Le quattro operazioni

1. Addizione

$$a + b = c$$

addendi somma

Proprietà commutativa
Cambiando l'ordine degli addendi, la somma non cambia.

$$a + b = b + a$$

Proprietà associativa
La somma di tre numeri non cambia, se si esegue prima la somma di due di questi addendi.

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Elemento neutro
La somma di un numero a 0 dà come risultato il numero stesso.

$$n + 0 = n$$

2. Sottrazione

$$a - b = c$$

minuendo sottraendo differenza

Proprietà invariantiva
Sommando (o sottraendo) a minuendo e sottraendo uno stesso numero, la differenza non cambia.

$$a - b = (a + c) - (b + c)$$

$$a - b = (a - c) - (b - c)$$

3. Moltiplicazione

$$a \cdot b = c$$

fattori prodotto

Proprietà commutativa
Cambiando l'ordine dei fattori, il prodotto non cambia.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Proprietà associativa
Il prodotto di tre numeri non cambia, se si esegue prima il prodotto di due di questi fattori.

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Elemento neutro
Il prodotto di un numero con 1 dà come risultato il numero stesso.

$$n + 0 = n$$

Elemento assorbente
Il prodotto di un numero con 0 dà come risultato 0.

$$n \cdot 0 = 0$$

Proprietà distributiva (rispetto all'addizione e sottrazione)
Quando si deve moltiplicare una somma (o una differenza) per un numero, è possibile "distribuire" la moltiplicazione a tutti i termini della somma (o differenza).

$$(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c$$

Grazie alla proprietà commutativa della moltiplicazione, vale anche:

$$c \cdot (a \pm b) = c \cdot a \pm c \cdot b$$

4. Divisione

$$\underset{\text{dividendo}}{a} : \underset{\text{divisore}}{b} = \underset{\text{quoziente}}{c} \qquad \text{o anche} \qquad \frac{\overset{\text{numeratore}}{a}}{\underset{\text{denominatore}}{b}} = \underset{\text{rapporto}}{c}$$

Proprietà invariantiva
Moltiplicando (o dividendo) dividendo e divisore per uno stesso numero, il quoziente non cambia.

$$a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c) \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

$$a : b = (a : c) : (b : c) \qquad \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

Proprietà distributiva (rispetto all'addizione e sottrazione)
Quando si deve dividere una somma (o una differenza) per un numero, è possibile "distribuire" la divisione a tutti i termini della somma (o differenza).

$$(a \pm b) : c = a : c \pm b : c \qquad \frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$$

Poichè la divisione non ha la proprietà commutativa, NON vale:

$$c : (a \pm b) = c : a \pm c : b \quad \text{✗ ERRATO} \qquad \frac{c}{a \pm b} = \frac{c}{a} \pm \frac{c}{b} \quad \text{✗ ERRATO}$$

Elemento neutro
La divisione di un numero per 1 dà come risultato il numero stesso.

$$n : 1 = n$$

Divisioni particolari
La divisione di 0 per un qualsiasi numero (diverso da 0) dà come risultato 0.

$$0 : n = 0$$

Non si può dividere per 0.

$$n : 0 \text{ non ha significato}$$

NOTE IMPORTANTI - Le quattro operazioni

- In un prodotto (o in una divisione), spostando il segno meno da un fattore all'altro non cambia il risultato. Puoi anche spostarlo davanti al prodotto (o alla divisione).

  $(-3)\cdot 7 = 3\cdot(-7) = -\,3\cdot 7$

  $(-3) : 7 = 3 : (-7) = -\,3 : 7$

  $\frac{-3}{7} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}$

- In presenza di una sequenza di prodotti (o divisioni), questi vanno affrontati nell'ordine in cui compaiono, da sinistra verso destra.

  $\mathbf{16} : \mathbf{4} : 2 = 4 : 2 = 2$ ✓ CORRETTO $16 : \mathbf{4} : \mathbf{2} = 16 : 2 = 8$ ✗ ERRATO

  $\mathbf{16} : \mathbf{4}\cdot 2 = 4\cdot 2 = 8$ ✓ CORRETTO $16 : \mathbf{4}\cdot\mathbf{2} = 16 : 8 = 2$ ✗ ERRATO

- Non esiste la proprietà distributiva della moltiplicazione (o divisione) rispetto ad un'altra moltiplicazione (o divisione). Per risolvere l'espressione, devi necessariamente svolgere prima le operazioni dentro la parentesi.

  $(4\cdot 2)\cdot 3 = (4\cdot 3)\cdot(2\cdot 3)$ ✗ ERRATO $(8 : 4)\cdot 2 = (8\cdot 2) : (4\cdot 2)$ ✗ ERRATO

- Puoi usare la proprietà invariantiva della divisione per semplificare divisioni o frazioni.

  $12600 : 225 = (2^3\cdot\mathbf{3^2}\cdot\mathbf{5^2}\cdot 7) : (\mathbf{3^2}\cdot\mathbf{5^2}) = 2^3\cdot 7$

  $\frac{35}{15} = \frac{\mathbf{5}\cdot 7}{3\cdot\mathbf{5}} = \frac{7}{3}$

- Puoi usare la proprietà invariantiva della divisione solo per semplificare i fattori di una moltiplicazione presente in una frazione, e non gli addendi di un'addizione.

  $\frac{\mathbf{5}\cdot 7}{3\cdot\mathbf{5}} = \frac{7}{3}$ ✓ CORRETTO $\frac{\mathbf{5}+7}{3\cdot\mathbf{5}} = \frac{7}{3}$ ✗ ERRATO

- Puoi "spezzare" una somma o una differenza che è presente al numeratore di una frazione, ma non al denominatore.

  $\frac{3+2}{7} = \frac{3}{7} + \frac{2}{7}$ ✓ CORRETTO $\frac{7}{3+2} = \frac{7}{3} + \frac{7}{2}$ ✗ ERRATO

- Quando risolvi un'espressione, ricorda che le operazioni dentro le parentesi hanno la precedenza, e in particolare vanno svolte, nell'ordine:
  - Le potenze (a meno che non si vogliano usare le proprietà delle potenze)
  - I prodotti e le divisioni
  - Le somme e le sottrazioni

  $(\mathbf{8}+\mathbf{20}) : 4 = \mathbf{28} : 4 = 7$ ✓ CORRETTO $(8+\mathbf{20}) : \mathbf{4} = 8 + \mathbf{5} = 13$ ✗ ERRATO

  $8 + \mathbf{20} : \mathbf{4} = 8 + \mathbf{5} = 13$ ✓ CORRETTO $\mathbf{8}+\mathbf{20} : 4 = 28 : \mathbf{4} = 7$ ✗ ERRATO

  $2\cdot\mathbf{5^2} = 2\cdot\mathbf{25} = 50$ ✓ CORRETTO $\mathbf{2}\cdot\mathbf{5}^2 = \mathbf{10}^2 = 100$ ✗ ERRATO

Le potenze

Proprietà delle potenze

1. Il prodotto di due potenze con la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base, e per esponente la somma degli esponenti.
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
2. Il quoziente di due potenze con la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base, e per esponente la differenza degli esponenti.
$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad \text{o anche: } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
3. Il prodotto di due potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per base il prodotto delle basi, e per esponente lo stesso esponente.
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
4. Il quoziente di due potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per base il quoziente delle basi, e per esponente lo stesso esponente.
$$a^n : b^n = (a : b)^n \qquad \text{o anche: } \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$
5. La potenza di un'altra potenza è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Potenze particolari

Elevando ad un qualsiasi esponente (positivo) lo 0, si ottiene 0.

$$0^n = 0 \qquad \forall\, n > 0$$

Elevando ad 1 un numero (diverso da 0), si ottiene il numero stesso.

$$a^1 = a \qquad \forall\, a \neq 0$$

Elevando a 0 un qualsiasi numero (diverso da 0), si ottiene 1.

$$a^0 = 1 \qquad \forall\, a \neq 0$$

Non si può elevare 0 a 0.

0^0 non ha significato

Potenze con base negativa

Se l'esponente è pari, il risultato è sempre positivo.

n pari: $\quad (+a)^n = +\,a^n \qquad (-a)^n = +\,a^n$

Se l'esponente è dispari, il risultato ha lo stesso segno della base.

n dispari: $\quad (+a)^n = +\,a^n \qquad (-a)^n = -\,a^n$

Potenze con esponente negativo

Elevare un numero ad un esponente negativo equivale ad elevare il reciproco di quel numero allo stesso esponente cambiato di segno.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{e anche} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

NOTE IMPORTANTI - Le potenze

- Non applicare le proprietà delle potenze se le potenze sono sommate (o sottratte).

$$2^3 + 2^5 = 2^8$$ ✘ ERRATO

- Non applicare le proprietà delle potenze se le potenze non hanno né la stessa base né lo stesso esponente. In particolare, non puoi semplificare in croce due frazioni che hanno esponenti diversi.

$$5^6 \cdot 2^3 = 10^9$$ ✘ ERRATO

$$\left(\frac{\mathbf{3}}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{7}{\mathbf{3}}\right)^4 = \left(\frac{7}{5}\right)^{10}$$ ✘ ERRATO

- Per la terza proprietà delle potenze (applicata "al contrario"), puoi distribuire l'esponente ai fattori di una moltiplicazione (o divisione) se la base è un prodotto. Non puoi però farlo se la base è una somma (o differenza).

$(2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$ ✔ CORRETTO $(2 + 3)^5 = 2^5 + 3^5$ ✘ ERRATO

$(2 : 3)^5 = 2^5 : 3^5$ ✔ CORRETTO $(2 - 3)^5 = 2^5 - 3^5$ ✘ ERRATO

- Le proprietà delle potenze sono particolarmente utili in caso di sequenze di prodotti (o divisioni) di potenze con uguale base: i prodotti si trasformano in somme tra gli esponenti, mentre le divisioni si trasformano in differenze tra gli esponenti. Fai attenzione ai segni quando gli esponenti sono negativi.

$$5^5 \cdot 5^7 \cdot 5^{-3} : 5^8 : 5^{-5} = 5^{5+7+(-3)-8-(-5)} = 5^{5+7-3-8+5} = 5^6$$

- Fai attenzione ai segni meno della base. Chiediti se il segno meno è elevato a potenza oppure no.

$(-2)^4 = +16$ Il segno meno è elevato alla quarta, perchè è dentro alla parentesi.

$-2^4 = -16$ Il segno meno non è elevato alla quarta (solo il 2 lo è).

- Quando svolgi una potenza con esponente negativo, la base non cambia segno.

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$ ✔ CORRETTO $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{3}{2}\right)^4$ ✘ ERRATO

- Se ti accorgi che una base è una potenza perfetta di un'altra base, ti conviene trasformarla in modo da farle assumere la stessa base.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left[\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}}\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

- Se ti accorgi che una base è il reciproco di un'altra base, ti conviene trasformarla con la definizione di potenza ad esponente negativo, in modo da farle assumere la stessa base.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{-3}} = \left(\frac{2}{3}\right)$$

- Se ti accorgi che una base è l'opposto di un'altra base, ti conviene rendere positiva la base che è negativa, in modo da farle assumere la stessa base.

  Se l'esponente è pari, puoi togliere subito il meno visto che il risultato sarebbe positivo.

  $(+2)^2 \cdot (\mathbf{-2})^{\mathbf{4}} = (+2)^2 \cdot (\mathbf{+2})^{\mathbf{4}} = (+2)^6$ (il "-" si trasforma semplicemente in "+")

  Se l'esponente è dispari, puoi spostare il meno davanti al prodotto visto che il risultato sarebbe negativo.

  $(+2)^2 \cdot (\mathbf{-2})^{\mathbf{3}} = -(+2)^2 \cdot (\mathbf{+2})^{\mathbf{3}} = -(+2)^5$ (il "-" è stato trasportato davanti al prodotto)

- A volte è conveniente scomporre in fattori primi la base di una potenza.

$$\mathbf{12}^4 = (\mathbf{2^2} \cdot \mathbf{3})^4 = (2^2)^4 \cdot 3^4 = 2^8 \cdot 3^4$$

Calcolo letterale

I monomi

Un monomio è un'espressione letterale in cui compaiono solo moltiplicazioni e potenze con numeri naturali come esponenti.

$-\frac{2}{3}x^3y^5$ ✓ 5 ✓ $3x \cdot \frac{4}{5}xy^2$ ✓ $2x + z$ ✗ $\frac{3}{x} \cdot y$ ✗ $2x^{-1}y$ ✗

Un monomio è ridotto a forma normale quando è il prodotto fra un unico numero (detto coefficiente) e delle potenze con basi letterali diverse tra loro (dette parte letterale).

Il grado di un monomio è la somma di tutti gli esponenti delle sue lettere.

Due monomi si dicono simili quando hanno la stessa parte letterale.

I polinomi

Un polinomio è una somma algebrica di monomi (detti termini del polinomio).

Un polinomio è ridotto a forma normale quando non vi compaiono termini simili.

Il grado di un polinomio è il maggiore dei gradi dei suoi termini.

Operazioni con monomi e polinomi

Somma algebrica di monomi. La somma algebrica di due monomi può essere svolta solo nel caso in cui i monomi siano simili, ed è un monomio con le seguenti caratteristiche:
- il coefficiente è la somma algebrica dei coefficienti dei monomi;
- la parte letterale è uguale alla parte letterale di tutti i monomi.

Es. $3x^2y + \frac{2}{5}x^2y - \frac{7}{5}x^2y = \left(3 + \frac{2}{5} - \frac{7}{5}\right)x^2y = \frac{15+2-7}{5}x^2y = 2x^2y$

Prodotto monomio-monomio. La moltiplicazione di due monomi è un monomio con le seguenti caratteristiche:
- il coefficiente è il prodotto dei coefficienti dei due monomi;
- la parte letterale è il prodotto delle parti letterali dei due monomi (per le proprietà delle potenze, gli esponenti di lettere uguali si sommano).

Es. $\frac{3}{5}x^3yz^2 \cdot \frac{10}{7}x^2y^2 = \frac{6}{7}x^5y^3z^2$

Divisione monomio-monomio. La divisione di due monomi è un monomio con le seguenti caratteristiche:
- il coefficiente è il quoziente dei coefficienti dei due monomi;
- la parte letterale è il quoziente delle parti letterali dei due monomi (per le proprietà delle potenze, gli esponenti di lettere uguali si sottraggono).

Il risultato non è un monomio se vi figura almeno una lettera con esponente negativo.

Es. $\left(\frac{3}{5}x^3yz^2\right) : \left(-\frac{8}{15}x^2y\right) = -\frac{9}{8}xz^2$

Potenza di un monomio. La potenza di un monomio è un monomio con le seguenti caratteristiche:
- il coefficiente è la potenza del coefficiente del monomio;
- la parte letterale è la potenza della parte letterale del monomio (per le proprietà delle potenze, gli esponenti delle lettere vengono moltiplicati per l'esponente della potenza).

Es. $\left(-\frac{2}{3}x^2y^3z\right)^3 = -\frac{8}{27}x^6y^9z^3$

Prodotto polinomio-monomio. Il prodotto di un polinomio per un monomio è il polinomio che si ottiene moltiplicando ciascun termine del polinomio per il monomio.

Es. $\left(2x^2y - \frac{3}{4}y^2z^3 + 4\right) \cdot 2xy = 4x^3y^2 - \frac{3}{2}xy^3z^3 + 8xy$

Prodotto polinomio-polinomio. Il prodotto di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ciascun termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo polinomio.

Es. $(2x-y)\cdot(3x^2z-1-3z)=6x^3z-2x-6xz-3x^2yz+y+3yz$

Divisione polinomio-monomio. La divisione di un polinomio per un monomio è il polinomio che si ottiene dividendo ciascun termine del polinomio per il monomio.

Es. $(10x^2y^3z-x^3y^3+3x^2y^2):5x^2y^2=2yz-\frac{1}{5}xy+\frac{3}{5}$

Divisione polinomio-polinomio. La divisione di un polinomio dividendo $a(x)$ per un polinomio divisore $b(x)$ si svolge tramite un particolare algoritmo. Se $a(x)$ non è divisibile per $b(x)$, l'algoritmo indicherà un resto $r(x)$ diverso da zero. Detto $q(x)$ il quoziente, vale la relazione:

$$a(x):b(x)=q(x)+\frac{r(x)}{b(x)}$$

Es. $(x^3+4x^2-7):(x^2-2)=$

Si riportano i coefficienti del polinomio dividendo $a(x)$ in colonne e ordinati per grado, avendo cura di lasciare lo spazio per i monomi il cui coefficiente è zero. Si riporta $b(x)$ nello spazio in alto a destra.

$$\begin{array}{cccc|l} +x^3 & +4x^2 & & -7 & +x^2-2 \\ \cline{5-5} & & & & \end{array}$$

1. Si divide il primo termine di $a(x)$ per il primo termine di $b(x)$. Il risultato è il primo termine del quoziente $q(x)$.

$$\begin{array}{cccc|l} +x^3 & +4x^2 & & -7 & +x^2-2 \\ \cline{5-5} & & & & +x \end{array}$$

2. Si moltiplica il termine appena ottenuto per il divisore $b(x)$ e si scrive il risultato, cambiato di segno, in colonna sotto $a(x)$. Si sommano quindi le due righe.

$$\begin{array}{cccc|l} +x^3 & +4x^2 & & -7 & +x^2-2 \\ \cline{5-5} -x^3 & & +2x & & +x \\ \cline{1-4} // & +4x^2 & +2x & -7 & \end{array}$$

3. Si ripete il procedimento con il polinomio ottenuto dalla somma.

$$\begin{array}{cccc|l} +x^3 & +4x^2 & & -7 & +x^2-2 \\ \cline{5-5} -x^3 & & +2x & & +x+4 \\ \cline{1-4} // & +4x^2 & +2x & -7 & \\ & -4x^2 & & +8 & \\ \cline{2-4} & // & +2x & +1 & \end{array}$$

Il procedimento ha termine quando dalla somma si ottiene un polinomio $r(x)$ di grado inferiore a quello di $b(x)$.

$$(x^3+4x^2-7):(x^2-2)=x+4+\frac{2x+1}{x^2-2}$$

Divisione polinomio-binomio $(x-k)$. Nel caso in cui il polinomio divisore sia un binomio nella forma $b(x)=(x-k)$, esiste un algoritmo alternativo per effettuare la divisione (ma l'algoritmo per la divisione polinomio-polinomio può essere comunque utilizzato). Detto $q(x)$ il quoziente e r il resto, vale ancora la relazione:

$$a(x):(x-k)=q(x)+\frac{r}{(x-k)}$$

Es. $(2x^3 + x^2 - 3) : (x - 2) =$

Si riportano i coefficienti del polinomio dividendo $a(x)$ in colonne e ordinati per grado, avendo cura di lasciare lo spazio per i monomi il cui coefficiente è zero. Si riporta il numero k nello spazio in basso a sinistra. Si riporta il primo coefficiente di $a(x)$ nell'ultima riga in basso. Questo è il primo coefficiente del quoziente $q(x)$.

	+2	+1	0	-3
2				
	+2			

1. Si moltiplica tale numero per k e si scrive il risultato nella colonna più a destra, sotto i coefficienti di $a(x)$.

	+2	+1	0	-3
2		+4		
	+2			

2. Si sommano i coefficienti in colonna e si scrive il risultato nell'ultima riga in basso. Il procedimento va ripetuto finché non si riempie anche l'ultima casella in basso a destra.

	+2	+1	0	-3
2		+4		
	+2	+5		

3. Si ripete il procedimento con il numero ottenuto.

	+2	+1	0	-3
2		+4	+10	+20
	+2	+5	+10	+17

Il procedimento ha termine quando si riempie la casella in basso a destra, che rappresenta r.

$$(2x^3 + x^2 - 3) : (x - 2) = 2x^2 + 5x + 10 + \frac{17}{x - 2}$$

Teorema del resto

Il resto di una divisione del tipo $a(x) : (x - k)$ è uguale ad $a(k)$.

Il simbolo $a(k)$ rappresenta il numero che si ottiene sostituendo k al posto di x nel polinomio $a(x)$.

Es. Il resto della divisione $(2x^3 + x^2 - 3) : (x - 2)$, dove $a(x) = (2x^3 + x^2 - 3)$ e $k = 2$, è:

$$a(2) = 2 \cdot (2)^3 + (2)^2 - 3 = 2 \cdot 8 + 4 - 3 = 17$$

Teorema di Ruffini

Un polinomio $a(x)$ è divisibile per un binomio $(x - k)$ se e solo se $a(k) = 0$.

Es. Il polinomio $(2x^3 + x^2 - 3)$ non è divisibile per il binomio $(x - 2)$, infatti il resto della divisione sarebbe:

$$a(2) = 2 \cdot (2)^3 + (2)^2 - 3 = 2 \cdot 8 + 4 - 3 = 17$$

Es. Il polinomio $(2x^3 + x^2 - 20)$ è divisibile per il binomio $(x - 2)$, infatti il resto della divisione sarebbe:

$$a(2) = 2 \cdot (2)^3 + (2)^2 - 20 = 2 \cdot 8 + 4 - 20 = 0$$

Prodotti notevoli

Quadrato di un binomio

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathbf{2}} = A^2 + 2AB + B^2$$

Es. $(3-z)^2 = (3)^2 + 2\cdot(3)\cdot(-z) + (-z)^2 = 9 - 6z + z^2$

Quadrato di un trinomio

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})^{\mathbf{2}} = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

Es. $(x+y-1)^2 = (x)^2 + (y)^2 + (-1)^2 + 2\cdot x\cdot y + 2\cdot x\cdot(-1) + 2\cdot y\cdot(-1) = x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y$

Cubo di un binomio

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathbf{3}} = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Es. $(x-2)^3 = (x)^3 + 3\cdot(x)^2\cdot(-2) + 3\cdot(x)\cdot(-2)^2 + (-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Somma di due monomi per la loro differenza

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = A^2 - B^2$$

Es. $(a-3x)(a+3x) = (a)^2 - (3x)^2 = a^2 - 9x^2$

Potenze di un binomio

$(A+B)^0 = 1$

$(A+B)^1 = A + B$

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

$(A+B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$

$(A+B)^5 = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5$

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Es. $(x-2)^4 = (x)^4 + 4\cdot(x)^3\cdot(-2) + 6\cdot(x)^2\cdot(-2)^2 + 4\cdot x\cdot(-2)^3 + (-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

MCD e mcm di monomi

Il Massimo Comun Divisore di due o più monomi è dato dal prodotto dei fattori comuni ai monomi, presi con il loro minimo esponente. E' il monomio di grado maggiore che divide ("è contenuto" in) tutti i monomi dati.

Il minimo comune multiplo di due o più monomi è dato dal prodotto di tutti i fattori (comuni e non) dei monomi, presi con il loro maggior esponente. E' il monomio di grado minore che è multiplo di ("contiene") tutti i monomi dati.

$9x^2 =$		3^2	x^2	
$6x^2y^3 =$	2	3	x^2	y^3
$12x^4y^2 =$	2^2	3	x^4	y^2

$$MCD(\,9x^2,\ \ 6x^2y^3,\ \ 12x^4y^2\,) = 3\cdot x^2 = 3x^2$$

$$mcm(\,9x^2,\ \ 6x^2y^3,\ \ 12x^4y^2\,) = 2^2\cdot 3^2\cdot x^3\cdot y^3 = 36x^4y^3$$

NOTE IMPORTANTI - Calcolo letterale

- Ricorda che puoi sommare due monomi solo se hanno la stessa parte letterale.

$$5a + b = 5ab$$ ✗ ERRATO

- Applica correttamente le proprietà delle potenze durante le moltiplicazioni, le divisioni e gli elevamenti a potenza di monomi (ad es. moltiplicando due lettere uguali i loro esponenti si sommano, ed elevando una lettera a potenza gli esponenti si moltiplicano).

$5x^2y \cdot 2x^3y^2 = 10x^5y^3$ ✓ CORRETTO $\quad$ $5x^2y \cdot 2x^3y^2 = 10x^6y^2$ ✗ ERRATO

$(2a^3)^2 = 4a^6$ ✓ CORRETTO $\quad$ $(2a^3)^2 = 4a^9$ ✗ ERRATO

- Ricorda che le potenze vanno svolte prima di prodotti e divisioni.

$x \cdot (\mathbf{2x})^{\mathbf{2}} = x \cdot (\mathbf{4x^2}) = 4x^3$ ✓ CORRETTO $\quad$ $\boldsymbol{x} \cdot (\mathbf{2x})^2 = (\mathbf{2x^2})^2 = 4x^4$ ✗ ERRATO

- Il segno meno davanti ad una parentesi (o ad una frazione) sta ad indicare che quella parentesi (o quella frazione) è moltiplicata per -1. Quindi, per la proprietà distributiva, dovrai moltiplicare per -1 (cioè cambiare di segno) tutti i termini presenti dentro la parentesi (o al numeratore della frazione).

$$-(x^2 + 3x - 9) = +(-x^2 - 3x + 9) = -x^2 - 3x + 9$$

$$-\frac{x^2 + 3x - 9}{4} = +\frac{-x^2 - 3x + 9}{4}$$

- Se in'un espressione trovi un segno meno prima del prodotto di un monomio per un polinomio (o per una frazione), hai due possibilità, entrambe corrette.

  Puoi considerare il meno parte del monomio, e moltiplicarlo (meno incluso) per i termini del polinomio. In questo caso, davanti al risultato, rimane un più.

$$10 - a(x + y) = 10 + (-ax - ay) = 10 - ax - ay \qquad 10 - a \cdot \frac{x+y}{2} = 10 + \frac{-ax-ay}{2}$$

  Puoi considerare il meno separato dal monomio, e moltiplicare solo quest'ultimo (ma non il meno) per i termini del polinomio. In questo caso, davanti al risultato, rimane il meno.

$$10 - a(x + y) = 10 - (ax + ay) = 10 - ax - ay \qquad 10 - a \cdot \frac{x+y}{2} = 10 - \frac{ax+ay}{2}$$

- In una divisione del tipo $a(x) : (x - k)$, fai attenzione al segno di k. Se il termine noto del binomio $(x - k)$ è negativo, k è positivo; se il termine noto del binomio $(x - k)$ è positivo, k è negativo.

$$(x^2 + x + 1) : (x - 2) \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

$$(x^2 + x + 1) : (x + 2) = (x^2 + x + 1) : (x - (-2)) \quad \Rightarrow \quad k = -2$$

- Ricorda che non puoi distribuire l'esponente agli addendi di un'addizione, se la base è una somma. Utilizza invece i prodotti notevoli per calcolare il risultato.

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ✓ CORRETTO $\quad$ $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ ✗ ERRATO

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ ✓ CORRETTO $\quad$ $(x + y)^3 = x^3 + y^3$ ✗ ERRATO

Scomposizione in fattori di un polinomio

1. Raccoglimento totale

$$\boldsymbol{AX + AY + AZ + \dots} = A(X + Y + Z + \dots)$$

Es. $3x^2y - 6x^4y^2 + 3x^2 = 3x^2(y - 2x^2y^2 + 1)$

2. Raccoglimento parziale

$$\boldsymbol{AX + AY + BX + BY} = A(X + Y) + B(X + Y) = (X + Y)(A + B)$$

Es. $5x + 5y^2 + x^2 + xy^2 = 5(x + y^2) + x(x + y^2) = (x + y^2)(5 + x)$

3. Scomposizione mediante prodotti notevoli

Quadrato di un binomio:

$$\boldsymbol{A^2 + 2AB + B^2} = (A + B)^2$$ 3 termini, 2 quadrati

Es. $4a^2 + 1 - 4a = (2a - 1)^2$

Quadrato di un trinomio:

$$\boldsymbol{A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC} = (A + B + C)^2$$ 6 termini, 3 quadrati

Es. $x^2 + 4xy + 4 - 4y - 4x + 4y^2 = (x + 2y - 2)^2$

Cubo di un binomio:

$$\boldsymbol{A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3} = (A + B)^3$$ 4 termini, 2 cubi

Es. $8 - 12y + 6y^2 - y^3 = (2 - y)^2$

Differenza di quadrati:

$$\boldsymbol{A^2 - B^2} = (A + B)(A - B)$$ 2 termini, 2 quadrati

Es. $9x^2 - 25 = (3x + 5)(3x - 5)$

Somma di cubi:

$$\boldsymbol{A^3 + B^3} = (A + B)(A^2 + B^2 - AB)$$ 2 termini, 2 cubi

Es. $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 + 4 - 2x)$

Differenza di cubi:

$$\boldsymbol{A^3 - B^3} = (A - B)(A^2 + B^2 + AB)$$ 2 termini, 2 cubi

Es. $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 4 + 2x)$

4. Trinomi particolari

$$\boldsymbol{x^2 + Sx + P} = (x + n_1)(x + n_2)$$

dove n_1 e n_2 sono due numeri tali che: $n_1 + n_2 = S$ e $n_1 \cdot n_2 = P$

Es. $x^2 + x - 6 =$ ...

Cerco n_1 e n_2 tali che $S = +1$ e $P = -6$:

$$n_1 = -2; \quad n_2 = +3$$

Allora il polinomio si scompone nel seguente modo: $x^2 + x - 6 = (x - 2) \cdot (x + 3)$.

5. Scomposizione mediante teorema di Ruffini

$$\boldsymbol{p(x) = (x-k)\cdot q(x)}$$

dove $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ è un polinomio di grado n ordinato rispetto all'incognita x; k è un numero intero (scelto tra i divisori del termine noto a_0 del polinomio da scomporre, sia con segno positivo che negativo) tale che $p(k) = 0$, e $q(x)$ è il risultato della divisione tra $p(x)$ e k.

Es. $x^3 + x^2 - 3x - 2 = \ldots$

Cerco k tale che $p(k) = 0$:

$k = +1 \Rightarrow p(+1) = (+1)^3 + (+1)^2 - 3\cdot(+1) - 2 = -3$

$k = -1 \Rightarrow p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 3\cdot(-1) - 2 = 1$

$k = +2 \Rightarrow p(+2) = (+2)^3 + (+2)^2 - 3\cdot(+2) - 2 = 4$

$k = -2 \Rightarrow p(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 3\cdot(-2) - 2 = 0$

$\Rightarrow k = -2$

Calcolo $q(x)$ effettuando la divisione $p(x):(x-k)$:

	+1	+1	-3	-2
-2		-2	+2	+2
	+1	-1	-1	0

$\Rightarrow q(x) = x^2 - x + 1$

Allora il polinomio si scompone nel seguente modo: $x^3 + x^2 - 3x - 2 = (x+2)\cdot(x^2 - x + 1)$.

5. Esempi di polinomi irriducibili

Sono irriducibili (a meno di raccoglimento totale):

- Polinomi di primo grado
- Falsi quadrati $\boldsymbol{A^2 + AB + B^2}$
- Somme di quadrati $\boldsymbol{A^2 + B^2}$ (nonostante alcune eccezioni)

Es. $x + 1$ è irriducibile perché è di primo grado
Es. $x^2 + x + 1$ è irriducibile perché è un falso quadrato
Es. $x^2 + 1$ è irriducibile perché è una somma di quadrati

MCD e mcm di polinomi

Il Massimo Comun Divisore di due o più polinomi è dato dal prodotto dei fattori comuni ai polinomi, presi con il loro minimo esponente. E' il polinomio di grado maggiore che divide ("è contenuto" in) tutti i polinomi dati.

Il minimo comune multiplo di due o più polinomi è dato dal prodotto di tutti i fattori (comuni e non) dei polinomi, presi con il loro maggior esponente. E' il polinomio di grado minore che è multiplo di ("contiene") tutti i polinomi dati.

$2x^2 - 2y^2 =$	2		$(x+y)$	$(x-y)$	
$x^2 - 2xy + y^2 =$				$(x-y)^2$	
$4ax^3 - 4ay^3 =$	2^2	a		$(x-y)$	(x^2+y^2+xy)

$$MCD(\,2x^2 - 2y^2,\;\; x^2 - 2xy + y^2,\;\; 4ax^3 - 4ay^3\,) = 2(x-y)$$

$$mcm(\,2x^2 - 2y^2,\;\; x^2 - 2xy + y^2,\;\; 4ax^3 - 4ay^3\,) = 4a(x+y)(x-y)^2(x^2+y^2+xy)$$

NOTE IMPORTANTI - Scomposizione in fattori di un polinomio

- Nel raccoglimento totale, si può raccogliere un'intera espressione invece che un monomio.

  $3y(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})-a(b+1)(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})+(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^2=(x+2)[3y-a(b+1)+(x+2)]=(x+2)(3y-ab-a+x+2)$

- Nel raccoglimento parziale, puoi raccogliere il fattore 1 se i due termini non hanno altri fattori in comune.

  $ax+ay+x+y=$

  $=a(x+y)+\mathbf{1}(x+y)=$

  $=(x+y)(a+1)$

- Nel raccoglimento parziale, puoi raccogliere il segno meno se i due termini hanno segni opposti rispetto ai due termini dell'altra coppia.

  $ax+ay-bx-by=$

  $=a(x+y)-\boldsymbol{b}(x+y)=$

  $=(x+y)(a-b)$

- Spesso un polinomio va scomposto applicando due teniche di scomposizione di seguito. Applicale nell'ordine con cui sono state numerate nelle pagine precedenti.

  $a^5-a^3=$ (1. raccoglimento totale)

  $=a^3(a^2-1)=$ (3. prodotti notevoli)

  $=a^3(a+1)(a-1)$

- Puoi verificare la correttezza di una scomposizione svolgendo il prodotto.

  $ax+ay-bx-by=(x+y)(a-b) \quad \Rightarrow \quad (x+y)(a-b)=ax+ay-bx-by$

Le equazioni

Equazione

Un'*equazione* è un'uguaglianza tra due espressioni algebriche, dette primo membro e secondo membro.

Nelle espressioni compare una lettera, chiamata *incognita*. Risolvere un'equazione significa trovare quei valori dell'incognita per cui l'uguaglianza risulta vera. Tali valori si dicono *soluzioni* (o *radici*) dell'equazione. Due equazioni si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni.

A seconda del numero di soluzioni, un'equazione si dice:
- *Determinata*, se ha un numero finito di soluzioni;
- *Indeterminata*, se ha infinite soluzioni;
- *Impossibile*, se non ha soluzioni.

Il *grado* di un'equazione è il massimo grado con cui compare l'incognita.

I numeri che si possono attribuire all'incognita di un'equazione, indipendentemente dal fatto che rendano vera o meno l'uguaglianza, costituiscono il suo *dominio* (ad esempio, in presenza di una frazione, i numeri che rendono il denominatore uguale a zero vanno esclusi dal dominio perché dividere per zero non ha significato). Prima di risolvere un'equazione, si scrive il suo dominio (le cosiddette CE, o *condizioni di esistenza*) in modo da confrontarlo alla fine con la soluzione ottenuta. Se la soluzione è un numero che è escluso dal dominio, essa va scartata.

Le equazioni si possono classificare in:
- *Intere*, se l'incognita non compare al denominatore di nessuna frazione;
- *Frazionarie*, se l'incognita compare anche al denominatore di una o più frazioni.

Primo principio di equivalenza

Se a entrambi i membri di un'equazione si aggiunge o si sottrae una stessa espressione, si ottiene un'equazione equivalente.

Primo corollario:
In un'equazione si possono "spostare" termini dal primo al secondo membro (o viceversa), cambiando il loro segno.

Es. $3+2x=8 \quad \Rightarrow \quad 3=8-2x$ (ciò equivale a sottrarre $2x$ ad entrambi i membri)

Secondo corollario:
In un'equazione si possono "cancellare" termini che compaiono uguali sia al primo che al secondo membro.

Es. $3+2x=3-5x \quad \Rightarrow \quad 2x=-5x$ (ciò equivale a sottrarre 3 ad entrambi i membri)

Secondo principio di equivalenza

Se a entrambi i membri di un'equazione vengono moltiplicati o divisi per una stessa espressione diversa da zero, si ottiene un'equazione equivalente.

Primo corollario:
Se in un'equazione tutti i termini sono multipli di uno stesso numero (diverso da zero), si possono dividere per quel numero.

Es. $4x-2=6x+4 \quad \Rightarrow \quad 2x-1=3x+2$ (ciò equivale a dividere per 2 entrambi i membri)

Secondo corollario:
Se entrambi i membri di un'equazione sono frazioni con lo stesso denominatore, si può eliminare il loro denominatore.

Es. $\frac{3x+2}{5}=\frac{1-x}{5} \quad \Rightarrow \quad 3x+2=1-x$ (ciò equivale a moltiplicare per 5 entrambi i membri)

Terzo corollario:
Si possono cambiare i segni di tutti i termini di un'equazione.

Es. $-x+5=1-3x \quad \Rightarrow \quad x-5=-1+3x$ (ciò equivale a moltiplicare per -1 entrambi i membri)

NOTE IMPORTANTI - Equazioni

- Per risolvere un'equazione intera di primo grado puoi procedere così:

$\frac{x+2}{5} - \frac{x(1-3x)}{3} = 2 + x^2$ — 1. Svolgere eventuali potenze o prodotti.

$\frac{x+2}{5} - \frac{x-3x^2}{3} = 2 + x^2$ — 2. Se sono presenti frazioni...

$\frac{3(x+2)-5(x-3x^2)}{15} = \frac{15(2+x^2)}{15}$ — ...portare entrambi i membri a denominator comune...

$\frac{3x+6-5x+15x^2}{15} = \frac{30+15x^2}{15}$ — ...e poi eliminarlo.

$3x - 6 - 5x + 15x^2 = 30 + 15x^2$ — 3. Spostare le incognite al 1° membro, i termini noti al 2° membro...

$3x - 5x = 30 + 6$ — ...e svolgere le somme di monomi.

$-2x = 36$

$2x = -36$ — 4. Dividere entrambi i membri per il coefficiente di x.

$\frac{2x}{2} = \frac{36}{2}$

$x = 18$

- Per risolvere un'equazione frazionaria di primo grado puoi procedere così:

$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x-2} = \frac{4x-3}{2x^2-5x+2}$ — 1. Scomporre i denominatori...

$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x-2} = \frac{4x-3}{(2x-1)(x-2)}$ — ...e porre le CE.

$$CE:\ x \neq \frac{1}{2},\ x \neq 2$$

$\frac{3(x-2)-2(2x-1)}{(2x-1)(x-2)} = \frac{4x-3}{(2x-1)(x-2)}$ — 2. Portare entrambi i membri a denominator comune...

$\frac{3x-6-4x+2}{(2x-1)(x-2)} = \frac{4x-3}{(2x-1)(x-2)}$ — ...e poi eliminarlo.

$3x - 6 - 4x + 2 = 4x - 3$ — 3. Spostare le incognite al 1° membro, i termini noti al 2° membro.

$3x - 4x - 4x = 6 - 2 - 3$ — ...e svolgere le somme di monomi.

$-5x = 1$ — 4. Dividere entrambi i membri per il coefficiente di x.

$x = -\frac{1}{5}$ acc. — 5. Controllare se la soluzione soddisfa le CE.

- In un'equazione di primo grado, l'ultimo passaggio ha sempre questa forma (dove a e b sono due numeri interi):

$$ax = b$$

Possono verificarsi i seguenti casi:

- $ax = b$ (con $a \neq 0$) L'equazione è determinata, e la soluzione è $x = \frac{b}{a}$
- $0x = b$ (con $b \neq 0$) L'equazione è impossibile (perché nessun numero, moltiplicato per 0, può essere uguale a b)
- $0x = 0$ L'equazione è indeterminata (perché qualsiasi numero, moltiplicato per 0, è uguale a 0)

Attenzione: $ax = 0$ ricade nel primo caso (equazione determinata), perchè ha come soluzione $x = 0$.