ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2013

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

La funzione f è definita da

$$\int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] dt$$

per tutti i numeri reali x appartenenti all'intervallo chiuso $[0; 9]$.

1. Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$ ove f' indica la derivata di f.
2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico Σ di f' e da esso si deduca per quale o per quali valori di x, $f'(x)$ presenta massimi e minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$.
3. Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0; 2\pi]$.
4. Sia R la regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0 \leq x \leq 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x hanno, per ciascun x, area $A(x) = 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$. Si calcoli il volume di W.

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da $f(x) = \dfrac{8}{4 + x^2}$.

1. Si studi f e se ne disegni il grafico Φ in un sistema di coordinate cartesiane Oxy. Si scrivano le equazioni delle tangenti a Φ nei punti $P(-2; 1)$ e $Q(2; 1)$ e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette OP e OQ. Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli.
2. Sia Γ la circonferenza di raggio 1 e centro $(0; 1)$. Una retta t per l'origine degli assi, taglia Γ oltre che in O in un punto A e taglia la retta di equazione $y = 2$ in un punto B. Si provi che, qualunque sia t, l'ascissa x di B e l'ordinata y di A sono le coordinate $(x; y)$ di un punto di Φ.
3. Si consideri la regione R compresa tra Φ e l'asse x sull'intervallo $[0; 2]$. Si provi che R è equivalente al cerchio delimitato da Γ e si provi altresì che la regione compresa tra Φ e tutto l'asse x è equivalente a quattro volte il cerchio.
4. La regione R, ruotando intorno all'asse y, genera il solido W. Si scriva, spiegandone il perché, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di W.

QUESTIONARIO

1 Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.

2 Si calcoli il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$.

3 Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2; -1)$ e $B(-6; -8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A.

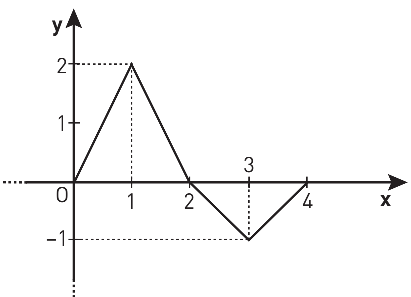
4 Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a, b e h, illustrando il ragionamento seguito.

5 In un libro si legge: "Due valigie della stessa forma sembrano quasi uguali, quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che a un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (oppure del 20% o del 25%) corrispondano aumenti di capacità (volume) di circa il 33% (oppure del 75% o 100%: raddoppio)". È così? Si motivi esaurientemente la risposta.

6 Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1 234 567 e 3 546 712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima posizione?

7 Un foglio rettangolare, di dimensioni a e b, ha area 1 m^2 e forma tale che, tagliandolo a metà (parallelamente al lato minore) si ottengono due rettangoli simili a quello di partenza. Quali sono le misure di a e b?

8 La funzione f ha il grafico in figura. Se $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, per quale valore positivo di x g ha un minimo? Si illustri il ragionamento seguito.

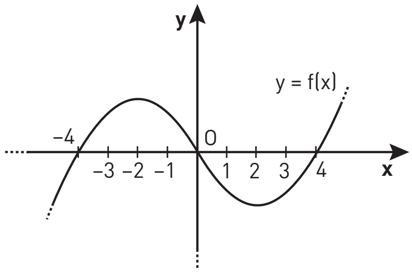


▲ **Figura 1.**

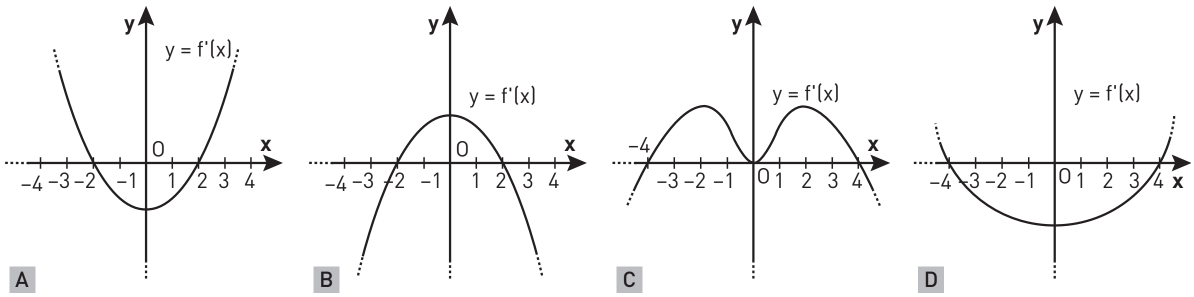
9 Si calcoli:

$$\lim_{x \to 0} 4 \frac{\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}.$$

10 Se la figura a lato rappresenta il grafico di $f(x)$, quale dei seguenti potrebbe essere il grafico di $f'(x)$? Si giustifichi la risposta.



▲ **Figura 2.**



▲ **Figura 3.**

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

1. Data la funzione integrale

$$f(x) = \int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] dt,$$

per il teorema del calcolo integrale la sua funzione derivata è la funzione integranda, ovvero:

$$f'(x) = \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Risulta allora:

$$f'(\pi) = \cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2};\ f'(2\pi) = \cos\frac{2\pi}{2} + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

2. Consideriamo la funzione $f'(x) = \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$: il corrispondente grafico Σ si ottiene partendo dal grafico dalla funzione goniometrica $y = \cos x$, mediante una dilatazione orizzontale del tipo $y = \cos\left(\frac{x}{m}\right)$, con $m = 2$, e una traslazione verticale di vettore $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Tenuto conto della periodicità della funzione coseno e della dilatazione orizzontale, in $\mathbb{R}$ la funzione $f'(x)$ ha periodo $T = m \cdot 2\pi$, ovvero $T = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$.

Il grafico interseca l'asse x per $\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 0$ ovvero:

$$\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{x}{2} = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \quad \rightarrow$$

$$x = \frac{4}{3}\pi + 4k\pi \quad \vee \quad x = \frac{8}{3}\pi + 4k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In particolare, nell'intervallo [0; 9] il grafico Σ interseca l'asse delle ascisse nei punti $x = \frac{4}{3}\pi$ e $x = \frac{8}{3}\pi$.

Inoltre la funzione coseno ha massimi assoluti nei punti $x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e minimi assoluti nei punti $x_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto $f'(x)$ in $\mathbb{R}$ ha:

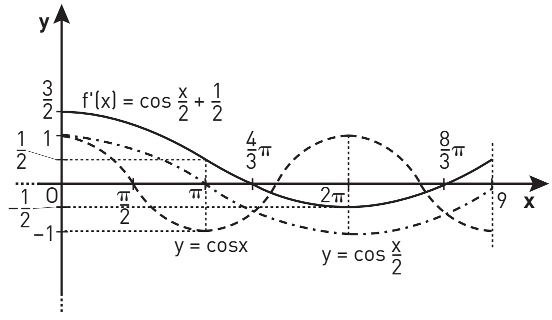
- massimi assoluti in $x_k = 2 \cdot 2k\pi = 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
- minimi assoluti in $x_k = 2(2k+1)\pi = (4k+2)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

In particolare, nell'intervallo [0; 9] la funzione $f'(x)$ ha un massimo assoluto in $x = 0$ e un minimo assoluto in $x = 2\pi$.

La funzione coseno ha flesso nei punti $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Segue che $f'(x)$ in $\mathbb{R}$ ha flesso nei punti $x_k = 2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

In particolare, nell'intervallo [0; 9] la funzione $f'(x)$ ha flesso in $x = \pi$.

Ricaviamo il grafico Σ di $f'(x)$ nell'intervallo [0; 9] partendo dalla funzione cosinusoidale e applicando le suddette trasformazioni geometriche (figura 4).



▲ **Figura 4.**

Osservando il grafico Σ di $f'(x)$ possiamo fare le seguenti deduzioni:

– per $0 \leq x < \frac{4}{3}\pi$, $f'(x) > 0$ e $f''(x) \leq 0$ $\rightarrow$ f crescente con concavità verso il basso;

– per $x = \frac{4}{3}\pi$, $f'\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 0$ e $f''\left(\frac{4}{3}\pi\right) < 0$ $\rightarrow$ $x = \frac{4}{3}\pi$ punto di massimo relativo per f;

– per $\frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$, $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ $\rightarrow$ f decrescente con concavità verso il basso;

– per $x = 2\pi$, $f'(2\pi) = -\frac{1}{2}$ e $f''(2\pi) = 0$ $\rightarrow$ $x = 2\pi$ punto di flesso ascendente per f;

– per $2\pi < x \leq \frac{8}{3}\pi$, $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$ $\rightarrow$ f decrescente con concavità verso l'alto;

– per $x = \frac{8}{3}\pi$, $f'\left(\frac{8}{3}\pi\right) = 0$ e $f''\left(\frac{8}{3}\pi\right) > 0$ $\rightarrow$ $x = \frac{8}{3}\pi$ punto di minimo relativo per f;

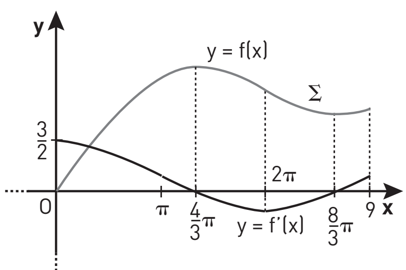
– per $\frac{8}{3}\pi < x \leq 9$, $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ $\rightarrow$ f crescente con concavità verso l'alto.

Inoltre:

– per $x = 0$ risulta $f(0) = \int_0^0 \left[\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right] dt = 0$;

– per $x = 9$ risulta $f(9) = \int_0^9 \left[\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right] dt = \left[2\,\text{sen}\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right]_0^9 = 2\,\text{sen}\frac{9}{2} + \frac{9}{2} \simeq 2{,}5$.

Rappresentiamo ora l'andamento della funzione $f(x)$ e della funzione $f'(x)$ (figura 5).



▲ **Figura 5.**

3. Poiché $f'(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[0; 2\pi]$, per il teorema della media esiste almeno un punto z di tale intervallo tale che:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi - 0}\int_0^{2\pi} f'(x)dx,$$ con $f'(z)$ detto valor medio della funzione $f'(x)$ in tale intervallo.

In tal caso risulta:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\left[2\,\text{sen}\frac{x}{2} + \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(0 + \pi - 2\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot 0\right) = \frac{1}{2}.$$

4. Si consideri il solido W, con base R definita dalla regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0 \leq x \leq 4$, e con sezioni ortogonali all'asse x di area $A(x) = 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

Il volume V di W ha quindi espressione:

$$V = \int_0^4 A(x)dx = \int_0^4 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx = 3\cdot\frac{4}{\pi}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right]_0^4 = -\frac{12}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) =$$

$$= -\frac{12}{\pi}(-1-1) = \frac{24}{\pi}.$$

PROBLEMA 2

1. Consideriamo la funzione razionale fratta $f(x) = \dfrac{8}{4+x^2}$. Essendo $4+x^2 > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$, essa ha come dominio l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

È una funzione pari poiché

$$f(-x) = \frac{8}{4+(-x)^2} = \frac{8}{4+x^2} = f(x),$$

pertanto il suo grafico Φ è simmetrico rispetto all'asse delle y.

Le intersezioni con gli assi cartesiani si trovano risolvendo i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} y=0 \\ y=\dfrac{8}{4+x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{8}{4+x^2}=0 \end{cases} \rightarrow \nexists \ x \in \mathbb{R};$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{8}{4+x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{8}{4} \rightarrow y=2 \end{cases}.$$

Il grafico Φ non interseca l'asse x ma interseca l'asse y nel punto $(0; 2)$.

La funzione è sempre positiva in $\mathbb{R}$.

Valutiamo gli eventuali asintoti calcolando i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{8}{4+x^2} = 0,$$

pertanto il grafico ha come asintoto orizzontale l'asse delle ascisse $y=0$.

Studiamo la derivata prima della funzione e il suo segno:

$$f'(x) = \frac{-8(2x)}{(4+x^2)^2} = -\frac{16x}{(4+x^2)^2}.$$

Osservando che il denominatore della derivata prima è sempre positivo, si deduce che:

- $f'(x) > 0$ per $x < 0 \rightarrow$ il grafico Φ è crescente;
- $f'(x) = 0$ per $x = 0 \rightarrow$ il grafico Φ ha un massimo;
- $f'(x) < 0$ per $x > 0 \rightarrow$ il grafico Φ è decrescente;

quindi la funzione ha un punto di massimo assoluto in $x=0$ e il grafico Φ ha un massimo assoluto nel punto $M(0; 2)$.

Studiamo la concavità del grafico mediante lo studio del segno della derivata seconda:

$$f''(x) = -16\,\frac{(4+x^2)^2 - x\cdot 2(4+x^2)\cdot 2x}{(4+x^2)^4} = -16\,\frac{(4+x^2)[(4+x^2)-4x^2]}{(4+x^2)^4} = -16\,\frac{(4-3x^2)}{(4+x^2)^3} =$$

$$= 16\,\frac{3x^2-4}{(4+x^2)^3}.$$

Osservando che il denominatore della derivata seconda è sempre positivo si può dedurre che:

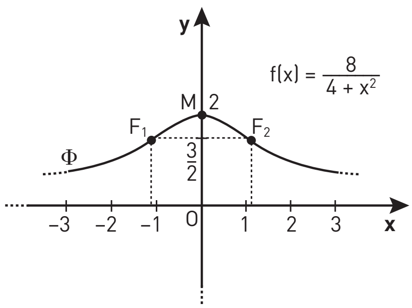
- $f''(x) > 0$ per $3x^2-4 > 0 \rightarrow x < -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \vee x > \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow$ il grafico Φ ha concavità verso l'alto;
- $f''(x) < 0$ per $3x^2-4 < 0 \rightarrow -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow$ il grafico Φ ha concavità verso il basso;

$f''(x) = 0$ per $3x^2 - 4 = 0 \quad \to \quad x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \quad \to$ il grafico Φ ha due flessi.

Determiniamo le coordinate di tali flessi:

$$f(x) = \begin{cases} x = \pm \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = \dfrac{8}{4 + x^2} \end{cases} \to \begin{cases} x = \pm \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = \dfrac{8}{4 + \dfrac{4}{3}} \end{cases} \to \begin{cases} x = \pm \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \to F_1\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; \dfrac{3}{2}\right) \text{e} F_2\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; \dfrac{3}{2}\right).$$

In figura 6 è rappresentato il grafico Φ della funzione $f(x)$.



◀ **Figura 6.**

Consideriamo i punti $P(-2; 1)$ e $Q(2; 1)$ della curva. Ricordiamo che data una funzione f derivabile in un punto x_0, l'equazione della retta tangente al corrispondente grafico in tale punto è:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Poiché $f'(x) = -\dfrac{16x}{(4 + x^2)^2}$, risulta:

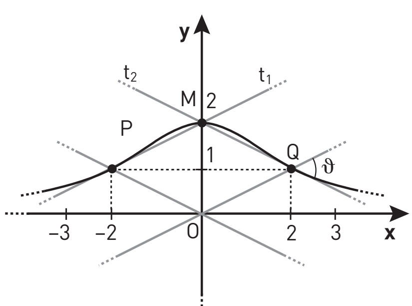
$$f'(-2) = -\dfrac{16(-2)}{(4 + (-2)^2)^2} = \dfrac{1}{2} \text{ e } f'(2) = -\dfrac{16 \cdot 2}{(4 + 2^2)^2} = -\dfrac{1}{2}.$$

Ricaviamo le equazioni delle rette tangenti nei punti P e Q secondo la formula sopraindicata:

per $P(-2; 1)$: $y = \dfrac{1}{2}(x + 2) + 1 \quad \to \quad t_1 : y = \dfrac{1}{2}x + 2,$

per $Q(2; 1)$: $\quad y = -\dfrac{1}{2}(x - 2) + 1 \quad \to \quad t_2 : y = -\dfrac{1}{2}x + 2.$

Osserviamo che tali tangenti si intersecano nel punto $M(0; 2)$, avendo la stessa intercetta all'origine. In figura 7 sono rappresentate le rette tangenti trovate e le rette OP e OQ.



◀ **Figura 7.**

Consideriamo il quadrilatero $POQM$ e verifichiamo se i lati sono a due a due paralleli.

Il coefficiente angolare della retta OP vale:

$$m_{OP} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

pertanto la retta OP è parallela alla retta t_2.
Analogamente il coefficiente angolare della retta OQ risulta:

$$m_{OQ} = \frac{1}{2},$$

pertanto la retta OQ è parallela alla retta t_1.
Segue allora che il quadrilatero $POQM$ è un parallelogramma.
Osserviamo inoltre che le sue diagonali, PQ e OM, sono perpendicolari, ciò è sufficiente per affermare che si tratta di un rombo.
Valutiamo l'ampiezza degli angoli $M\hat{P}O$ e $M\hat{Q}O$ tramite la misura dell'angolo ϑ a essi congruente formato dalle rette t_2 e OQ:

$$\operatorname{tg} M\hat{P}O = \operatorname{tg} M\hat{Q}O = \operatorname{tg}\vartheta = \left|\frac{m_{OQ} - m_{t_2}}{1 + m_{OQ} \cdot m_{t_2}}\right|,$$

con m_{OQ} e m_{t_2} rispettivamente i coefficienti delle rette OQ e t_2.
Risulta allora:

$$\operatorname{tg} M\hat{P}O = \operatorname{tg} M\hat{Q}O = \operatorname{tg}\vartheta = \left|\frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}\right| = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad \vartheta = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}13\ldots° \simeq 53°\ 8'.$$

Pertanto:

$$M\hat{P}O = M\hat{Q}O = \vartheta \simeq 53°\ 8'.$$

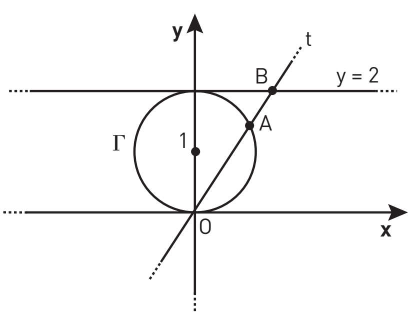
Essendo gli angoli $P\hat{O}Q$ e $P\hat{M}Q$ congruenti e supplementari agli angoli $M\hat{P}O$ e $M\hat{Q}O$ per proprietà dei parallelogrammi si ricava:

$$P\hat{O}Q = P\hat{M}Q \simeq 180° - 53°\ 8' = 126°\ 52'.$$

2. La circonferenza di raggio 1 e centro (0; 1) ha equazione:

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

Una retta t per l'origine degli assi, ha equazione $y = mx \vee x = 0$. Essa interseca la circonferenza in O e in A, mentre taglia la retta di equazione $y = 2$ in un punto B (figura 8).



◀ **Figura 8.**

Troviamo l'ordinata di A risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + (mx)^2 - 2(mx) = 0 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1 + m^2)x^2 - 2mx = 0 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow O: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \ A: \begin{cases} x=\dfrac{2m}{1+m^2} \\ y=\dfrac{2m^2}{1+m^2} \end{cases}$$

e il sistema (caso particolare):

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y=0 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow \ O: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \ A \equiv M: \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}.$$

Determiniamo l'ascissa di B tramite il sistema:

$$\begin{cases} y=2 \\ y=mx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{m} \\ y=2 \end{cases}, \text{ con } m \neq 0.$$

e il sistema (caso particolare):

$$\begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow \ B \equiv M.$$

Il luogo geometrico dei punti con ascissa uguale all'ascissa di B e con ordinata pari a quella di A ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{m} \\ y=\dfrac{2m^2}{1+m^2} \end{cases}, \text{ con } m \neq 0 \vee \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}.$$

Troviamo l'equazione cartesiana del luogo:

$$\begin{cases} m=\dfrac{2}{x} \\ y=\dfrac{2m^2}{1+m^2} \end{cases}, \text{ con } x \neq 0 \rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{2}{x} \\ y=\dfrac{2\left(\dfrac{2}{x}\right)^2}{1+\left(\dfrac{2}{x}\right)^2}=\dfrac{8}{x^2+4}. \end{cases}$$

Si conclude che il luogo geometrico cercato ha equazione:

$$y=\begin{cases} \dfrac{8}{x^2+4}, & x \neq 0 \\ 2 & , \ x=0 \end{cases}$$

equivalente alla funzione di partenza $f(x)=\dfrac{8}{4+x^2}$ che ha grafico Φ.

3. Consideriamo la regione R compresa tra Φ e l'asse x nell'intervallo $[0; 2]$.
Calcoliamo l'area $\mathscr{A}$ di tale regione tramite il seguente integrale definito:

$$\mathscr{A}(R)=\int_0^2 \frac{8}{4+x^2}\,dx=8\int_0^2 \frac{1}{4\left[1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\right]}\,dx=2\int_0^2 \frac{2\cdot\dfrac{1}{2}}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\,dx=4\int_0^2 \frac{\dfrac{1}{2}}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\,dx=$$

$$= 4\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_0^2 = 4(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0) = 4\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \pi.$$

Il cerchio delimitato da Γ, avendo raggio unitario, ha area pari a πr^2 ovvero a π. Pertanto R è equivalente al cerchio delimitato da Γ.

Determiniamo l'area della regione compresa tra Φ e tutto l'asse x calcolando il seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8}{4+x^2}\,dx.$$

Sfruttando il procedimento del precedente integrale e la simmetria del corrispondente grafico possiamo scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8}{4+x^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{8}{4+x^2}\,dx = 2\cdot 4\left(\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \operatorname{arctg}0\right) = 8\frac{\pi}{2} = 4\pi,$$

pertanto la regione è equivalente a quattro volte il cerchio.

4. Ruotiamo la regione R intorno all'asse y e consideriamo il solido W generato dalla rotazione (figura 8).

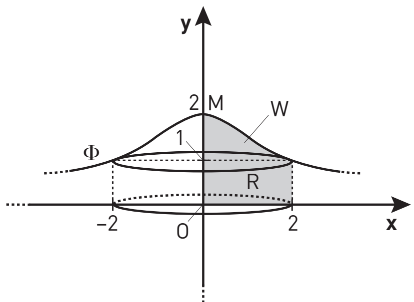


Figura 9.

Osservando la figura notiamo che il solido è formato da:
- un cilindro di raggio di base uguale a 2 e altezza pari a 1,
- un solido di rotazione generato dalla funzione inversa $x = f^{-1}(y)$, con $1 \le y \le 2$.

Da $y = f(x) = \dfrac{8}{4+x^2}$, ricaviamo $f^{-1}(y)$:

$$4 + x^2 = \frac{8}{y} \quad\rightarrow\quad x = \sqrt{\frac{8-4y}{y}}\,.$$

Il volume V del solido W è determinato dalla addizione del volume del cilindro con il volume del solido di rotazione, quindi:

$$V(W) = \pi\cdot 2^2\cdot 1 + \pi\int_1^2\left(\sqrt{\frac{8-4y}{y}}\right)^2 dy = 4\pi + \pi\int_1^2 \frac{8-4y}{y}\,dy.$$

QUESTIONARIO

1 È dato un triangolo di area 3 con due lati che misurano 2 e 3. Indicato con ϑ l'angolo tra essi compreso, per la trigonometria si può esprimere la superficie $\mathscr{A}$ del triangolo come il semiprodotto tra le misure di due lati e il seno di ϑ:

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \operatorname{sen}\vartheta \quad\rightarrow\quad \mathscr{A} = 3\cdot\operatorname{sen}\vartheta.$$

Nota $\mathcal{A}$, risulta

$$3 = 3 \cdot \operatorname{sen} \vartheta.$$

Ricaviamo ϑ:

$$\operatorname{sen} \vartheta = 1 \quad \to \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}.$$

Segue allora che il triangolo è rettangolo e che i due lati con misura nota sono i cateti.
Il terzo lato i è pertanto l'ipotenusa che calcoliamo applicando il teorema di Pitagora:

$$i = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

2 La funzione $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$ è irrazionale e si determina il suo dominio imponendo le necessarie condizioni di realtà attraverso il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 2 - \sqrt{3 - x} \geq 0 \\ 1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \geq 0 \end{cases}.$$

Risolviamo le singole disequazioni.

– 1° disequazione:

$$3 - x \geq 0 \quad \to \quad x \leq 3.$$

– 2° disequazione:

$$2 - \sqrt{3 - x} \geq 0 \quad \to \quad \sqrt{3 - x} \leq 2 \quad \to \quad \begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 3 - x \leq 4 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -1 \end{cases} \quad \to \quad -1 \leq x \leq 3.$$

– 3° disequazione:

$$1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \geq 0 \quad \to \quad \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \leq 1 \quad \to \quad \begin{cases} 2 - \sqrt{3 - x} \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \\ 2 - \sqrt{3 - x} \leq 1 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x \leq 3 \\ \sqrt{3 - x} \geq 1 \end{cases} \quad \to$$

$$\to \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x \leq 3 \\ 3 - x \geq 1 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x \leq 3 \\ x \leq 2 \end{cases} \quad \to \quad -1 \leq x \leq 2$$

Ricomponiamo il sistema di partenza con i risultati delle tre disequazioni risolte:

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ -1 \leq x \leq 3 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases} \to -1 \leq x \leq 2.$$

In conclusione il dominio della funzione $f(x)$ è l'intervallo $[-1; 2]$.

3 Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2;\,-1)$ e $B(-6;\,-8)$.

La retta generica r passante per il punto B e non parallela all'asse y ha equazione:

$$r_m\colon\ y-y_B=m(x-x_B)\ \ \rightarrow\ \ y+8=m(x+6)\ \ \rightarrow\ \ mx-y+6m-8=0.$$

Ricaviamo la distanza $d(m)$ tra il punto $A(2;\,-1)$ e la retta r:

$$d(m)=\frac{|m\cdot 2-(-1)+6m-8|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|8m-7|}{\sqrt{m^2+1}}=\begin{cases}\dfrac{8m-7}{\sqrt{m^2+1}}, & m\geq\dfrac{7}{8}\\ -\dfrac{8m-7}{\sqrt{m^2+1}}, & m<\dfrac{7}{8}\end{cases}$$

Determiniamo gli eventuali massimi della funzione d studiando la sua derivata prima:

$$d'(m)=\begin{cases}\dfrac{8\sqrt{m^2+1}-(8m-7)\left(\dfrac{2m}{2\sqrt{m^2+1}}\right)}{m^2+1}, & m\geq\dfrac{7}{8}\\ -\dfrac{8\sqrt{m^2+1}-(8m-7)\left(\dfrac{2m}{2\sqrt{m^2+1}}\right)}{m^2+1}, & m<\dfrac{7}{8}\end{cases}\rightarrow d'(m)=\begin{cases}\dfrac{7m+8}{\sqrt{(m^2+1)^3}}, & m\geq\dfrac{7}{8}\\ -\dfrac{7m+8}{\sqrt{(m^2+1)^3}}, & m<\dfrac{7}{8}\end{cases}.$$

Osserviamo che:

- per $m\geq\frac{7}{8}$, $d'>0$ $\rightarrow$ la funzione è strettamente crescente;
- per $-\frac{8}{7}<m<\frac{7}{8}$, $d'<0$ $\rightarrow$ la funzione è strettamente decrescente;
- per $m<-\frac{8}{7}$, $d'>0$ $\rightarrow$ la funzione è strettamente crescente;
- per $m=-\frac{8}{7}$, $d'=0$ $\rightarrow$ la funzione ha un massimo relativo.

Si conclude che la retta passante per B e avente distanza massima da A ha equazione:

$$r_{-\frac{8}{7}}\colon\ y+8=-\frac{8}{7}(x+6)\ \ \rightarrow\ \ y=-\frac{8}{7}x-\frac{104}{7}.$$

Rappresentiamo nella figura 10 la generica retta r_m, la retta $r_{-\frac{8}{7}}$ e tracciamo le distanze dal punto A da queste rette: osserviamo che la retta AB, avente coefficiente angolare $m_{AB}=\frac{-8+1}{-6-2}=\frac{7}{8}$, è perpendicolare alla retta $r_{-\frac{8}{7}}$ e che la distanza massima è proprio rappresentata dal segmento AB, ipotenusa del triangolo ABH.

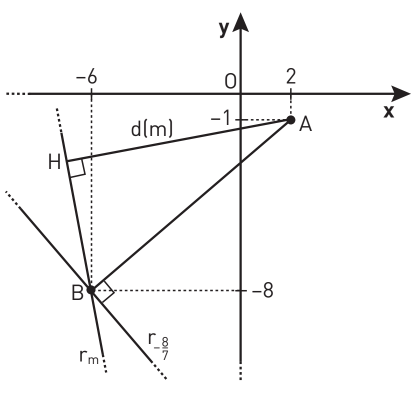
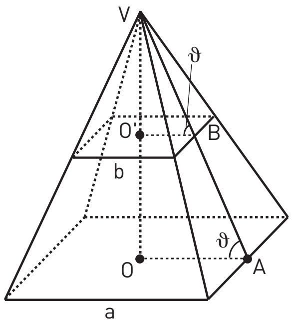


Figura 10.

4 Dato un tronco di piramide retta a base quadrata di altezza h e lati a e b delle due basi, prolunghiamo gli spigoli laterali in modo da ottenere due piramidi quadrate di vertice V. Indichiamo con O e O' i piedi delle altezze delle due piramidi generate. Tracciamo l'apotema VA e indichiamo con ϑ l'angolo $O\hat{A}V$ (figura 11).



▲ **Figura 11.**

Risulta:

$$OA = \frac{a}{2}, \quad O'B = \frac{b}{2}, \quad OV = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\vartheta, \quad O'V = \frac{b}{2}\operatorname{tg}\vartheta.$$

Inoltre:

$$OV - O'V = h \quad \rightarrow \quad \frac{a}{2}\operatorname{tg}\vartheta - \frac{b}{2}\operatorname{tg}\vartheta = h \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{2h}{a-b}.$$

Riscriviamo OV e $O'V$ in funzione di a, b, h:

$$OV = \frac{ah}{a-b}, \quad O'V = \frac{bh}{a-b}.$$

Ricaviamo il volume V_T del tronco di cono come differenza tra i volumi delle due piramidi prima indicate:

$$V_T = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{ah}{a-b} - \frac{1}{3}b^2 \cdot \frac{bh}{a-b} = \frac{1}{3}h \cdot \frac{a^3 - b^3}{a-b}.$$

Sfruttiamo la scomposizione della differenza di cubi di monomi:

$$V_T = \frac{1}{3}h \cdot \frac{(a-b)(a^2+b^2+ab)}{a-b} = \frac{(a^2+b^2+ab)h}{3}.$$

5 Consideriamo una valigia con la forma di un parallelepipedo di spigoli a, b, c. Il suo volume vale $V = abc$. Indicata con p la percentuale con cui aumentano le dimensioni, queste ultime diventano:

$$a' = a + a \cdot p = a(1+p), \quad b' = b + b \cdot p = b(1+p), \quad c' = c + c \cdot p = c(1+p).$$

Il nuovo volume V' ha quindi valore:

$$V' = a(1+p) \cdot b(1+p) \cdot c(1+p) = abc(1+p)^3 \quad \rightarrow \quad V' = V(1+p)^3.$$

Ricaviamo l'aumento relativo del volume:

$$\frac{V' - V}{V} = \frac{V(1+p)^3 - V}{V} = (1+p)^3 - 1 = p^3 + 3p^2 + 3p.$$

Pertanto:

– se $p = 10\% = 0{,}1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{V'-V}{V} = (0{,}1)^3 + 3(0{,}1)^2 + 3(0{,}1) = 0{,}331 = 33{,}1\%$;

– se $p = 20\% = 0{,}2 \quad \rightarrow \quad \dfrac{V'-V}{V} = (0{,}2)^3 + 3(0{,}2)^2 + 3(0{,}2) = 0{,}728 = 72{,}8\%$;

– se $p = 25\% = 0{,}25 \quad \rightarrow \quad \dfrac{V'-V}{V} = (0{,}25)^3 + 3(0{,}25)^2 + 3(0{,}25) = 0{,}953\ldots \simeq 95{,}3\%$.

Pertanto l'affermazione di consegna è esatta.

6 Il numero più piccolo che si può formare con le cifre da 1 a 7 è 1 234 567. Disponiamo le cifre secondo la seguente stringa:

1	2	3	4	5	6	7

Osserviamo che i primi sei numeri che si possono scrivere in ordine crescente sono quelli ottenibili dalla permutazione delle ultime tre cifre ($3! = 6$ permutazioni):

1 234 567, 1 234 576, 1 234 657, 1 234 675, 1 234 756, 1 234 765.

Pertanto il settimo valore nella successione si ottiene dalla stringa di partenza tenendo fisse le prime tre cifre (l'1, il 2 e il 3) e scambiando il 4 con il 5:

1 235 467.

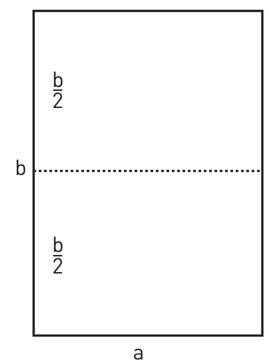
Analogamente, osservando che $6! = 720$, i primi 720 numeri della successione si possono ottenere permutando le ultime 6 cifre della seguente stringa:

1	2	3	4	5	6	7

Ne consegue che il 721-esimo valore nella successione si ottiene dalla stringa soprascritta scambiando il 2 con l'1:

2 134 567.

7 In figura è rappresentato un foglio rettangolare, di dimensioni a e b, con $a < b$, di area 1 m^2 e forma tale che, tagliandolo a metà (parallelamente al lato minore) si ottengono due rettangoli simili a quello di partenza.



▲ **Figura 12.**

Risulta allora:

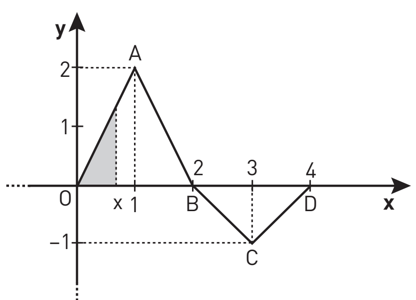
$$a \cdot b = 1,$$

$$a : b = \frac{b}{2} : a \quad \to \quad a^2 = \frac{b^2}{2}.$$

Risolviamo il sistema corrispondente per determinare le misure dei lati a e b:

$$\begin{cases} ab = 1 \\ a^2 = \dfrac{b^2}{2} \end{cases} \to \begin{cases} a = \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{b^2}{2} \end{cases} \to \begin{cases} a = \dfrac{1}{b} \\ b^4 = 2 \end{cases} \to \begin{cases} a = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ b = \sqrt[4]{2} \end{cases}.$$

8 Per la definizione di integrale definito di una funzione, se $f(x) > 0$ l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ rappresenta l'area sottesa dal grafico, mentre se $f(x) < 0$ l'area è uguale a $-\int_a^b f(x)dx$.



◀ **Figura 13.**

Osservando la figura 13 si deduce che l'integrale $\int_0^x f(t)dt$ è rappresentato dalla somma algebrica delle aree sottese dal grafico prese col proprio segno.
Assunto $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ si può così ricavare che tale funzione ammette:

– un massimo per $x = 2$ e $g(2) = \int_0^2 f(t)dt = area\,(OBA)$;

– un minimo per $x = 4$ e $g(4) = \int_0^4 f(t)dt = area\,(OBA) - area\,(BCD)$.

9 Consideriamo

$$\lim_{x \to 0} 4\,\frac{\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}.$$

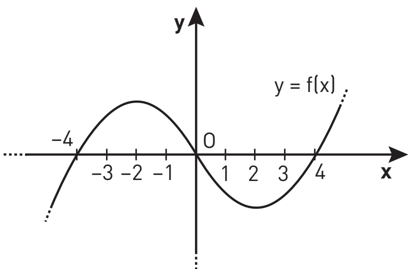
Calcolando il limite del numeratore e del denominatore, otteniamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.
Raccogliamo $\operatorname{sen} x$ al numeratore e riscriviamo il limite nel seguente modo:

$$\lim_{x \to 0} 4\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\cos x - 1}{x}\right).$$

Per i limiti notevoli $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ risulta allora:

$$\lim_{x \to 0} 4\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\cos x - 1}{x}\right) = 0.$$

10 Nella figura è riportato il grafico di $f(x)$.



◀ **Figura 14.**

Osservando l'andamento del grafico possiamo dedurre l'andamento del segno della sua derivata prima $f'(x)$, e precisamente:

– per $x < -2 \vee x > 2$ $f(x)$ crescente $\rightarrow$ $f'(x) > 0$;
– per $-2 < x < 2$ $f(x)$ decrescente $\rightarrow$ $f'(x) < 0$;
– per $x = \pm 2$ $f(x)$ ha un punto stazionario $\rightarrow$ $f'(\pm 2) = 0$;
– per $x = 0$ $f(x)$ ha un punto di flesso $\rightarrow$ $f''(0) = 0$ $\rightarrow$ $f'(x)$ ha un punto stazionario.

Confrontando queste condizioni con le quattro alternative si conclude che il grafico possibile di $f'(x)$ è la risposta A.

- Per esercitarti ancora sugli argomenti affrontati nei problemi e nei quesiti vai sul sito **www.online.zanichelli.it/provamatematica**