Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

Lo studente deve svolgere uno dei due problemi e rispondere a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

PROBLEMA 1

Stai seguendo un corso, nell'ambito dell'orientamento universitario, per la preparazione agli studi di Medicina. Il docente introduce la lezione dicendo che un medico ben preparato deve disporre di conoscenze, anche matematiche, che permettano di costruire modelli ed interpretare i dati che definiscono lo stato di salute e la situazione clinica dei pazienti. Al tuo gruppo di lavoro viene assegnato il compito di preparare una lezione sul tema: "come varia nel tempo la concentrazione di un farmaco nel sangue?".

Se il farmaco viene somministrato per via endovenosa, si ipotizza per semplicità che la concentrazione del farmaco nel sangue raggiunga subito il valore massimo e che immediatamente inizi a diminuire, in modo proporzionale alla concentrazione stessa; nel caso che il docente ti ha chiesto di discutere, per ogni ora che passa la concentrazione diminuisce di $\frac{1}{7}$ del valore che aveva nell'ora precedente.

1. Individua la funzione $y(t)$ che presenta l'andamento richiesto, ipotizzando una concentrazione iniziale $y(0) = 1\frac{\mu g}{ml}$ (microgrammi a millilitro) e rappresentala graficamente in un piano cartesiano avente in ascisse il tempo t espresso in ore e in ordinate la concentrazione espressa in $\frac{\mu g}{ml}$.

Se invece la somministrazione avviene per via intramuscolare, il farmaco viene dapprima iniettato nel muscolo e progressivamente passa nel sangue. Si ipotizza pertanto che la sua concentrazione nel sangue aumenti per un certo tempo, raggiunga un massimo e poi inizi a diminuire con un andamento simile a quello riscontrato nel caso della somministrazione per via endovenosa.

2. Scegli tra le seguenti funzioni quella che ritieni più adatta per rappresentare l'andamento descritto per il caso della somministrazione per via intramuscolare, giustificando la tua scelta:

$$y(t) = 1 - \frac{(t-4)^2}{16},$$

$$y(t) = \sin(3t) \cdot e^{-t},$$

$$y(t) = -t^3 + 3t^2 + t,$$

$$y(t) = \frac{7}{2}\left(e^{-\frac{t}{7}} - e^{-\frac{t}{5}}\right).$$

3. Traccia il grafico della funzione scelta in un piano cartesiano avente in ascisse il tempo t espresso in ore e in ordinate la concentrazione y espressa in $\frac{\mu g}{ml}$ e descrivi le sue caratteristiche principali, in rapporto al grafico della funzione relativa alla somministrazione per via endovenosa.

Per evitare danni agli organi nei quali il farmaco si accumula è necessario tenere sotto controllo la concentrazione del farmaco nel sangue. Supponendo che in un organo il farmaco si accumuli con una velocità v, espressa in $\frac{\mu g}{ml \cdot h}$, proporzionale alla sua concentrazione nel sangue: $v(t) = k \cdot y(t)$.

4. Determina la quantità totale di farmaco accumulata nell'organo nel caso della somministrazione endovenosa e di quella intramuscolare studiate in precedenza. In quale delle due l'accumulo sarà maggiore?

---

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Americhe, 2015.

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita da $y(x) = (4x - 2) \cdot e^{2x}$.

1. Dimostra che la funzione possiede un unico punto di minimo e un unico punto di flesso. Calcola le coordinate del minimo e del flesso e traccia il grafico G_f della funzione;
2. dimostra che la funzione $g(x) = (-4x - 2) \cdot e^{-2x}$ è simmetrica a f rispetto all'asse y e tracciarne il grafico G_g;
3. detti P e Q i punti di intersezione rispettivamente del grafico G_f e del grafico G_g con l'asse x, determina l'area A della porzione di piano delimitata dal segmento PQ e dai grafici G_f e G_g;
4. sia f_a la famiglia di funzioni definite da $f_a(x) = (2ax - 2) \cdot e^{ax}$, con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Per ogni funzione f_a la tangente al grafico nel punto di flesso interseca l'asse x e l'asse y delimitando un triangolo rettangolo. Determina i valori di a per i quali tale triangolo è anche isoscele, spiegando il procedimento seguito.

QUESTIONARIO

1 Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $y = 3$ della regione di piano delimitata dalla curva di equazione $y = x^3 - 3x + 3$ e dalla retta stessa.

2 Verificare che la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di prima specie ("a salto"), mentre la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di terza specie ("eliminabile").

3 Durante il picco massimo di un'epidemia di influenza il 15% della popolazione è a casa ammalato:

a. qual è la probabilità che in una classe di 20 alunni ce ne siano più di due assenti per l'influenza?
b. descrivere le operazioni da compiere per verificare che, se l'intera scuola ha 500 alunni, la probabilità che ce ne siano più di 50 influenzati è maggiore del 99%.

4 Nello spazio sono dati due piani α e β rispettivamente di equazione:

$\alpha)\ x - 3y + z - 5 = 0$

$\beta)\ x + 2y - z + 3 = 0$

Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta r da essi individuata verificare che essa appartiene al piano γ di equazione $3x + y - z + 1 = 0$.

5 Considerata la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, nel primo quadrante ciascuna tangente alla parabola delimita con gli assi coordinati un triangolo. Determinare il punto di tangenza in modo che l'area di tale triangolo sia minima.

6 Determinare la funzione densità di probabilità di una variabile casuale continua che assume valori nell'intervallo $[2; 5]$ con una distribuzione uniforme. Determinare inoltre il valore medio, la varianza, la deviazione standard di tale variabile e la probabilità che sia $\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{17}{4}$.

7 Calcolare il valor medio della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & 1 \leq x \leq 3 \\ e^{x-3} + 1 & 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

nell'intervallo [1; 6] e determinare il valore della x in cui la funzione assume il valore medio.

8 Una sfera ha il raggio che aumenta al passare del tempo secondo una data funzione $r(t)$. Calcolare il raggio della sfera nell'istante in cui la velocità di crescita della superficie sferica e la velocità di crescita del raggio sono numericamente uguali.

9 In un riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$, data la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = kt \end{cases}$$

e il piano P di equazione:

$$x + 2y - z + 2 = 0,$$

determinare per quale valore di k la retta r e il piano P sono paralleli, e la distanza tra di essi.

10 Scrivere l'equazione della circonferenza C che ha il centro sull'asse y ed è tangente al grafico G_f di $f(x) = x^3 - 3x^2$ nel suo punto di flesso.

PROBLEMA 1

1. Sia $y(t)$ la concentrazione del farmaco nel sangue all'istante t, espressa in $\mu g/ml$, dove $t = 0$ rappresenta il momento dell'iniezione.

Dire che la concentrazione, ogni ora, si riduce di $\frac{1}{7}$ rispetto all'ora precedente, equivale a dire che la concentrazione in ogni istante (almeno a partire da un'ora dopo l'iniezione) è pari ai $\frac{6}{7}$ della concentrazione registrata un'ora prima. Abbiamo dunque:

$$y(0) = 1,$$

$$y(1) = \frac{6}{7}y(0) = \frac{6}{7},$$

$$y(2) = \frac{6}{7}y(1) = \left(\frac{6}{7}\right)^2 y(0) = \left(\frac{6}{7}\right)^2, \text{ e così via.}$$

In generale possiamo ipotizzare che la concentrazione del farmaco segua l'andamento descritto dalla seguente funzione:

$$y(t) = \left(\frac{6}{7}\right)^t,$$

dove $t \geq 0$ indica il tempo trascorso dall'iniezione, espresso in ore.
L'andamento è dunque quello di una funzione esponenziale con base minore di 1; disegniamo il relativo grafico.

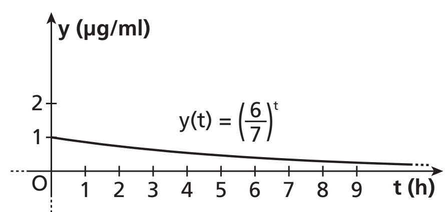

Figura 1

2. Nel caso di somministrazione intramuscolare, la concentrazione è crescente in un primo intervallo di tempo e poi decrescente, con andamento asintotico verso il valore nullo, rimanendo sempre positiva.
Tra le quattro funzioni proposte, l'unica compatibile è l'ultima; infatti:

- la prima funzione $y(t) = 1 - \frac{(t-4)^2}{16}$ rappresenta una parabola con la concavità verso il basso, che non ha andamento asintotico verso lo zero;
- la seconda funzione $y(t) = \sin(3t)e^{-t}$ ha andamento asintotico, ma è oscillante;
- la terza funzione $y(t) = -t^3 + 3t^2 + t$ è una cubica, che non ha andamento asintotico.

Mostriamo che invece $y(t) = \frac{7}{2}\left(e^{-\frac{t}{7}} - e^{-\frac{t}{5}}\right)$ con $t \in [0; +\infty[$ ha l'andamento richiesto.

- La funzione assume valori sempre positivi, ed è nulla solo per $t = 0$. Infatti:

$$y(0) = 0;\ y(t) = 0 \ \to\ \frac{7}{2}\left(e^{-\frac{t}{7}} - e^{-\frac{t}{5}}\right) = 0 \ \to\ e^{-\frac{t}{7}} = e^{-\frac{t}{5}} \ \to\ \frac{t}{7} = \frac{t}{5} \ \to\ t = 0;$$

$$y(t) > 0 \ \to\ e^{-\frac{t}{7}} > e^{-\frac{t}{5}} \ \to\ \frac{t}{7} < \frac{t}{5} \ \to\ 2t > 0 \ \to\ t > 0.$$

- $\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{7}{2}\left(e^{-\frac{t}{7}} - e^{-\frac{t}{5}}\right) = 0$, quindi ha asintoto orizzontale $y = 0$ per $t \to +\infty$.

- Calcoliamo la derivata prima:

$$y'(t)=\frac{7}{2}\left(-\frac{1}{7}e^{-\frac{t}{7}}+\frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}\right)=\frac{7}{10}e^{-\frac{t}{5}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{7}}=\frac{1}{10}\left(7e^{-\frac{t}{5}}-5e^{-\frac{t}{7}}\right)$$

  e studiamo il suo segno per $t \geq 0$:

$$y'(t)>0 \rightarrow 7e^{-\frac{t}{5}}-5e^{-\frac{t}{7}}>0 \rightarrow 7e^{-\frac{t}{5}}>5e^{-\frac{t}{7}} \rightarrow e^{\frac{t}{7}-\frac{t}{5}}>\frac{5}{7} \rightarrow e^{-\frac{2}{35}t}>\frac{5}{7} \rightarrow$$

$$-\frac{2}{35}t>\ln\frac{5}{7} \rightarrow t<-\frac{35}{2}\ln\frac{5}{7}, \text{ con } -\frac{35}{2}\ln\frac{5}{7}\simeq 5{,}9.$$

  La funzione è dunque crescente per $0 \leq t < -\frac{35}{2}\ln\frac{5}{7}$, decrescente per $t > -\frac{35}{2}\ln\frac{5}{7}$, e mostra pertanto l'andamento richiesto dalla concentrazione del medicinale nel sangue.

3. Per disegnare più accuratamente il grafico della funzione, determiniamo il punto di massimo relativo, che è anche assoluto, e studiamo la derivata seconda.

Per il massimo troviamo:

$$y\left(-\frac{35}{2}\ln\frac{5}{7}\right)=\frac{7}{2}\left[e^{-\frac{1}{7}\left(-\frac{35}{2}\ln\frac{5}{7}\right)}-e^{-\frac{1}{5}\left(-\frac{35}{2}\ln\frac{5}{7}\right)}\right]=\frac{7}{2}\left[e^{\frac{5}{2}\ln\frac{5}{7}}-e^{\frac{7}{2}\ln\frac{5}{7}}\right]=$$

$$\frac{7}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^5}-\sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^7}\right]\simeq 0{,}4,$$

quindi il punto di massimo ha approssimativamente coordinate (5,9; 0,4).

Calcoliamo la derivata seconda:

$$y''(t)=\frac{1}{10}\left(-\frac{7}{5}e^{-\frac{t}{5}}+\frac{5}{7}e^{-\frac{t}{7}}\right)=\frac{1}{350}\left(25e^{-\frac{t}{7}}-49e^{-\frac{t}{5}}\right)$$

e studiamo il suo segno:

$$y''(t)>0 \rightarrow 25e^{-\frac{t}{7}}-49e^{-\frac{t}{5}}>0 \rightarrow 25e^{-\frac{t}{7}}>49e^{-\frac{t}{5}} \rightarrow e^{\frac{t}{5}-\frac{t}{7}}>\frac{49}{25} \rightarrow e^{\frac{2}{35}t}>\frac{49}{25} \rightarrow$$

$$\frac{2}{35}t>\ln\left(\frac{7}{5}\right)^2 \rightarrow t>\frac{35}{2}\cdot 2\ln\left(\frac{7}{5}\right) \rightarrow t>35\ln\left(\frac{7}{5}\right), \text{ con } 35\ln\left(\frac{7}{5}\right)\simeq 11{,}8.$$

Quindi la derivata seconda è positiva, e la funzione volge la concavità verso l'alto, per $t > 35\ln\left(\frac{7}{5}\right)$, mentre la derivata seconda è negativa, e la funzione volge la concavità verso il basso per $0 \leq t < 35\ln\left(\frac{7}{5}\right)$.

Disegniamo il grafico plausibile della funzione relativa alla somministrazione per via intramuscolare confrontandolo con quello relativo alla somministrazione per via endovenosa.

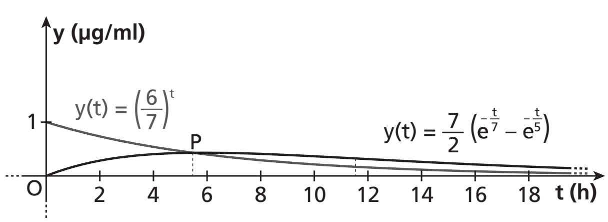

Figura 2

Per individuare il punto P di intersezione fra i due grafici valutiamo la funzione differenza $d(x)=\left(\frac{6}{7}\right)^t-\frac{7}{2}\left(e^{-\frac{t}{7}}-e^{-\frac{t}{5}}\right)$ per $t=5$ e per $t=6$: $d(5)\simeq 0{,}037$; $d(6)\simeq 0{,}035$. Quindi le due concentrazioni diventano uguali in un tempo $t \in \left]5; 6\right[$.

Con la somministrazione per via intramuscolare, nelle prime ore si ha una concentrazione minore rispetto alla somministrazione per via endovenosa, ma dalla sesta ora in poi la concentrazione risulta maggiore.

4. La quantità totale di farmaco (in µg/ml) accumulata in un organo si può calcolare mediante un integrale improprio riferito all'intervallo $[0; +\infty[$. Valutiamo i due casi in esame.

Accumulo nel caso di somministrazione per via endovenosa:

$$A_e = \int_0^{+\infty} v(t)\,dt = \int_0^{+\infty} k\cdot y(t)\,dt = k\int_0^{+\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^t dt = k\cdot\lim_{z\to+\infty}\int_0^z\left(\frac{6}{7}\right)^t dt = k\cdot\lim_{z\to+\infty}\frac{1}{\ln\frac{6}{7}}\left[\left(\frac{6}{7}\right)^t\right]_0^z =$$

$$k\cdot\lim_{z\to+\infty}\frac{1}{\ln\frac{6}{7}}\left[\left(\frac{6}{7}\right)^z-\left(\frac{6}{7}\right)^0\right] = k\cdot\frac{1}{\ln\frac{6}{7}}[0-1] = -\frac{k}{\ln\frac{6}{7}} \simeq 6{,}49k.$$

Accumulo nel caso di somministrazione per via intramuscolare:

$$A_i = \int_0^{+\infty} v(t)\,dt = \int_0^{+\infty} k\cdot y(t)\,dt = k\cdot\int_0^{+\infty}\frac{7}{2}\left(e^{-\frac{t}{7}}-e^{-\frac{t}{5}}\right)dt = k\cdot\lim_{z\to+\infty}\frac{7}{2}\left(e^{-\frac{t}{7}}-e^{-\frac{t}{5}}\right)dt =$$

$$k\cdot\lim_{z\to+\infty}\frac{7}{2}\left[-7e^{-\frac{t}{7}}+5e^{-\frac{t}{5}}\right]_0^z = k\cdot\lim_{z\to+\infty}\frac{7}{2}\left[\left(-7e^{-\frac{z}{7}}+5e^{-\frac{z}{5}}\right)-(-7+5)\right] =$$

$$k\cdot\frac{7}{2}[0-(-2)] = 7k.$$

Negli organi si accumula perciò una quantità maggiore di farmaco se si procede per via intramuscolare.

PROBLEMA 2

1. La funzione $f(x)=(4x-2)e^{2x}$ è continua e infinitamente derivabile su $\mathbb{R}$.
Studiamo la sua derivata prima per determinare i suoi eventuali punti di minimo e di massimo.

$$f'(x) = 4e^{2x}+(4x-2)\cdot 2e^{2x} = 8xe^{2x}.$$

Otteniamo allora:

- $f'(x)=0$ per $x=0$, con $f(0)=(4\cdot 0-2)e^{2\cdot 0}=-2$;
- $f'(x)>0$ e $f(x)$ crescente per $x>0$;
- $f'(x)<0$ e $f(x)$ decrescente per $x<0$.

La funzione ha dunque un solo punto di minimo relativo e assoluto di coordinate $(0;-2)$.

Procediamo in modo analogo con la derivata seconda.

$$f''(x) = 8e^{2x}+8x\cdot 2e^{2x} = (8+16x)e^{2x}.$$

Risulta:

- $f''(x)=0$ per $x=-\frac{1}{2}$, con $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left[4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2\right]e^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=-4e^{-1}=-\frac{4}{e}\simeq-1{,}47$;
- $f''(x)>0$ e $f(x)$ volge la concavità verso l'alto per $x>-\frac{1}{2}$;
- $f''(x)<0$ e $f(x)$ volge la concavità verso il basso per $x<-\frac{1}{2}$.

La funzione ha dunque un solo punto di flesso di coordinate $\left(-\frac{1}{2};-\frac{4}{e}\right)$.

Per disegnare il grafico G_f, determiniamo infine le intersezioni con gli assi, i limiti agli estremi del dominio e il segno della funzione:

$f(0) = -2$ come già detto;

$f(x) = 0 \ \rightarrow \ (4x-2)e^{2x} = 0 \ \rightarrow \ 4x-2 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{1}{2}$;

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (4x-2)e^{2x} = 0$;

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (4x-2)e^{2x} = +\infty$;

$f(x) > 0 \ \rightarrow \ (4x-2)e^{2x} > 0 \ \rightarrow \ 4x-2 > 0 \ \rightarrow \ x > \frac{1}{2}$.

Disegniamo un grafico plausibile della funzione.

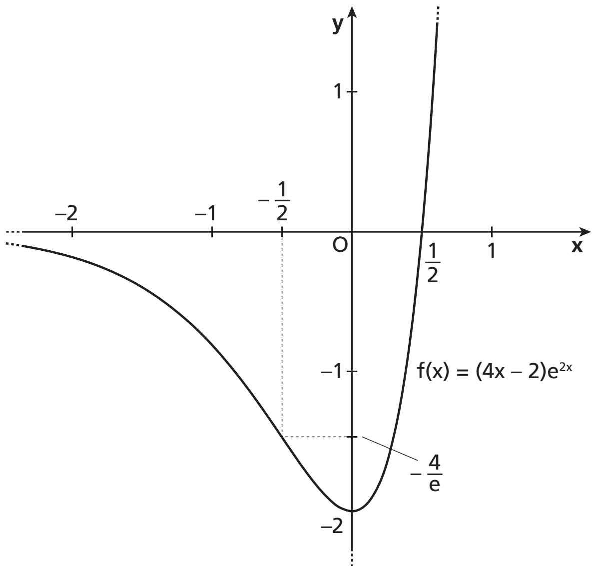

Figura 3

2. Poiché $g(x) = f(-x)$, la funzione $g(x)$ è simmetrica a $f(x)$ rispetto all'asse y; tracciamo il suo grafico G_g a partire dal grafico di $f(x)$.

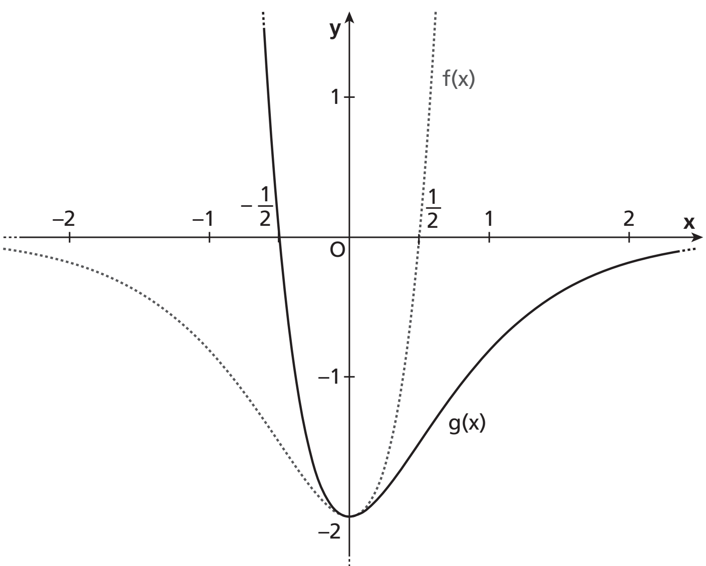

Figura 4

3. I punti P e Q hanno coordinate $P\left(\frac{1}{2};0\right)$ e $Q\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Per la simmetria dei grafici G_f e G_g abbiamo:

$$A=-\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0} g(x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)dx\right)=-2\int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)dx=-2\int_{0}^{\frac{1}{2}}[(4x-2)e^{2x}]dx;$$

abbiamo anteposto il segno meno all'integrale per avere un valore positivo per l'area, visto che le funzioni sono negative nell'intervallo considerato.

Calcoliamo l'integrale indefinito corrispondente:

$$\int[(4x-2)e^{2x}]dx=\int(4xe^{2x}-2e^{2x})dx=$$

$$\int 2x\cdot 2e^{2x}dx-\int 2e^{2x}dx=\int 2x\cdot \mathrm{D}[e^{2x}]dx-\int \mathrm{D}[e^{2x}]dx=$$

$$2xe^{2x}-\int 2e^{2x}dx-e^{2x}=$$

$$2xe^{2x}-e^{2x}-e^{2x}+c=(2x-2)e^{2x}+c,$$

dove siamo ricorsi all'integrazione per parti per risolvere $\int 4xe^{2x}dx$.

Tornando al calcolo dell'area, otteniamo:

$$A=-2\int_{0}^{\frac{1}{2}}[(4x-2)e^{2x}]dx=-2[(2x-2)e^{2x}]_{0}^{\frac{1}{2}}=$$

$$-2\left\{\left[\left(2\cdot\frac{1}{2}-2\right)e^{2\frac{1}{2}}\right]-[(2\cdot 0-2)e^{2\cdot 0}]\right\}=$$

$$-2(-e+2)\simeq 1,44.$$

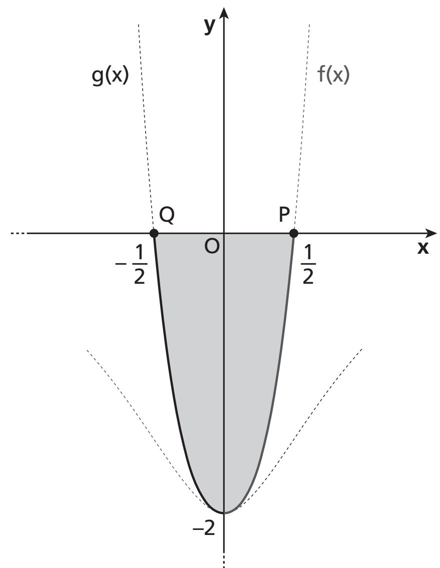

Figura 5

4. Consideriamo la funzione $f_a(x)=(2ax-2)e^{ax}$ della famiglia assegnata, con $a\neq 0$.
Osserviamo che la funzione $f(x)$ considerata in precedenza è la funzione della famiglia che si ottiene per $a=2$, mentre $g(x)$ si ottiene per $a=-2$.
Più in generale, l'andamento della funzione $f_a(x)$ è simile a quello della funzione $f(x)$ per $a>0$ e a quello della funzione $g(x)$ per $a<0$. In particolare, per $a>0$ $f_a(x)$ è ottenuta da $f(x)$ mediante una dilatazione o una contrazione orizzontale, per $a<0$ $f_a(x)$ è ottenuta da $g(x)$ mediante una dilatazione o contrazione orizzontale:

$$f_a(x)=f(h(x)),\text{ con } h(x)=ax \text{ e } a\neq 0.$$

Determiniamo il punto di flesso di $f_a(x)$:

$$f_a'(x)=2ae^{ax}+(2ax-2)\cdot ae^{ax}=2a^2xe^{ax},$$

$$f_a''(x)=2a^2e^{ax}+2a^3xe^{ax}=2a^2(1+ax)e^{ax}.$$

Poiché $a\neq 0$ per ipotesi, risulta:

$$f_a''(x)=0\ \rightarrow\ 1+ax=0\ \rightarrow\ x=-\frac{1}{a};$$

inoltre $f_a''(x)$ cambia di segno prima e dopo $x=-\frac{1}{a}$, che risulta dunque l'ascissa dell'unico punto di flesso. Calcoliamo la corrispondente ordinata:

$$f_a\left(-\frac{1}{a}\right)=\left[2a\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)-2\right]e^{a\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)}=-4e^{-1}=-\frac{4}{e},$$

e osserviamo che il suo valore non dipende da a.

Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $f_a(x)$ nel punto di flesso $F\left(-\frac{1}{a};-\frac{4}{e}\right)$ vale:

$$f_a'\left(-\frac{1}{a}\right)=2a^2\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)e^{a\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)}=-2ae^{-1}=-\frac{2a}{e}$$

e la retta tangente ha equazione:

$$y-f_a\left(-\frac{1}{a}\right)=f_a'\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot\left[x-\left(-\frac{1}{a}\right)\right]\rightarrow y+\frac{4}{e}=-2\frac{a}{e}\cdot\left(x+\frac{1}{a}\right)\rightarrow$$

$$y=-2\frac{a}{e}x-\frac{2}{e}-\frac{4}{e}\rightarrow y=-2\frac{a}{e}x-\frac{6}{e}.$$

Determiniamo le intersezioni della retta tangente con gli assi cartesiani.

Intersezione con l'asse x:

$$\begin{cases}y=-2\frac{a}{e}x-\frac{6}{e}\\ y=0\end{cases}\rightarrow -2\frac{a}{e}x-\frac{6}{e}=0\rightarrow -2ax-6=0\rightarrow x=-\frac{3}{a}\rightarrow A\left(-\frac{3}{a};0\right).$$

Intersezione con l'asse y:

$$\begin{cases}y=-2\frac{a}{e}x-\frac{6}{e}\\ x=0\end{cases}\rightarrow y=-2\frac{a}{e}\cdot 0-\frac{6}{e}\rightarrow y=-\frac{6}{e}\rightarrow B\left(0;-\frac{6}{e}\right).$$

Rappresentiamo la situazione relativa al caso $a>0$ nel disegno qui sotto, ricordando che la situazione relativa al caso $a<0$ si ottiene per simmetria rispetto all'asse y.

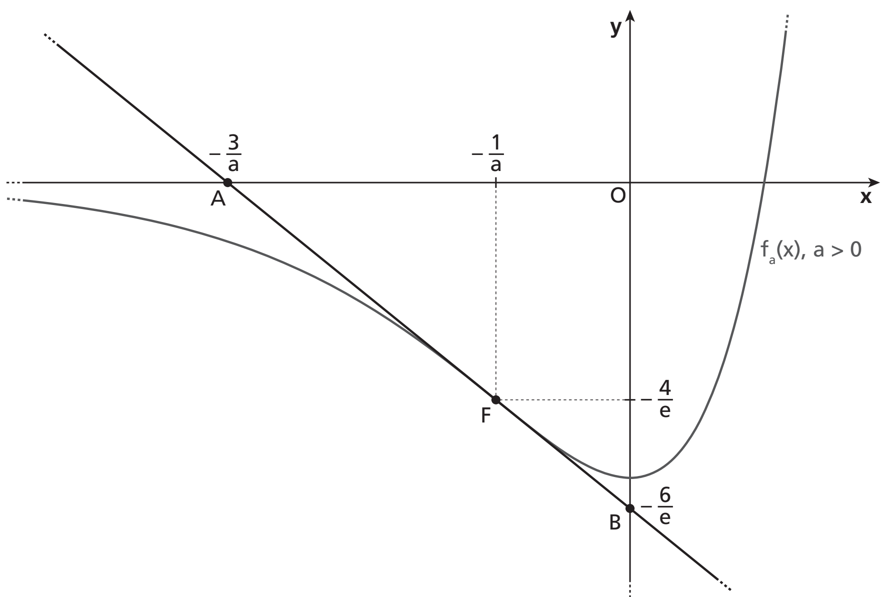

Figura 6

Il triangolo OAB è isoscele se i cateti OA e OB hanno la stessa lunghezza; imponendo questa condizione troviamo il valore di a cercato:

$$|x_A|=|y_B|\rightarrow\left|-\frac{3}{a}\right|=\left|-\frac{6}{e}\right|\rightarrow\frac{3}{a}=\pm\frac{6}{e}\rightarrow a=\pm\frac{e}{2}.$$

I valori di a per i quali OAB è isoscele sono due.

Per $a=\frac{e}{2}$, la tangente al grafico di $f_{\frac{e}{2}}$ nel punto di flesso è parallela alla bisettrice $y=-x$, come in figura.

Per $a=-\frac{e}{2}$, la tangente al grafico di $f_{-\frac{e}{2}}$ nel punto di flesso è parallela alla bisettrice $y=x$.

QUESTIONARIO

1 Individuiamo la regione compresa fra il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x + 3$ e la retta di equazione $y = 3$.

La funzione $f(x)$ ha dominio $\mathbb{R}$ e non è né pari né dispari. È una funzione polinomiale di terzo grado, quindi, oltre a non avere asintoti orizzontali e verticali, non ha asintoti obliqui.

Cerchiamo le intersezioni fra grafico della funzione e retta.

$$f(x) = 3 \rightarrow x^3 - 3x + 3 = 3 \rightarrow x^3 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow$$
$$x = -\sqrt{3} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{3}.$$

Il grafico di $f(x)$ interseca la retta di equazione $y = 3$ in $(-\sqrt{3}; 3)$, $(0; 3)$, $(\sqrt{3}; 3)$.

La derivata prima della funzione

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

assume valori positivi per $x < -1 \vee x > 1$ e negativi per $-1 < x < 1$.
Dunque $f(x)$ è crescente per $x < -1 \vee x > 1$ e decrescente per $-1 < x < 1$.

La funzione ha un massimo relativo in $(-1; 5)$ e un minimo relativo in $(1; 1)$.

La derivata seconda $f''(x) = 6x$ assume valori positivi per $x > 0$ e negativi per $x < 0$. Quindi $f(x)$ ha la concavità verso l'alto per $x > 0$ e verso il basso per $x < 0$.

Disegniamo il grafico approssimativo della funzione $f(x)$ e della retta $y = 3$, individuando la regione R da ruotare.

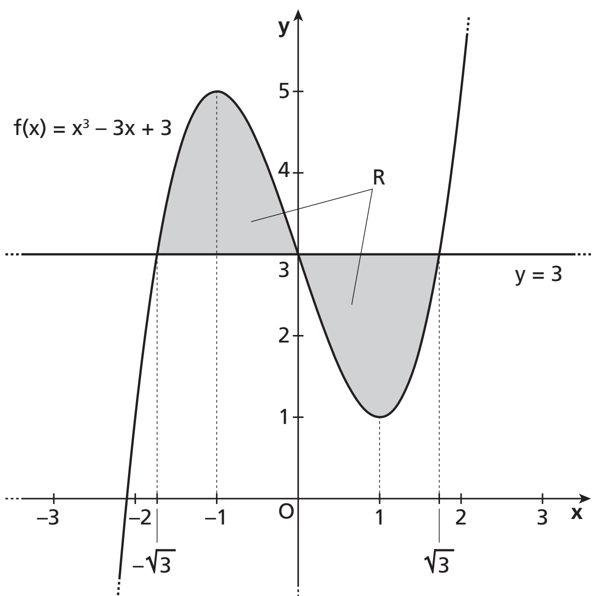

Figura 7

Il volume del solido generato dalla rotazione di R attorno alla retta di equazione $y = 3$ è dato dall'integrale:

$$V = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} [f(x) - 3]^2 dx = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x)^2 dx = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^6 - 6x^4 + 9x^2) dx =$$

$$\pi \left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{6}{5}x^5 + 3x^3 \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} =$$

$$\pi\left\{\left[\frac{1}{7}(\sqrt{3})^7-\frac{6}{5}(\sqrt{3})^5+3(\sqrt{3})^3\right]-\left[\frac{1}{7}(-\sqrt{3})^7-\frac{6}{5}(-\sqrt{3})^5+3(-\sqrt{3})^3\right]\right\}=$$

$$\pi\left[\left(\frac{27}{7}\sqrt{3}-\frac{54}{5}\sqrt{3}+9\sqrt{3}\right)-\left(-\frac{27}{7}\sqrt{3}+\frac{54}{5}\sqrt{3}-9\sqrt{3}\right)\right]=$$

$$\pi\left(\frac{54}{7}-\frac{108}{5}+18\right)\sqrt{3}=\pi\frac{270-756+630}{35}\sqrt{3}=\pi\frac{144}{35}\sqrt{3}\simeq 22,39.$$

2 La funzione $f_1(x)=\frac{1}{3^{\frac{1}{x}}+1}$ è definita per $x\neq 0$; calcoliamo il limite sinistro e destro della funzione nel punto di discontinuità $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{3^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{3^{-\infty}+1}=\frac{1}{0+1}=1,\qquad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{3^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{3^{+\infty}+1}=\frac{1}{+\infty+1}=0.$$

Poiché i due limiti sono finiti e diversi, la funzione presenta un salto (discontinuità di prima specie) pari a 1 in $x=0$.

Anche la funzione $f_2(x)=\frac{x}{3^{\frac{1}{x}}+1}$ è definita per $x\neq 0$; calcoliamo il limite sinistro e destro della funzione nel punto di discontinuità $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{3^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{0}{3^{-\infty}+1}=\frac{0}{0+1}=0,\qquad \lim_{x\to 0+}\frac{x}{3^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{0}{3^{+\infty}+1}=\frac{0}{+\infty+1}=0.$$

Poiché i due limiti sono finiti e uguali, la funzione presenta una discontinuità eliminabile (discontinuità di terza specie) in $x=0$.

3 Indichiamo con $p=0,15$ la probabilità che una persona della popolazione sia influenzata.

a. Consideriamo la variabile casuale discreta $X=$ «numero di alunni influenzati». Tale variabile segue una distribuzione di probabilità binomiale. Possiamo quindi calcolare la probabilità che più di due alunni, in una classe di 20 alunni, siano a casa influenzati mediante la differenza:

$$p(X>2)=1-p(X=0)-p(X=1)-p(X=2).$$

Calcoliamo separatamente i diversi termini:

$$p(X=0)=\binom{20}{0}p^0(1-p)^{20}=1\cdot 1\cdot 0,85^{20}\simeq 0,039\ \rightarrow\ 3,9\%,$$

$$p(X=1)=\binom{20}{1}p^1(1-p)^{19}=20\cdot 0,15\cdot 0,85^{19}\simeq 0,137\ \rightarrow\ 13,7\%,$$

$$p(X=2)=\binom{20}{2}p^2(1-p)^{18}=190\cdot 0,15^2\cdot 0,85^{18}\simeq 0,229\ \rightarrow\ 22,9\%.$$

Risulta dunque:

$$p(X>2)\simeq 1-0,039-0,137-0,229=0,595\ \rightarrow\ 59,5\%.$$

La probabilità che siano a casa influenzati almeno 3 studenti della classe è quasi il 60%.

b. Più in generale, riferendosi alla popolazione di 500 studenti della scuola, la probabilità che ce ne siano più di 50 a casa ammalati è data da:

$$p(X>50)=1-\sum_{n=0}^{50}p(X=n)=1-\sum_{n=0}^{50}\binom{500}{n}0,15^n\cdot 0,85^{500-n}.$$

I calcoli in questo caso sono molto laboriosi e per il loro sviluppo sarebbe opportuno ricorrere a un foglio elettronico. Potendo implementare il calcolo a computer, si trova:

$$p(X > 50) \simeq 0{,}999 \rightarrow 99{,}9\%.$$

4 I due piani si intersecano lungo una retta perché i coefficienti delle variabili corrispondenti non hanno lo stesso rapporto $\left(\frac{1}{1} \neq \frac{-3}{2}\right)$.

La retta r intersezione di α e β è rappresentata dal sistema formato dalle equazioni dei due piani.

$$r = \alpha \cap \beta = \begin{cases} x - 3y + z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3y - z + 5 \\ (3y - z + 5) + 2y - z + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3y - z + 5 \\ 5y - 2z + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3y - z + 5 \\ y = \frac{2}{5}z - \frac{8}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3\left(\frac{2}{5}z - \frac{8}{5}\right) - z + 5 \\ y = \frac{2}{5}z - \frac{8}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}z + \frac{1}{5} \\ y = \frac{2}{5}z - \frac{8}{5} \end{cases}$$

Posto $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$, troviamo l'equazione parametrica della retta $r = \alpha \cap \beta$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}t + \frac{1}{5} \\ y = \frac{2}{5}t - \frac{8}{5} \\ z = t \end{cases}$$

Verifichiamo che la retta appartiene al piano γ di equazione $3x + y - z + 1 = 0$; per farlo, sostituiamo a x, y, z nell'equazione del piano le espressioni parametriche di r, e verifichiamo che otteniamo un'identità:

$$3\left(\frac{1}{5}t + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}t - \frac{8}{5}\right) - t + 1 = 0 \rightarrow \frac{3}{5}t + \frac{3}{5} + \frac{2}{5}t - \frac{8}{5} - t + 1 = 0 \rightarrow 0 = 0.$$

Avendo ottenuto un'identità, risulta $r \subset \gamma$.

5 Consideriamo l'arco di parabola di equazione $y = 4 - x^2$ appartenente al primo quadrante. Un generico punto P su tale arco ha coordinate $P(k; 4 - k^2)$, con $0 < k < 2$.

Da P tracciamo la tangente alla parabola, che interseca gli assi x e y rispettivamente in A e in B. Poiché $y' = -2x$, la retta tangente alla parabola in P ha equazione:

$$y - (4 - k^2) = -2k(x - k) \rightarrow$$

$$\rightarrow y - 4 + k^2 = -2kx + 2k^2 \rightarrow y = -2kx + k^2 + 4.$$

Le coordinate di A sono:

$$\begin{cases} y = -2kx + k^2 + 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2kx + k^2 + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{k^2 + 4}{2k} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A\left(\frac{k^2 + 4}{2k}; 0\right).$$

Le coordinate di B sono:

$$\begin{cases} y = -2kx + k^2 + 4 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = k^2 + 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow B(0; k^2 + 4).$$

L'area del triangolo OAB, in funzione di k, risulta:

$$A(k) = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2 + 4}{2k} \cdot (k^2 + 4) = \frac{(k^2 + 4)^2}{4k}.$$

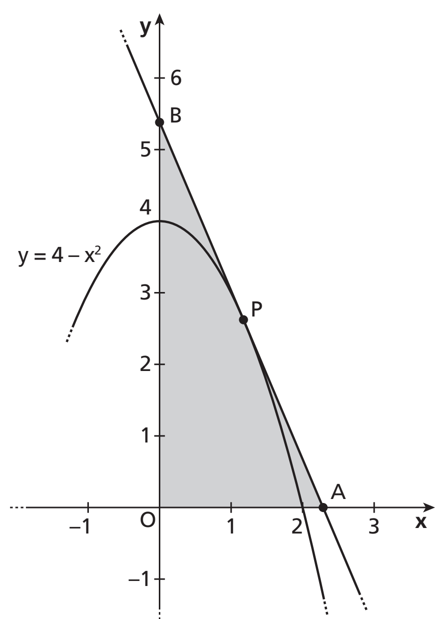

Figura 8

Cerchiamo il valore di k che rende minima tale area:

$$A'(k) = \frac{2(k^2+4)\cdot 2k\cdot 4k - (k^2+4)^2\cdot 4}{16k^2} = \frac{4(k^2+4)(3k^2-4)}{16k^2},$$

$$A'(k) = 0 \rightarrow 3k^2 - 4 = 0 \rightarrow k = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Nell'intervallo considerato $]0; 2[$ è dunque:

- $A'(k) = 0$ per $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$;
- $A'(k) < 0$ e $A(k)$ decrescente per $0 < k < \frac{2}{\sqrt{3}}$;
- $A'(k) > 0$ e $A(k)$ crescente per $\frac{2}{\sqrt{3}} < k < 2$;

quindi l'area del triangolo OAB assume valore minimo per $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Il punto P corrispondente ha coordinate:

$$P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; 4 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right) \rightarrow P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; 4 - \frac{4}{3}\right) \rightarrow P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{8}{3}\right).$$

6 In generale, la funzione densità di probabilità di una variabile casuale continua X definita su $[a; b]$ avente distribuzione uniforme è così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{se } a \le x \le b. \\ 0 & \text{se } x > b \end{cases}$$

Il valor medio e la varianza si calcolano rispettivamente con le formule:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

La variabile casuale X definita su $[2; 5]$ e con distribuzione uniforme ha dunque la seguente funzione densità di probabilità:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{3} & \text{se } 2 \le x \le 5, \\ 0 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

e i seguenti indici:

valore medio $\quad M(X) = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2},$

varianza $\quad \mathrm{var}(X) = \frac{(5-2)^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4},$

deviazione standard $\quad \sigma = \sqrt{\mathrm{var}(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Calcoliamo la probabilità richiesta con l'integrale definito della funzione densità:

$$p\left(\frac{7}{3} \le x \le \frac{17}{4}\right) = \int_{\frac{7}{3}}^{\frac{17}{4}} f(x)dx = \int_{\frac{7}{3}}^{\frac{17}{4}} \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}[x]_{\frac{7}{3}}^{\frac{17}{4}} = \frac{1}{3}\left(\frac{17}{4} - \frac{7}{3}\right) =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{51-28}{12} = \frac{23}{36} \simeq 0{,}64.$$

7 Per applicare il teorema della media dobbiamo prima verificare che $f(x)$ è continua in $[1; 6]$. I due tratti sono funzioni continue su $\mathbb{R}$ e in particolare sui rispettivi intervalli di definizione. Quindi dobbiamo verificare la continuità solo nel punto $x = 3$ di raccordo tra i due tratti.
Calcoliamo i limiti destro e sinistro in $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x-1) = f(3); \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^3}(e^{x-3}+1) = f(3).$$

I due limiti coincidono, quindi f è continua in $[1; 6]$.
Calcoliamo il valor medio della funzione $f(x)$:

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{6-1}\left[\int_1^3 (x-1)dx + \int_3^6 (e^{x-3}+1)dx\right] = \frac{1}{5}\left\{\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3 + [e^{x-3}+x]_3^6\right\} =$$

$$\frac{1}{5}\left[\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)+(e^3+6)-(e^0+3)\right] = \frac{e^3+4}{5}.$$

Cerchiamo la controimmagine di $\frac{e^3+4}{5} \simeq 4{,}82$.

Osserviamo che per $1 \le x \le 3$ è $0 \le f(x) = x-1 \le 2$, quindi la controimmagine di $\frac{e^3+4}{5}$ va cercata nell'intervallo $]3; 6]$.

$$f(x) = \frac{e^3+4}{5} \to e^{x-3}+1 = \frac{e^3+4}{5} \to e^{x-3} = \frac{e^3-1}{5} \to x = 3+\ln\frac{e^3-1}{5} \simeq 4{,}34.$$

8 La superficie sferica di raggio $r(t)$ vale

$$S(t) = 4\pi[r(t)]^2,$$

quindi la velocità di crescita della superficie sferica è:

$$S'(t) = 8\pi r(t)\cdot r'(t).$$

Imponiamo che la velocità di crescita della superficie sferica sia numericamente uguale alla velocità di crescita del raggio:

$$S'(t) = r'(t) \to 8\pi r(t)\cdot r'(t) = r'(t) \to [8\pi r(t)-1]r'(t) = 0.$$

Poiché è $r'(t) \neq 0$, perché il raggio *aumenta* al variare del tempo, deve allora essere:

$$8\pi r(t) - 1 = 0 \to r(t) = \frac{1}{8\pi}.$$

9 Il vettore direzione della retta r è $\vec{r}(2; 1; k)$, con $k \in \mathbb{R}$, mentre il vettore direzione perpendicolare al piano P è $\vec{p}(1; 2; -1)$. La retta r è parallela al piano P se $\vec{r}$ e $\vec{p}$ sono perpendicolari, cioè se:

$$\vec{r}\cdot\vec{p} = 0 \to 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + k\cdot(-1) = 0 \to k = 4.$$

La retta parallela al piano è dunque:

$$r: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 1+t \\ z = 4t \end{cases}$$

La distanza fra retta e piano coincide con la distanza di un qualunque punto della retta dal piano; considerato per esempio il punto della retta di coordinate $A(1; 1; 0)$, che si ottiene per $t = 0$, otteniamo:

$$d(r,P) = d(A,P) = \frac{|1\cdot 1 + 2\cdot 1 - 1\cdot 0 + 2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

10 Cerchiamo il punto di flesso della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x,$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1),$$

con $f''(x) = 0$ per $x = 1$, $f''(x) < 0$ per $x < 1$, $f''(x) > 0$ per $x > 1$.

La funzione presenta quindi un punto F di flesso di coordinate: $F(1; f(1)) = F(1; -2)$.
La retta t tangente al grafico G_f della funzione in tale punto ha equazione:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1) \;\rightarrow\; y + 2 = -3(x-1) \;\rightarrow\; y = -3x + 1.$$

Il centro della circonferenza cercata ha coordinate $C(0; c)$; inoltre, poiché la circonferenza è tangente a G_f nel punto di flesso F, il vettore CF risulta perpendicolare alla retta t. Imponiamo la condizione di perpendicolarità:

$$m_{CF} = -\frac{1}{m_t} \;\rightarrow\; \frac{y_F - y_C}{x_F - x_C} = -\frac{1}{-3} \;\rightarrow\; \frac{-2-c}{1-0} = \frac{1}{3} \;\rightarrow\; 2 + c = -\frac{1}{3} \;\rightarrow\; c = -\frac{7}{3}.$$

La circonferenza ha centro $C\left(0; -\frac{7}{3}\right)$ e passa per $F(1; -2)$; il suo raggio è dunque:

$$r = \overline{CF} = \sqrt{(1-0)^2 + \left(-2 + \frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Determiniamo l'equazione della circonferenza:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \;\rightarrow\; (x-0)^2 + \left(y + \frac{7}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 \;\rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + \frac{14}{3}y + \frac{49}{9} = \frac{10}{9} \;\rightarrow\; 9x^2 + 9y^2 + 42y + 39 = 0.$$

Pur non essendo richiesto, rappresentiamo graficamente la situazione.
Osserviamo che la derivata prima $f'(x) = 3x(x-2)$ è negativa per $0 < x < 2$, quindi la funzione è decrescente in tale intervallo.

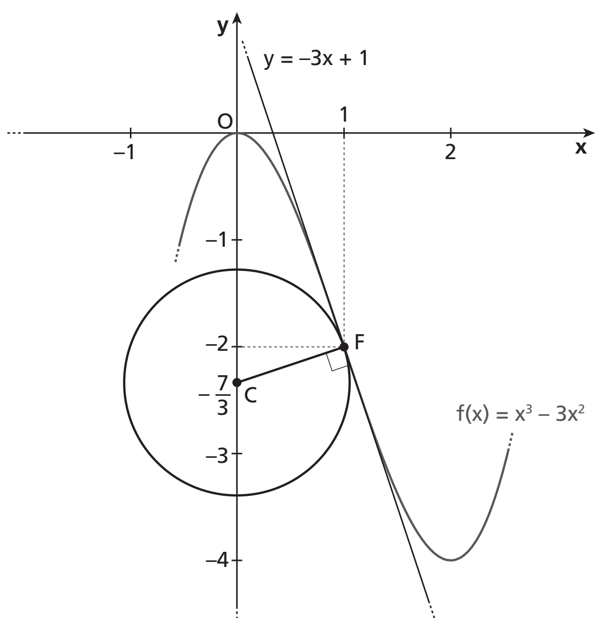

Figura 9