PROVA D'ESAME • SESSIONE ORDINARIA 2015

Liceo scientifico e opzione scienze applicate

Lo studente deve svolgere uno dei due problemi e rispondere a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

PROBLEMA 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate dall'estero, un canone fisso da 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

a. Individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.

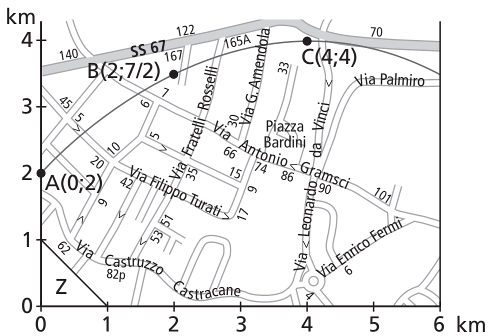
b. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}.$$

Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse.

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A, B e C, dagli assi x e y, e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la «Z», rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.



■ **Figura 1**

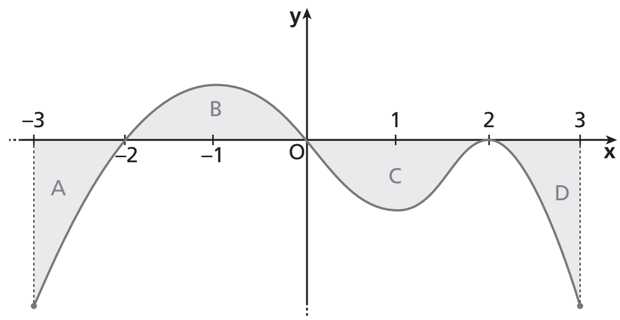
c. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A, B e C. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: «*nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio*»; verifica se effettivamente è così.

L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

d. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.

PROBLEMA 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3; 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.



■ **Figura 2**

a. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.

b. Individua i valori di $x \in [-3; 3]$ per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

c. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + g(x)}{2x}$.

d. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

QUESTIONARIO

1 Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$, sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.

2 Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$

dove R e r sono i raggi e h l'altezza.

3 Lanciando una moneta sei volte, qual è la probabilità che si ottenga testa «al più» due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa «almeno» due volte?

4 Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$ è soluzione?

$$y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$$

$$y' + x \cdot y'' = 1$$

$$x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$$

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$$

5 Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

6 Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + \\ +(x-4)^2 + (x-5)^2,$$

determinare il minimo di f.

7 Detta $A(n)$ l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio r, verificare che $A(n) = \dfrac{n}{2} r^2 \sin \dfrac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \to \infty$.

8 I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?

9 Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \le 2 \end{cases},$$

determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0; 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

10 Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \mathbb{R}, x \ge 0)$ divide in due porzioni il rettangolo $ABCD$ avente vertici $A(1; 0)$, $B(4; 0)$, $C(4; 2)$ e $D(1; 2)$. Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

PROBLEMA 1

a. Indichiamo con x i minuti di conversazione effettuati nel mese considerato: x rappresenta una variabile discreta, ma ai fini della risoluzione ipotizziamo che vari con continuità in $\mathbb{R}$ e che le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano continue rispetto a x. La spesa totale mensile in euro è espressa quindi dalla funzione:

$$f(x) = 10 + \frac{x}{10}.$$

La variabile x può assumere valori tra un minimo di 0 minuti e un massimo di 43 200 minuti, pari al numero di minuti di un mese commerciale di 30 giorni.

Il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta un modello lineare crescente, dove l'intercetta 10 indica il costo fisso iniziale e la pendenza $\frac{1}{10}$ indica il costo al minuto. Quindi la spesa minima mensile è € 10, che corrisponde a 0 minuti di conversazione, mentre la spesa massima mensile è € 4330, corrispondente a una conversazione lunga tutto il mese.

Il costo medio al minuto è espresso dal rapporto:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ ovvero } g(x) = \frac{x + 100}{10x}.$$

Il dominio della funzione $g(x)$ è uguale a quello della funzione $f(x)$ privato dello 0. Il grafico della funzione omografica $g(x)$, nel suo dominio naturale, è un'iperbole con l'asse y come asintoto verticale e la retta $y = \frac{1}{10}$ come asintoto orizzontale. Rappresentiamo i grafici nel primo quadrante.

Per $x > 0$, la funzione $g(x)$ tende decrescendo al valore $\frac{1}{10}$ senza assumere mai tale valore. Quindi nel dominio $]0; +\infty[$ la funzione $g(x)$ non ha estremanti relativi.

Se tuttavia consideriamo il dominio $]0; 43200]$ imposto dalla situazione concreta, la funzione $g(x)$ ammette minimo assoluto (e quindi anche relativo) nell'estremo destro del suo dominio.

Il minimo assoluto vale

$$g(43200) = \frac{43300}{432000} \simeq 0,1,$$

cioè un valore prossimo a quello dell'asintoto. Dal punto di vista dell'analisi dei consumi, l'errore che si commette a lavorare nel dominio $]0; +\infty[$ anziché nel dominio $]0; 43200]$ è trascurabile, quindi nel seguito considereremo semplicemente $x > 0$.

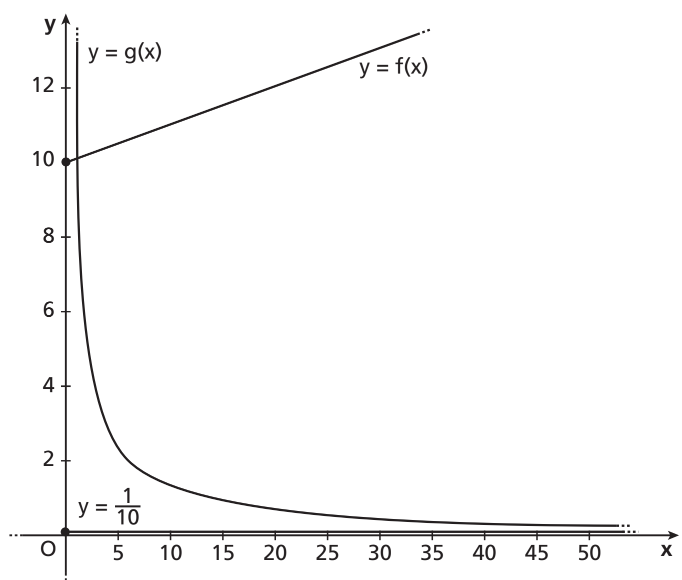


Figura 3

La funzione $g(x)$ è decrescente e quindi il costo medio al minuto diminuisce all'aumentare dei minuti di conversazione effettuati; esso tuttavia non potrà mai essere inferiore a 10 centesimi al minuto.

b. Se x_0 rappresenta il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, e quindi $g(x_0)$ il relativo costo medio per minuto, allora il valore x_1 richiesto indica il numero di minuti di conversazione che dimezzano il costo medio $g(x_0)$. Di conseguenza dovrà necessariamente essere $x_1 > x_0$.

Determiniamo x_1 in funzione di x_0.

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2} \ \rightarrow\ \frac{x_1 + 100}{10x_1} = \frac{x_0 + 100}{20x_0} \ \rightarrow\ 2x_0(x_1 + 100) = x_1(x_0 + 100) \ \rightarrow\ x_1 = \frac{200x_0}{100 - x_0}.$$

Scriviamo la funzione che esprime la dipendenza di x_1 da x_0 come:

$$h(x) = \frac{200x}{100 - x}.$$

Nel dominio naturale il grafico di tale funzione omografica è un'iperbole di asintoti $x = 100$ e $y = -200$. Riferita al contesto reale, rappresentiamo il grafico solo per $x > 0$.

Poiché sia le ascisse sia le ordinate rappresentano minuti di conversazione, solamente il ramo positivo dell'iperbole ha un significato reale.

Il valore 100, che individua l'asintoto verticale, è esattamente il numero di minuti di conversazione che hanno come costo medio $g(100) = \frac{1}{5} = 0{,}2$, esattamente il doppio di $\frac{1}{10}$, costo medio asintotico. Raggiunti o superati i 100 minuti di conversazione, il costo medio non è quindi più dimezzabile. Dunque il dominio che modellizza la situazione reale è $]0; 100[$. Più ci avviciniamo ai 100 minuti di conversazione, più il tempo x_1 necessario a dimezzare il costo al minuto tende a diventare infinitamente elevato, da cui l'andamento asintotico della funzione considerata.

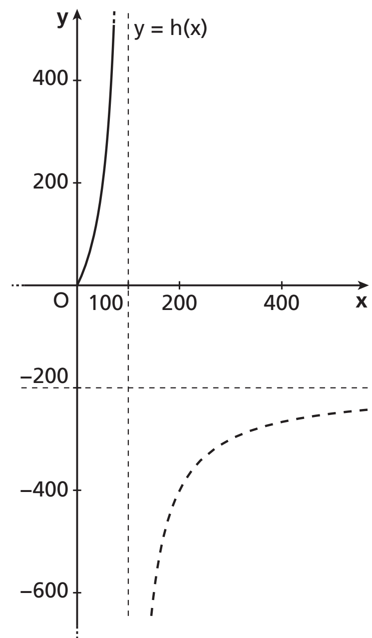


Figura 4

c. Cerchiamo una funzione del tipo

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

il cui grafico passa per i punti $A(0; 2)$, $B\left(2; \frac{7}{2}\right)$ e $C(4; 4)$.

Risolviamo il sistema ottenuto sostituendo all'equazione della funzione le coordinate dei punti noti:

$$\begin{cases} 2 = c \\ \frac{7}{2} = 4a + 2b + c \\ 4 = 16a + 4b + c \end{cases} \ \rightarrow\ \begin{cases} c = 2 \\ 4a + 2b = \frac{3}{2} \\ 8a + 2b = 1 \end{cases} \ \rightarrow\ \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

La funzione che descrive il margine superiore della zona considerata è dunque

$$p(x) = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2, \text{ con } x \in [0; 6].$$

La funzione descrive un arco di parabola il cui vertice è proprio il punto C, come suggerisce la figura.

L'area della zona considerata, ovvero l'area sottesa dalla funzione $p(x)$ nell'intervallo $[0; 6]$, vale:

$$A_{\text{totale}} = \int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2\right)dx = \left[-\frac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^6 = 21 \text{ km}^2.$$

La regione Z priva di copertura ha area 0,5 km^2, pertanto la regione effettivamente coperta dal segnale ha area $A_{\text{coperta}} = 20{,}5$ km^2. Osserviamo che:

$$\frac{A_{\text{coperta}}}{A_{\text{totale}}} = \frac{20{,}5}{21} \simeq 0{,}976 = 97{,}6\%.$$

Tale rapporto è quindi superiore alla copertura dichiarata dal gestore (96%). L'affermazione sul sito web sottostima l'effettiva copertura, ma la differenza è a vantaggio del consumatore.

d. Dopo la modifica del piano tariffario, le funzioni diventano definite per casi, in particolare l'espressione della spesa totale dopo x minuti di conversazione diventa una funzione lineare crescente a tratti di equazione:

$$f_2(x) = \begin{cases} 10 + \dfrac{x}{10} & \text{se } 0 \leq x \leq 500 \\ 10 + \dfrac{x}{10} + \dfrac{x-500}{10} = \dfrac{x-200}{5} & \text{se } x > 500 \end{cases}.$$

La nuova funzione è continua in tutto il suo dominio, anche in 500, dove limite destro e limite sinistro coincidono col valore $f_2(500) = 60$. La funzione non è invece derivabile in tale punto in quanto la derivata sinistra è $\frac{1}{10}$, mentre la derivata destra vale $\frac{1}{5}$. La funzione $f_2(x)$ è quindi derivabile in ogni punto del dominio tranne in $x = 500$, dove è presente un punto angoloso.

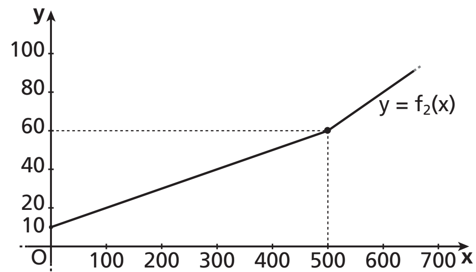


Figura 5

Il costo medio al minuto aggiornato alla nuova tariffa diventa:

$$g_2(x) = \frac{f_2(x)}{x} = \begin{cases} \dfrac{x+100}{10x} & \text{se } 0 < x \leq 500 \\ \dfrac{x-200}{5x} & \text{se } x > 500 \end{cases}.$$

Questa funzione è continua in ogni punto del dominio, anche in 500, e vale $g_2(500) = \frac{3}{25} = 0,12$.

Il grafico di tale funzione è rappresentato da due rami di iperbole.

Rispetto alla situazione precedente, $g_2(x)$ presenta ora un nuovo asintoto orizzontale destro di equazione $y = \frac{1}{5}$, è decrescente tra 0 e 500 e crescente per $x > 500$, con un minimo assoluto in 500. La funzione non ha invece massimo assoluto né relativo.

In 500, la funzione $g_2(x)$ ha un punto angoloso e la sua derivata non è definita in tale punto. Dunque, in 500, la funzione $g_2'(x)$ ha una singolarità con salto.

Tra 0 e 500, la concavità di $g_2(x)$ è rivolta verso l'alto, quindi $g_2''(x)$ è positiva e di conseguenza $g_2'(x)$ è crescente. Per ragionamenti analoghi, $g_2'(x)$ è decrescente per $x > 500$.

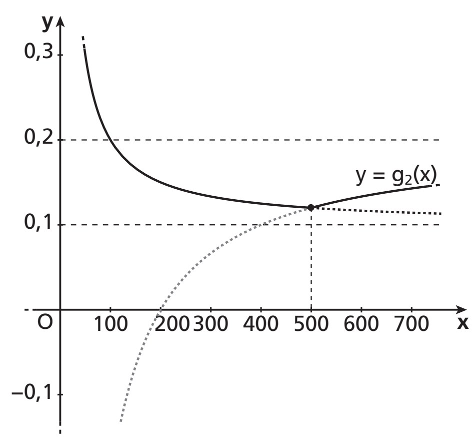


Figura 6

Potevamo pervenire alle stesse conclusioni studiando la funzione:

$$g_2'(x) = \begin{cases} -\dfrac{10}{x^2} & \text{se } 0 < x < 500 \\ \dfrac{40}{x^2} & \text{se } x > 500 \end{cases}.$$

Nella situazione concreta, la funzione $f_2(x)$ che descrive la spesa totale continua a crescere, ma raddoppia la pendenza dopo i primi 500 minuti, perché da quel momento in poi raddoppia il costo al minuto. Per quanto riguarda la funzione $g_2(x)$ che descrive la spesa media al minuto, notiamo che, come per il piano tariffario precedente, decresce per i primi 500 minuti, ma poi inverte la tendenza e cresce per avvicinarsi al nuovo costo unitario di 20 centesimi al minuto.

PROBLEMA 2

a. Osserviamo il grafico della funzione $f(x)$. I punti di intersezione del grafico Γ con l'asse x sono tre, di ascisse $-2, 0, 2$. I tre punti corrispondono alle radici dell'equazione $f(x) = 0$:

- $x = -2$ e $x = 0$ sono soluzioni di molteplicità 1;
- $x = 2$ è di molteplicità pari (almeno 2).

Osserviamo quindi che se $f(x)$ fosse polinomiale, la sua equazione potrebbe essere del tipo:

$f(x) = p(x)x(x+2)(x-2)^2$, dove $p(x)$ è un polinomio non nullo.

Il grado di un polinomio espresso come prodotto di polinomi è la somma dei gradi dei suoi fattori: dunque, concludiamo che il grado di $f(x)$ deve essere almeno 4.

Saremmo potuti giungere alla stessa conclusione considerando le condizioni imposte dal problema sui punti stazionari o sulla concavità del grafico della funzione.

Se procedessimo con la ricerca di un polinomio che soddisfi tutte le caratteristiche della funzione descritte dal problema e sia di grado 4, scopriremmo che tale polinomio non esiste. Tuttavia il problema non chiede di determinare il polinomio e nemmeno quale sia il suo grado minimo effettivo.

b. I punti stazionari della funzione $g(x)$ corrispondono ai punti in cui si annulla la sua derivata:

$g'(x) = f(x) = 0$, cioè $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$.

Per individuare i punti di massimo relativo studiamo il segno di $g'(x)$ deducendolo dal segno di $f(x)$.

- $g'(x) > 0$ dove $f(x) > 0$ $\rightarrow$ per $-2 < x < 0$ g è crescente;
- $g'(x) < 0$ dove $f(x) < 0$ $\rightarrow$ per $-3 < x < -2$, $0 < x < 2$, $2 < x < 3$ g è decrescente.

Quindi $g(x)$ ha un massimo relativo per $x = 0$, un minimo relativo per $x = -2$ e un punto di flesso orizzontale per $x = 2$.

La funzione $g(x)$ volge la concavità verso l'alto negli intervalli in cui la sua derivata seconda è positiva. Dato che $g''(x) = f'(x)$ e $f'(x) > 0$ negli intervalli in cui $f(x)$ è crescente, basta osservare la figura per capire che ciò accade in $]-3; -1[$ e in $]1; 2[$.

c. Sapendo che $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$ e che $g(3) = -5$, possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale a $f(x)$ sull'intervallo $[0; 3]$:

$\int_0^3 f(x)dx = g(3) - g(0)$, da cui $g(0) = -5 - \int_0^3 f(x)dx$.

Ricordiamo che l'integrale definito di una funzione negativa è pari all'area, cambiata di segno, compresa tra il grafico della funzione e l'asse x. Di conseguenza:

$\int_0^3 f(x)dx = -\text{Area}(C) - \text{Area}(D) = -4$, da cui $g(0) = -5 - (-4) = -1$.

Ora consideriamo il limite $L = \lim_{x \to 0} \frac{1 + g(x)}{2x}$.

Sostituendo il valore $x = 0$, il numeratore diventa $1 + g(0) = 1 + (-1) = 0$ e il denominatore $2 \cdot 0 = 0$. Il limite L è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Possiamo calcolarlo con il teorema di De L'Hospital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + g(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{2} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{2}.$$

Osserviamo che il limite L esiste perché $f(x)$ è continua in $x = 0$, con $f(0) = 0$. Concludiamo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + g(x)}{2x} = \frac{f(0)}{2} = 0.$$

d. Per calcolare l'integrale

$$\int_{-2}^{1} h(x)dx = 3 \cdot \int_{-2}^{1} f(2x+1)dx,$$

effettuiamo il seguente cambiamento di variabile: $2x + 1 = t \quad \to \quad dx = \frac{1}{2}dt$.

Gli estremi $x = -2$ e $x = 1$ vengono trasformati rispettivamente in $t = -3$ e $t = 3$. L'integrale diventa:

$$\int_{-2}^{1} h(x)dx = \frac{3}{2}\int_{-3}^{3} f(t)dt = \frac{3}{2}\left(\int_{-3}^{-2} f(t)dt + \int_{-2}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{3} f(t)dt\right) =$$

$$\frac{3}{2}(-\text{Area}\,(A) + \text{Area}\,(B) - \text{Area}\,(C) - \text{Area}\,(D)) = \frac{3}{2}(-2+3-3-1) = \frac{3}{2}(-3) = -\frac{9}{2}.$$

QUESTIONARIO

1 Indichiamo con $(x_0; y_0)$ il punto di tangenza tra la retta e il grafico della funzione f, con $x_0 < 0$ e $y_0 > 0$, poiché il punto di tangenza è nel secondo quadrante. Per la condizione di tangenza troviamo:

$$f'(x_0) = -2 \;\to\; -2x_0^2 + 6 = -2 \;\to\; x_0^2 = 4 \;\to\; x_0 = \pm 2 \;\to\; x_0 = -2.$$

Il punto di tangenza ha quindi coordinate $(-2; 9)$. Poiché conosciamo la derivata di $f(x)$, possiamo trovare $f(x)$ a meno di una costante additiva C calcolando l'integrale indefinito:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int(-2x^2 + 6)dx = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + C.$$

Per trovare C, imponiamo il passaggio per il punto $(-2; 9)$: $f(-2) = 9 \to -\frac{2}{3}(-8) - 12 + C = 9 \to C = \frac{47}{3}$.

La funzione cercata è quindi: $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + \frac{47}{3}$.

2 Per trovare il volume del tronco di cono calcoliamo il volume del solido che si ottiene ruotando attorno all'asse x il trapezio evidenziato in figura. L'equazione della retta passante per $(0; r)$ e $(h; R)$ è:

$$\frac{y-r}{R-r} = \frac{x}{h} \;\to\; y = \frac{R-r}{h}x + r.$$

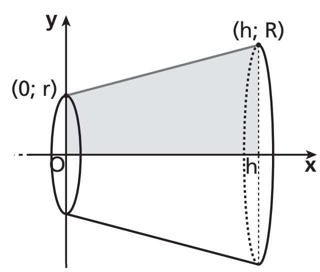


Figura 7

Applichiamo la formula per il calcolo del volume di un solido di rotazione alla funzione $f(x) = \frac{R-r}{h}x + r$ nell'intervallo $[0; h]$:

$$V = \pi\int_0^h\left(\frac{R-r}{h}x + r\right)^2 dx = \pi\int_0^h\left[\frac{(R-r)^2}{h^2}x^2 + 2\frac{r(R-r)}{h}x + r^2\right]dx =$$

$$\pi\left[\frac{(R-r)^2}{3h^2}x^3 + \frac{r(R-r)}{h}x^2 + r^2x\right]_0^h = \pi\left[\frac{(R-r)^2}{3}h + r(R-r)h + r^2h\right] = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + Rr).$$

In alternativa, possiamo ricavare il volume del tronco di cono grazie a considerazioni di carattere geometrico. Consideriamo il cono di vertice V e altezza $h + \bar{h}$ di cui fa parte il tronco di cono. Nella figura 8, in cui è rappresentata una sezione del cono passante per il vertice V e perpendicolare alla base comune al cono e al tronco, i triangoli AHV e $BH'V$ sono simili perché sono rettangoli e hanno un angolo in comune. Quindi:

$$R : (h + \bar{h}) = r : \bar{h} \;\to\; \bar{h} = h\frac{r}{R-r}.$$

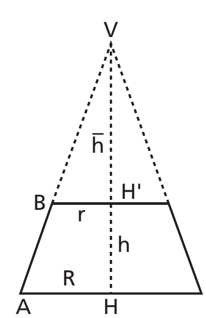


Figura 8

Il volume del tronco di cono si ottiene sottraendo dal volume del cono grande il volume del cono piccolo:

$$V = \frac{\pi R^2(h + \bar{h})}{3} - \frac{\pi r^2\bar{h}}{3} = \frac{\pi}{3}\left[hR^2 + \frac{rh}{R-r}R^2 - \frac{rh}{R-r}r^2\right] = \frac{\pi}{3}h(R^2 + r^2 + Rr).$$

3 La probabilità che esca testa (o croce) in un singolo lancio di una moneta non truccata è $\frac{1}{2}$.
Se indichiamo con T il numero di teste ottenute in 6 lanci, la variabile aleatoria T ha una distribuzione binomiale di parametri $n = 6$ e $p = \frac{1}{2}$. Calcoliamo la probabilità che esca al più 2 volte testa in 6 lanci:

$$p(T \leq 2) = p(T = 0) + p(T = 1) + p(T = 2) = \binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 =$$

$$\frac{\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}}{2^6} = \frac{1+6+15}{64} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32} \simeq 0{,}34.$$

Calcoliamo la probabilità che esca almeno 2 volte testa in 6 lanci:

$$p(T \geq 2) = 1 - p(T \leq 1) = 1 - [p(T = 0) + p(T = 1)] = 1 - \frac{7}{64} = \frac{64-7}{64} = \frac{57}{64} \simeq 0{,}89.$$

4 Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda della funzione $y = \frac{\ln x}{x}$:

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{-\ln x + 1}{x^2};\ y'' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (-\ln x + 1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

Sostituiamo nelle varie equazioni per verificare se y è soluzione.

- Sostituiamo in $y'' + 2\cdot\frac{y'}{x} = y$.

$$\frac{2\ln x - 3}{x^3} + 2\frac{-\ln x + 1}{x^3} = \frac{2\ln x - 3 - 2\ln x + 2}{x^3} = -\frac{1}{x^3} \neq \frac{\ln x}{x}.$$

- Sostituiamo in $y' + x\cdot y'' = 1$.

$$\frac{-\ln x + 1}{x^2} + x\cdot\frac{2\ln x - 3}{x^3} = \frac{-\ln x + 1 + 2\ln x - 3}{x^2} = \frac{\ln x - 2}{x^2} \neq 1.$$

- Sostituiamo in $x\cdot y' = \frac{1}{x} + y$.

$$x\cdot\frac{-\ln x + 1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \neq \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}.$$

- Sostituiamo in $x^2\cdot y'' + x\cdot y' + \frac{2}{x} = y$.

$$x^2\cdot\frac{2\ln x - 3}{x^3} + x\cdot\frac{-\ln x + 1}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{2\ln x - 3 - \ln x + 1 + 2}{x} = \frac{\ln x}{x}.$$

Dunque la funzione data è soluzione della quarta equazione.

5 Dato un piano $ax + by + cz + d = 0$, sappiamo che il vettore $\vec{v}(a; b; c)$ è perpendicolare al piano. Nel nostro caso, il vettore $\vec{v}(1; 1; -1)$ è perpendicolare al piano σ di equazione $x + y - z = 0$. La retta perpendicolare al piano σ e passante per O deve contenere il punto $P(1; 1; -1)$. Scriviamo l'equazione della retta passante per i punti O e P:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-0}{-1-1} \rightarrow x = y = -z \rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}.$$

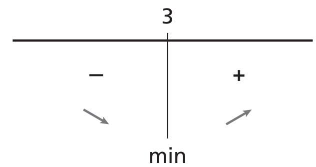
6 Il minimo di una funzione continua e derivabile nel suo dominio, se esiste, si verifica in corrispondenza di un punto stazionario o in uno degli estremi del dominio. Il dominio della funzione data $f(x)$ è $\mathbb{R}$, quindi se $f(x)$ assume il valore minimo lo fa in un punto stazionario. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 2[(x-1) + (x-2) + (x-3) + (x-4) + (x-5)] = 2(5x - 15) = 10(x-3).$$

Cerchiamo il valore di x che annulla la derivata: $f'(x) = 10(x-3) = 0 \rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$.
L'unico punto stazionario di f è quindi $x = 3$ e abbiamo: $f'(x) < 0$ se $x < 3$, $f'(x) > 0$ se $x > 3$.

Dunque $x = 3$ è un punto di minimo assoluto per $f(x)$, con $f(3) = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 10$.
In alternativa, possiamo sviluppare i quadrati della funzione $f(x)$ trovando: $f(x) = 5x^2 - 30x + 55$. È una parabola con la concavità rivolta verso l'alto e minimo nel vertice: $V(3; 10)$.

Figura 9



7 Ogni poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r, è composto da n triangoli isosceli congruenti tra loro che hanno:

- la base congruente al lato del poligono regolare;
- il lato obliquo congruente al raggio r della circonferenza;
- l'angolo al vertice che misura $\frac{2\pi}{n}$.

L'area del poligono risulta $A(n) = A_T \cdot n$, dove A_T è l'area di ognuno degli n triangoli isosceli congruenti T.

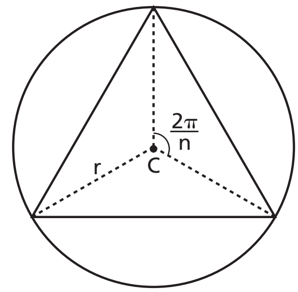
Consideriamo allora un triangolo T e calcoliamo la sua area come semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo tra essi compreso: $A_T = \frac{r^2}{2} \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$,

pertanto l'area del poligono regolare di n lati è: $A(n) = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$.
Calcoliamo il limite.

$$\lim_{n\to+\infty} A(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n} = r^2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} \cdot \sin\frac{2\pi}{n}.$$

Osserviamo che se $n \to +\infty$, allora $\frac{2\pi}{n} \to 0$. Quindi possiamo applicare il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} A(n) = r^2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2\pi}\pi \sin\frac{2\pi}{n} = \pi r^2 \lim_{\frac{2\pi}{n}\to 0} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2 \cdot 1 = \pi r^2.$$



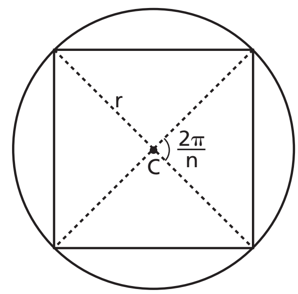


Figura 10

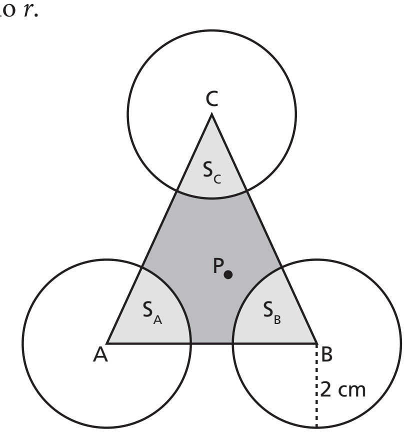
Osserviamo che all'aumentare del numero dei lati il poligono regolare tende alla circonferenza in cui è inscritto, e l'area limite di $A(n)$ coincide con l'area del cerchio di raggio r.

8 Un punto P interno al triangolo dista più di due centimetri dal vertice B se non appartiene al cerchio di raggio 2 cm e con centro in B.

Quindi i punti interni al triangolo ABC che distano più di 2 cm da tutti e tre i vertici sono i punti nella parte più scura in figura.

La probabilità che un punto P preso a caso all'interno del triangolo disti più di 2 cm da ciascuno dei vertici è data dal rapporto tra l'area colorata e l'area totale del triangolo ABC.

Figura 11



L'area del triangolo ABC (in cm^2) è:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{6^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{119}}{4}$$

L'area A della porzione scura è uguale alla differenza tra l'area del triangolo e l'area dei tre settori S_A, S_B, S_C.

$$A = \left[\frac{5\sqrt{119}}{4} - (S_A + S_B + S_C)\right]$$

I tre settori hanno raggio 2 cm, e la somma delle loro ampiezze è uguale alla somma degli angoli interni di un triangolo: π. L'area della somma dei tre settori circolari è dunque l'area S di un semi cerchio di raggio 2 cm; e vale: $S = \frac{\pi}{2} \cdot 2^2 = 2\pi$ in cm^2. Quindi $A = \left(\frac{5\sqrt{119}}{4} - 2\pi\right)$. Dunque la probabilità che un punto P preso a caso all'interno del triangolo ABC disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici è:

$$p = \frac{A}{A_{ABC}} = \frac{\frac{5\sqrt{119}}{4} - 2\pi}{\frac{5\sqrt{119}}{4}} = 1 - \frac{8\pi}{5\sqrt{119}} \simeq 0,54 = 54\%.$$

9 Per applicare il teorema di Lagrange, $f(x)$ deve essere continua nell'intervallo chiuso $[0; 2]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]0; 2[$. Affinché $f(x)$ sia continua, deve essere:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \ \to\ 1 - k + k = 1 \ \to\ 1 = 1 \text{ e quindi la condizione è verificata } \forall k \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora le condizioni per cui $f(x)$ è derivabile.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 2x - k & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}; \quad \lim_{x\to 1^-} 3x^2 = 3; \quad \lim_{x\to 1^+} (2x - k) = 2 - k.$$

Otteniamo: $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) \ \to\ 3 = 2 - k \ \to\ k = -1.$

Per $k = -1$ la funzione diventa

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ x^2 + x - 1 & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

Per $k = -1$ la funzione $f(x)$ soddisfa quindi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0; 2]$; e quindi $\exists c \in\,]0; 2[$ tale che:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c) \to \frac{5 - 0}{2} = f'(c) \to \frac{5}{2} = f'(c).$$

La derivata $f'(x)$ invece ha equazione:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 2x + 1 & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

$\ln x = 1$ $f'(1) = 3$, quindi $c \neq 1$. Cerchiamo $c \in\,]1; 2[$ tale che $f'(c) = \frac{5}{2}$:

$$f'(c) = 2c + 1 \ \to\ 2c + 1 = \frac{5}{2} \ \to\ 2c = \frac{3}{2} \ \to\ c = \frac{3}{4}, \text{ ma } \frac{3}{4} \notin\,]1; 2[.$$

Cerchiamo $c \in\,]0; 1[$ tale che $f'(c) = \frac{5}{2}$: $f'(c) = 3c^2 \ \to\ 3c^2 = \frac{5}{2} \ \to\ c^2 = \frac{5}{6} \ \to\ c = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$.

$-\sqrt{\frac{5}{6}} \notin\,]0; 1[$; il punto cercato, la cui esistenza è garantita dal teorema di Lagrange, è $c = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

10 Rappresentiamo in figura 12 il rettangolo $ABCD$ e la funzione $f(x) = \sqrt{x}$. L'area del rettangolo è $A_r = 3 \cdot 2 = 6$. L'area della porzione A_1 sottostante a $f(x)$ è:

$$A_1 = \int_1^4 \sqrt{x}\, dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3} \cdot (4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{14}{3}.$$

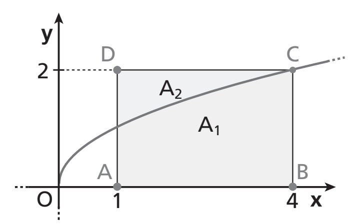


Figura 12

Quindi l'area della porzione A_2 vale: $A_2 = A_R - A_1 = 6 - \frac{14}{3} = \frac{4}{3}$.

Il rapporto tra le due aree è: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{14}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{2}.$