

PROBLEMI DI GEOMETRIA SVOLTI (O QUASI)

Nelle figure che seguono:

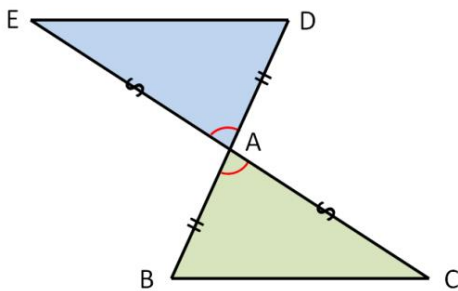
Ciò che viene disegnato basandosi esclusivamente sulla lettura del testo del problema (addobbi compresi) è colorato *in nero*.

I triangoli sui quali viene applicato un criterio di congruenza nel corso della dimostrazione sono evidenziati *in verde e blu*.

Eventuali altri addobbi rappresentanti proprietà che discendono da altri teoremi noti o che sono frutto di argomentazioni logiche elaborate durante la dimostrazione sono colorati *in rosso*.

Problema 1

Dato il triangolo ABC, prolunga i lati AB e AC, dalla parte di A, di due segmenti $AD \cong AB$ ed $AE \cong AC$. Dimostra che i segmenti BC e DE sono congruenti.



Hp

$$AB \cong AD$$

$$AC \cong AE$$

Th

$$BC \cong DE$$

Dim

I triangoli ABC e ADE sono congruenti per il 1° criterio di congruenza. Infatti:

- $AB \cong AD$ per ipotesi
- $AC \cong AE$ per ipotesi
- $\widehat{BAC} \cong \widehat{DAE}$ perché angoli opposti al vertice

In particolare, $BC \cong DE$.

CVD

Commento 1. Prima di concentrarti sulla dimostrazione, spendi un po' di tempo ad addobbare il disegno, scovando proprietà che non sono esplicitate nel testo. Cerca angoli opposti al vertice (che sono congruenti), triangoli isosceli (che hanno gli angoli alla base congruenti), somme o differenze di segmenti congruenti (che sono congruenti a loro volta)...

[Es. In questo caso si nota che gli angoli BAC e DAE sono opposti al vertice, e quindi congruenti.]

Commento 2. Quando un problema chiede di dimostrare la congruenza tra due segmenti (o tra due angoli) è utile cercare in figura due triangoli potenzialmente congruenti che abbiano come lati quei due segmenti. Se riuscirai a dimostrare con i criteri di congruenza che quei due triangoli sono effettivamente congruenti, da ciò deriverà che anche quei due segmenti, in particolare, sono congruenti.

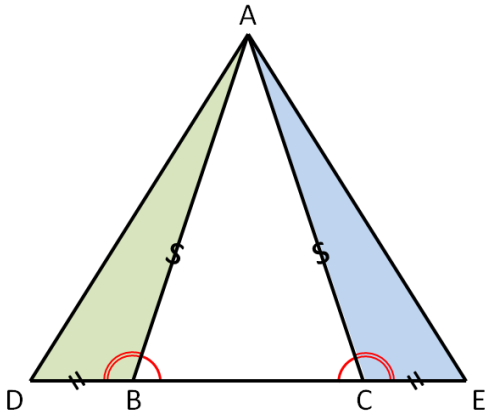
[Es. In questo caso, dimostrando la congruenza dei triangoli ABC e ADE deriva la congruenza dei loro lati BC e DE.]

Commento 3. Una volta individuati due triangoli potenzialmente congruenti, come si fa a dimostrare che sono effettivamente congruenti? Applicando uno dei tre criteri di congruenza, e cioè mostrando che i due triangoli in questione hanno una terna di elementi (lato-angolo-lato, angolo-lato-angolo oppure lato-lato-lato) ordinatamente congruenti. E' una buona strategia passare in rassegna, una dopo l'altra, tutte e tre le coppie di lati e tutte e tre le coppie di angoli dei due triangoli, chiedendosi se c'è qualche teorema o argomentazione logica che garantisca la loro congruenza. L'occhio deve diventare esperto nel muoversi da un lato (o angolo) del primo triangolo al corrispondente lato (o angolo) del secondo triangolo!

[Es. Posso dimostrare che i lati AB e AD sono congruenti? (Sì, per ipotesi). E i lati BC e DE? (...per il momento no). E i lati CA e EA? (Sì, per ipotesi). E gli angoli ABC e ADE? (...per il momento no). E gli angoli BCA e DEA? (...per il momento no). E gli angoli CAB e EAD? (Sì, sono opposti al vertice).]

Problema 2

Dato il triangolo ABC, isoscele sulla base BC, prolunga il lato BC di due segmenti congruenti BD e CE. Dimostra che il triangolo ADE è isoscele.



Hp

$$AB \cong AC$$

$$BD \cong CE$$

Th

ADE è isoscele

Dim

I triangoli ABD e ACE sono congruenti per il 1° criterio di congruenza. Infatti:

- $AB \cong AC$ per ipotesi
- $DB \cong CE$ per ipotesi
- $\widehat{ABD} \cong \widehat{ACE}$ perché supplementari di angoli congruenti (e cioè di \widehat{ABC} e \widehat{ACB} , che sono congruenti perché angoli alla base di un triangolo isoscele)

In particolare $AD \cong AE$, quindi il triangolo ADE è isoscele.

CVD

Commento 4. Per dimostrare che un triangolo è isoscele, puoi dimostrare che ha due lati congruenti OPPURE che ha due angoli congruenti (infatti il teorema del triangolo isoscele afferma che un triangolo è isoscele se e solo se ha due angoli congruenti).

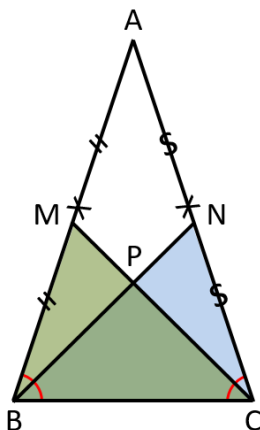
[Es. In questo caso abbiamo dimostrato che ADE è isoscele perché ha i lati AD e AE congruenti.]

Commento 5. Quando cerchi i due triangoli su cui applicare un criterio di congruenza, possibilmente sceglili in modo che alcuni dei loro elementi (lati o angoli) siano già "addobbati": vuol dire che di loro conosci già qualche proprietà che ti potrebbe essere utile nella dimostrazione.

[Es. Dei triangoli evidenziati in verde erano già addobbati la coppia di lati AB/AC e la coppia di lati BD/CE.]

Problema 3

Dimostra che, in un triangolo isoscele, le mediane relative ai lati obliqui sono congruenti.



Hp

$$AB \cong AC$$

$$AM \cong MB$$

$$AN \cong NC$$

Th

$$BN \cong CM$$

Dim

I triangoli BCM e CBN sono congruenti per il 1° criterio di congruenza. Infatti:

- $BM \cong CN$ perché metà di segmenti congruenti (e cioè di AB e AC)
- BC è in comune
- $\widehat{MBC} \cong \widehat{NCB}$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele

In particolare $BN \cong CM$.

CVD

Commento 6. Il punto medio di un segmento divide il segmento in due segmenti congruenti. La bisettrice di un angolo divide l'angolo in due angoli congruenti. Ricordalo quando devi addobbare il disegno e scrivere le ipotesi o la tesi.

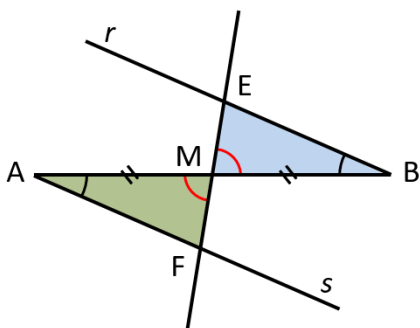
[Es. Dire che CM è la mediana relativa al lato AB equivale a dire che le due parti in cui divide il lato, AM e BM, sono congruenti: questo infatti è ciò che è stato scritto nell'ipotesi. Analogamente per la mediana BN.]

Commento 7. I due triangoli su cui puoi applicare i criteri di congruenza possono anche sovrapporsi parzialmente uno all'altro. Prima di concentrarti sulla dimostrazione, cerca nel disegno tutti i triangoli che vi compaiono.

[Es. Coppie di triangoli potenzialmente congruenti possono essere: BPM e CPN, ABN e ACM (parzialmente sovrapposti), e infine DAC e EAB (parzialmente sovrapposti). Di questi ultimi conosciamo abbastanza elementi per poter applicare un criterio di congruenza (in realtà, anche la coppia ABN/ACM avrebbe potuto essere utilizzata).]

Problema 4

Dagli estremi di un segmento AB traccia due semirette r ed s , situate da parti opposte rispetto alla retta AB, che formino angoli congruenti con il segmento AB. Dal punto medio M di AB traccia una retta che interseca r ed s rispettivamente in E ed F. Dimostra che M è il punto medio di EF.



Hp

$$\widehat{BAF} \cong \widehat{ABE}$$
$$AM \cong MB$$

Th

$$EM \cong MF$$

Dim

I triangoli MAF e MBE sono congruenti per il 2° criterio di congruenza. Infatti:

- $AM \cong MB$ per ipotesi
- $\widehat{MAF} \cong \widehat{MBE}$ per ipotesi
- $\widehat{FMA} \cong \widehat{EMB}$ perché angoli opposti al vertice

In particolare $EM \cong MF$.

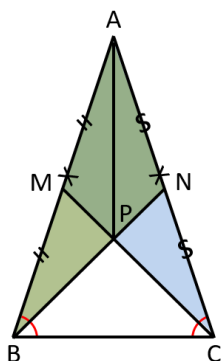
CVD

Commento 8. Il disegno è l'oggetto più utile nella risoluzione del problema. Deve essere grande e gli addobbi devono evidenziare tutte le relazioni che hai ricavato dal testo o che ricaverai nel corso della dimostrazione (è importante continuare ad aggiornare il disegno man mano che procedi nella dimostrazione!). Fai in modo che il tuo disegno sia il più generale possibile (ad esempio, se devi disegnare un triangolo qualunque, non farlo isoscele o rettangolo... se devi disegnare un angolo qualunque, non farlo retto...): in questo modo eviterai di trarre delle conclusioni che sarebbero vere solo in casi particolari, ma non nel caso generale.

[Es. La retta passante per M è stata tracciata in modo da formare un angolo qualunque (non retto) con AB.]

Problema 5

Sia ABC un triangolo isoscele di base BC e sia P il punto di intersezione delle mediane BN e CM. Dimostra che AP è la bisettrice dell'angolo al vertice del triangolo isoscele.



Hp

- $AB \cong AC$
- $AM \cong MB$
- $AN \cong NC$

Th

$$\widehat{BAP} \cong \widehat{CAP}$$

Dim

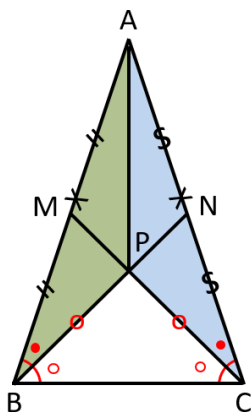
I triangoli BAN e CAM sono congruenti per il 1° criterio di congruenza. Infatti:

- $AB \cong AC$ per ipotesi
- $AN \cong AM$ perché metà di segmenti congruenti (e cioè di AB e AC)
- \widehat{BAC} è in comune

In particolare $\widehat{ABN} \cong \widehat{ACM}$.

Gli angoli \widehat{PBC} e \widehat{PCB} sono congruenti, essendo differenza di angoli congruenti (e cioè $\widehat{ABC} - \widehat{ABN} \cong \widehat{ACB} - \widehat{ACM}$).

Il triangolo PBC è allora isoscele per il teorema del triangolo isoscele (infatti i suoi angoli alla base \widehat{PBC} e \widehat{PCB} sono congruenti). In particolare, i suoi lati obliqui PB e PC sono congruenti.



I triangoli ABP e ACP sono congruenti per il 1° criterio di congruenza.

Infatti:

- $AC \cong AB$ per ipotesi
- $PB \cong PC$ per dimostrazione precedente
- $\widehat{ABP} \cong \widehat{ACP}$ per dimostrazione precedente

In particolare $\widehat{BAP} \cong \widehat{CAP}$.

CVD

Commento 9. Nei problemi più articolati, alcune conclusioni che trarrai nel corso della dimostrazione saranno usate a loro volta come base per altre dimostrazioni. In questo modo la dimostrazione assume la forma di una catena di passaggi logici che porta dalle assunzioni iniziali (le ipotesi) all'obiettivo finale (la tesi).

Una buona strategia per costruire questa catena può essere quella di partire dalla fine (cioè dalla tesi). Prova a porti questa domanda: "Che cosa mi può essere utile per dimostrare la tesi?" e procedi a ritroso, sostituendo di fatto il tuo obiettivo finale (la tesi) con obiettivi sempre più abordabili, cioè sempre più vicini alle ipotesi.

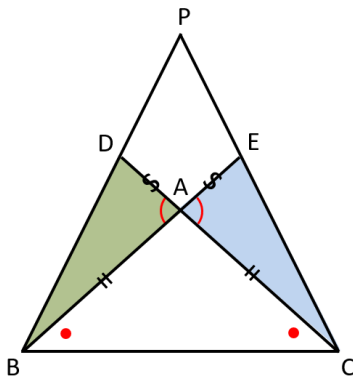
[Es. Che cosa può essere utile per dimostrare la congruenza tra gli angoli BAP e CAP? Potrebbe essere utile la congruenza tra i triangoli BAP e CAP. Questa può essere dimostrata con un criterio di congruenza, se si sapesse che i segmenti PB e PC sono congruenti. Ciò può essere dimostrato se si sapesse che il triangolo PBC è isoscele. Ciò può essere dimostrato se si sapesse che gli angoli PBC e PCB sono congruenti. Ciò può essere dimostrato se si sapesse che gli angoli PBA e PCA sono congruenti. Ciò può essere dimostrato se si sapesse che i triangoli BAP e CAP sono congruenti...]

Ma può rivelarsi efficace anche partire dall'inizio (cioè dall'ipotesi). Prova a porti questa domanda: "Con le ipotesi che ho a disposizione, c'è qualcosa che posso dedurre?". In questo caso è importante aggiornare il disegno, addobbandolo man mano che scopri nuove relazioni.

[Es. I segmenti AM e MB sono congruenti perché AB è stato diviso in due parti uguali dal punto medio M. Allo stesso modo, i segmenti AN e NC sono congruenti perché AC è stato diviso in due parti uguali dal punto medio N. Però, siccome i segmenti AB e AC sono congruenti, allora anche le loro metà sono congruenti: $AM \cong MB \cong AN \cong NC$ (abbiamo dimostrato che i segmenti contrassegnati con la S e con il doppio trattino sono congruenti e quindi potresti usare lo stesso simbolo per tutti e quattro).]

Problema 6

E' dato il triangolo isoscele ABC di base BC. Prolunga, oltre il vertice A, i due lati BA e CA rispettivamente di due segmenti congruenti AE e AD e, supponendo che le due rette BD e CE non siano parallele, sia P il loro punto di intersezione. Dimostra che $PD \cong PE$.



Hp

$AB \cong AC$
 $AD \cong AE$

Th

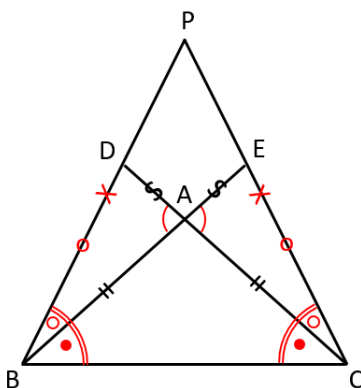
$PD \cong PE$

Dim

I triangoli BAD e CAE sono congruenti per il 1° criterio di congruenza. Infatti:

- $AB \cong AC$ per ipotesi
- $AD \cong AE$ per ipotesi
- $\widehat{BAD} \cong \widehat{CAE}$ perché angoli opposti al vertice

In particolare $\widehat{DBA} \cong \widehat{ECA}$ e $BD \cong CE$.



Gli angoli \widehat{PBC} e \widehat{PCB} sono congruenti, essendo somma di angoli congruenti (e cioè $\widehat{DBA} + \widehat{ABC} \cong \widehat{ECA} + \widehat{ACB}$).

Il triangolo PBC è allora isoscele per il teorema del triangolo isoscele (infatti i suoi angoli alla base \widehat{PBC} e \widehat{PCB} sono congruenti). In particolare, i suoi lati obliqui PB e PC sono congruenti.

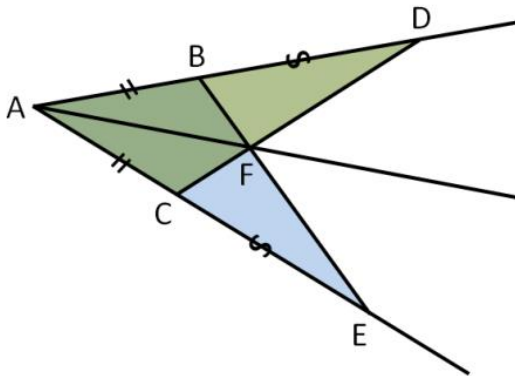
Ma allora i segmenti PE e PD sono congruenti perché sono differenza di segmenti congruenti (e cioè $PB - BD \cong PC - CE$). CVD

Commento 10. Per favorire un'interpretazione più immediata del testo della dimostrazione (utile quando la vuoi rileggere e ricontrollare) può essere utile scrivere, di sotto o di fianco ai nomi dei vari segmenti e angoli, i simboli che hai scelto nel disegno per distinguerli (il doppio trattino, la S, la X, l'archetto, il pallino pieno...).

[Es. Il terzultimo passaggio della dimostrazione si può leggere così: gli angoli contrassegnati con doppio archetto sono congruenti, essendo somma di angoli congruenti (e cioè quelli contrassegnati con pallino pieno più quelli contrassegnati con pallino vuoto).]

Problema 7

Sui lati di un angolo di vertice A si prendano due segmenti AB ed AC congruenti. Individua poi, sui lati dell'angolo, altri due segmenti congruenti BD e CE, adiacenti ai primi. Sia F il punto di intersezione di BE e CD. Dimostra che la retta AF è bisettrice dell'angolo BAC.



Hp

$$AB \cong AC$$

$$BD \cong CE$$

Th

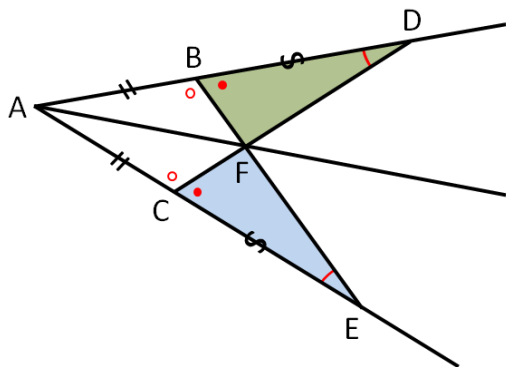
$$\widehat{EAF} \cong \widehat{DAF}$$

Dim

I triangoli DAC e EAB sono congruenti per il 1° criterio di congruenza. Infatti:

- $AC \cong AB$ per ipotesi
- $AD \cong AE$ perché somma di segmenti congruenti (e cioè $AB + BD \cong AC + CE$)
- \widehat{DAE} è in comune

In particolare $\widehat{ADC} \cong \widehat{AEB}$ e $\widehat{DCA} \cong \widehat{EBA}$.

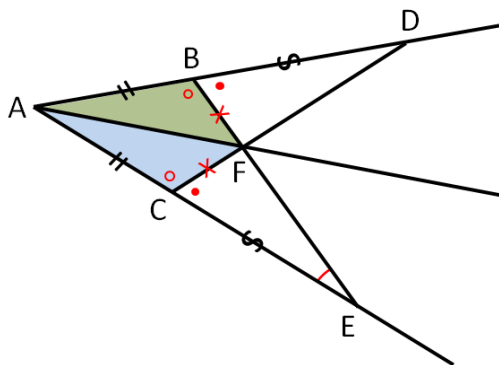


I triangoli DFB e EFC sono congruenti per il 2° criterio di congruenza.

Infatti:

- $BD \cong CE$ per ipotesi
- $\widehat{FDB} \cong \widehat{FEC}$ per dimostrazione precedente
- $\widehat{FCE} \cong \widehat{FBD}$ perché supplementari di angoli congruenti (e cioè di \widehat{DCA} e \widehat{EBA})

In particolare $BF \cong FC$.



I triangoli BAF e CAF sono congruenti per il 3° criterio di congruenza.

Infatti:

- $AB \cong AC$ per ipotesi
- $BF \cong CF$ per dimostrazione precedente
- AF è in comune

In particolare $\widehat{DAF} \cong \widehat{EAF}$.

CVD