisione, moltiplicando o dividendo la stessa quantità (diversa da 0) al dividendo e al divisore il risultato non cambia.

$$a : b = (a \boxed{\cdot c}) : (b \boxed{\cdot c}) \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0 \qquad 12 : 6 = (12 \cdot 2) : (6 \cdot 2)$$

$$a : b = (a \boxed{: c}) : (b \boxed{: c}) \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0 \qquad 12 : 6 = (12 : 3) : (6 : 3)$$

Proprietà distributiva da destra rispetto all'addizione e sottrazione (solo «da destra»)

Nel dividere una somma o una differenza per un numero (diverso da 0), si può distribuire la divisione su ogni termine dell'addizione o della sottrazione.

$$(a + b) : c = a : c + b : c \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0 \qquad (10 + 8) : 2 = 10 : 2 + 8 : 2$$

$$(a - b) : c = a : c - b : c \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0 \qquad (10 - 8) : 2 = 10 : 2 - 8 : 2$$

Casi particolari di divisione

- Dividendo per 1 un qualsiasi numero si ottiene il numero stesso.

$$a : 1 = a \qquad \forall\, a \in \mathbb{Z} \qquad 3 : 1 = 3$$

- Dividendo per se stesso un qualsiasi numero (diverso da 0) si ottiene 1.

$$a : a = a \qquad \forall\, a \in \mathbb{Z}, a \neq 0 \qquad 3 : 3 = 1$$

- Dividendo 0 per un qualsiasi numero (diverso da 0) si ottiene 0.

$$0 : a = 0 \qquad \forall\, a \in \mathbb{Z}, a \neq 0 \qquad 0 : 3 = 0$$

- La divisione per 0 non ha significato.

$$a : 0 \text{ non ha significato} \qquad \forall\, a \in \mathbb{Z}$$

$$3 : 0 \text{ non ha significato}$$

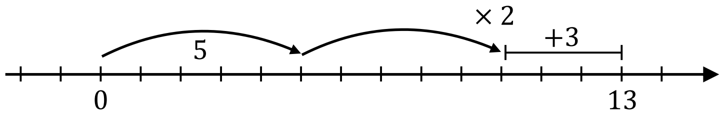
$$0 : 0 \text{ non ha significato}$$

Regola dei segni

Il segno del quoziente dipende dal segno di a e b: se i segni sono concordi, il quoziente è positivo; se sono discordi, il quoziente è negativo.

:		Segno di b	
		+	-
Segno di a	+	+	-
	-	-	+

Rappresentazione grafica



$13 : 5 = 2$ con resto di 3

Dividere un numero a per un numero b significa vedere quante volte b è contenuto interamente in a. Il resto è dato dalle unità che «avanzano» per ottenere a.

Le potenze

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{base}}}{a}^{\overset{\text{esponente}}{\swarrow}\, n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}} \qquad a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \qquad 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Inoltre, per definizione: $a^1 = a \quad \forall\, a \in \mathbb{Z}$ $\qquad 2^1 = 2$

$a^0 = 1 \quad \forall\, a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ $\qquad 2^0 = 1$

0^0 non ha significato $\qquad 0^0$ non ha significato

Proprietà delle potenze

1) Il prodotto di potenze con la stessa base è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base, e per esponente la somma degli esponenti.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad 3^4 \cdot 3^7 = 3^{11}$$

2) Il quoziente tra potenze con la stessa base è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base, e per esponente la differenza degli esponenti.

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad 3^8 : 3^6 = 3^2$$

3) Il prodotto tra potenze con lo stesso esponente è uguale ad una potenza che ha per base il prodotto delle basi, e per esponente lo stesso esponente.

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \qquad 3^7 \cdot 2^7 = 6^7$$

4) Il quoziente tra potenze con lo stesso esponente è uguale ad una potenza che ha per base il quoziente delle basi, e per esponente lo stesso esponente.

$$a^m : b^m = (a : b)^m \qquad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \qquad 6^5 : 2^5 = 3^5$$

5) La potenza di una potenza è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base, e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad (4^3)^5 = 4^{15}$$

Potenze e regola dei segni

Base positiva $\Longrightarrow$ risultato positivo $\qquad (+2)^4 = +16$

$(+2)^5 = +32$

Base negativa ed esponente pari $\Longrightarrow$ risultato positivo $\qquad (-2)^4 = +16$

Base negativa ed esponente dispari $\Longrightarrow$ risultato negativo $\qquad (-2)^5 = -32$

Attenzione: se il segno meno non è elevato a potenza (non è all'interno di una parentesi), allora non è interessato dall'operazione e quindi rimane inalterato.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{non è elevato}}}{-}2^4 = -16 \qquad (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{è elevato}}}{-}2)^4 = +16 \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{non è elevato}}}{-}2^5 = -32 \qquad (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{è elevato}}}{-}2)^5 = -32$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{non è elevato}}}{-}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{è elevato}}}{-}2)^4 = -(+16) = -16 \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{non è elevato}}}{-}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{è elevato}}}{-}2)^5 = -(-32) = +32$$

- **Multipli e divisori**

Un numero a è *multiplo* di un numero b se a si ottiene moltiplicando b per un certo numero naturale k.

15 è multiplo di 3
perché $15 = 3 \cdot 5$

I multipli di 3 sono:
$0, 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots$

Un numero a è *divisibile* per un numero b se il resto della divisione $a: b$ è zero. Si dice allora che b è un *divisore* di a.

9 è divisore di 45
perché $45: 9 = 5$ con resto 0

I divisori di 45 sono:
$1,3,5,9,15,45.$

- **Criteri di divisibilità**

Un numero è divisibile per…

- ➢ 2 …se termina per una cifra pari.

  958 è divisibile per 2
  perché è pari

- ➢ 3 o 9 …se lo è la somma delle sue cifre.

  408 è divisibile per 3
  perché $4 + 0 + 8 = 12$ lo è

- ➢ 5 …se termina per 0 o per 5.

  1895 è divisibile per 5
  perché termina per 5

- ➢ 10 …se termina per 0.

  7110 è divisibile per 10
  perché termina per 0

- ➢ 4 o 25 …se lo è il numero formato dalle sue due ultime cifre.

  7952 è divisibile per 4
  perché 52 lo è

- ➢ 11 …se la differenza tra la somma delle sue cifre di posto dispari e quella di cifre pari è divisibile per 11.

  3091 è divisibile per 11
  perché $(3 + 9) - (0 + 1) = 11$ lo è

- **Numeri primi**

Un numero è primo se è divisibile solo per 1 e per se stesso. Per definizione, 1 non è numero primo.

Numeri primi fino a 100	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
	73	79	83	89	97					

- **Scomposizione in fattori primi**

Ogni numero non primo si può scomporre, in unico modo, nel prodotto di fattori primi.

$$\begin{array}{r|l} 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

- **MCD (Massimo Comune Divisore)**

Il *MCD* di due (o più) numeri naturali è il più grande numero che è divisore di tutti i numeri dati.
Si può calcolare il MCD di due (o più) numeri naturali moltiplicando i fattori primi comuni a tutti i numeri dati, presi con il minimo esponente con cui compaiono.

$$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$
$$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$\mathrm{MCD}(504; 3780) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

- **mcm (minimo comune multiplo)**

Il *mcm* di due (o più) numeri naturali è il più piccolo numero che è multiplo di tutti i numeri dati.
Si può calcolare il mcm di due (o più) numeri naturali moltiplicando i fattori primi comuni e non comuni a tutti i numeri dati, presi con il massimo esponente con cui compaiono.

$$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$
$$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$\mathrm{mcm}(504; 3780) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

- **Numeri primi tra loro**

Due numeri si dicono primi tra loro se il loro MCD è 1.

9 e 20 sono primi tra loro
perché $\mathrm{MCD}(9; 20) = 1$

Operazioni coi numeri razionali

Frazione

Una frazione è un'espressione del tipo

$$\frac{n}{d} \begin{array}{l} \leftarrow \text{numeratore} \\ \leftarrow \text{denominatore} \end{array} \qquad \begin{array}{r} n, d \in \mathbb{Z} \\ d \neq 0 \end{array}$$

che rappresenta il risultato della divisione $n:d$ (con $d \neq 0$).

$$\frac{2}{3} = 2:3$$

Frazioni proprie, improprie e apparenti

Una frazione si dice *propria* se il numeratore è minore del denominatore. In tal caso la frazione è minore di 1.

$\frac{3}{5}$ è una frazione propria.

Una frazione si dice *impropria* se il numeratore è maggiore del denominatore. In tal caso la frazione è maggiore di 1, e può essere scritta come somma di un numero intero più una frazione propria, eseguendo la divisione con resto:

$$n:d = q \text{ con resto } r \quad \Longrightarrow \quad \frac{n}{d} = q + \frac{r}{d}$$

$\frac{13}{5}$ è una frazione impropria.

$13:5 = 2$ con resto 3, quindi

$$\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}$$

Una frazione si dice *apparente* se il numeratore è un multiplo del denominatore. In tal caso la frazione è equivalente a un numero intero.

$\frac{15}{5} = 3$ è una frazione apparente.

Riduzione di una frazione ai minimi termini

Una frazione è ridotta ai minimi termini se il suo numeratore e il suo denominatore sono primi tra loro (ovvero se il loro MCD è 1).

Per ridurre una frazione ai minimi termini si dividono numeratore e denominatore per i loro divisori comuni.

$\frac{8}{5}$ è ridotta ai minimi termini.

$$\frac{48}{30} = \frac{48:2}{30:2} = \frac{24:3}{15:3} = \frac{8}{5}$$

Riduzione di due o più frazioni al minimo comune denominatore

Ridurre due o più frazioni al minimo comune denominatore significa scrivere altrettante frazioni, ad esse equivalenti, con uno stesso denominatore (che sia il minore possibile).

Per ridurre due o più frazioni al minimo comune denominatore:

1. si riducono tutte le frazioni ai minimi termini;
2. si calcola il mcm dei loro denominatori (che sarà il minimo comune denominatore);
3. si moltiplica il numeratore di ciascuna frazione per il risultato della divisione tra minimo comune denominatore e il denominatore di quella frazione.

$$\frac{7}{12};\ \frac{25}{18};\ \frac{4}{9}$$

$$\mathrm{mcm}(12; 18; 9) = 36$$

$$36:12 = 3 \ \Rightarrow\ \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 3}{36} = \frac{21}{36}$$

$$36:18 = 2 \ \Rightarrow\ \frac{25}{18} = \frac{25 \cdot 2}{36} = \frac{50}{36}$$

$$36:9 = 4 \ \Rightarrow\ \frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 4}{36} = \frac{16}{36}$$

Operazioni con le frazioni

Per *sommare* (o *sottrarre*) due o più frazioni:

1. si riducono tutte le frazioni al loro minimo comune denominatore;
2. si sommano (o si sottraggono) i numeratori ottenuti.

$$\frac{7}{12} + \frac{25}{18} - \frac{4}{9} = \frac{21 + 50 - 16}{36} = \frac{55}{36}$$

Per *moltiplicare* due o più frazioni:

1. se possibile, si semplifica in croce (cioè si dividono il numeratore di una frazione e il denominatore dell'altra per i loro fattori comuni);
2. si moltiplicano i numeratori tra loro e si moltiplicano i denominatori tra loro.

$$\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{8}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{7}{\cancel{35}}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{14}$$

Per *dividere* una frazione per un'altra:

1. si trasforma la divisione in prodotto, invertendo la frazione che è divisore;
2. si esegue la moltiplicazione così ottenuta.

$$\frac{5}{6} : \frac{15}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{\cancel{6}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{2}{9}$$

Per *elevare a potenza* una frazione:

1. si elevano a potenza sia il numeratore che il denominatore della frazione.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

Per tutte le operazioni coi numeri razionali valgono le stesse proprietà delle operazioni con i numeri interi.

● Potenze con esponente negativo

Un numero (diverso da 0) elevato ad un esponente negativo $-n$ è uguale al reciproco di quel numero elevato alla n.

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \quad a \neq 0 \qquad 3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-n} = \left(\frac{q}{p}\right)^n \qquad p, q \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \quad p, q \neq 0 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

● Rappresentazione decimale

Un numero decimale può avere una rappresentazione:

- finita $\qquad 2{,}75$
- periodica

periodo

$$5{,}41\overline{72} = 1{,}41727272\ldots$$

antiperiodo

- aperiodica $\qquad 3{,}14159265358979\ldots$

● Da frazione a numero decimale

Per trasformare una frazione in un numero decimale basta dividere il numeratore per il denominatore.

$$\frac{13}{9} = 1{,}\overline{4}$$

● Da numero decimale a frazione

Se il numero decimale è finito: al numeratore si scrivono le cifre del numero (senza la virgola); al denominatore un 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre che seguono la virgola.

$$63{,}47 = \frac{6347}{100}$$

Se il numero decimale è periodico: al numeratore si esegue la sottrazione tra il numero formato da tutte le cifre (senza la virgola) e il numero formato dalle cifre che precedono il periodo; al denominatore si scrivono tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti 0 quanti sono le cifre dell'antiperiodo.

$$21,\overline{13} = \frac{2113 - 21}{99} = \frac{2092}{99}$$

$$2{,}30\overline{7} = \frac{2307 - 230}{900} = \frac{2077}{900}$$

Se il numero decimale è aperiodico, non può essere scritto sotto forma di frazione.