PROVA D'ESAME • SESSIONE STRAORDINARIA 2017

Liceo scientifico e opzione scienze applicate

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 257 Art. 18 comma 8).

PROBLEMA 1

L'azienda per cui lavori vuole aprire in città una pista di pattinaggio su ghiaccio e ti ha dato l'incarico di occuparti del progetto.

La pista verrà realizzata su un terreno di forma rettangolare, di base 40 metri e altezza 20 metri, e secondo le specifiche che ti sono state fornite sarà di forma ellittica[1] e avrà area pari a 600 m^2. Stabilito un sistema di assi cartesiani *Oxy*, il cui centro coincide con il centro dell'ellisse e con quello del rettangolo, in figura 1 sono rappresentati il terreno e la pista, in figura 2 la regione relativa al primo quadrante. La superficie in grigio è da adibire a deposito e a servizi tecnici, per cui deve essere inaccessibile al pubblico: essa è delimitata dalle tangenti alla pista passanti per i punti medi dei lati verticali *AB* e *CD*.

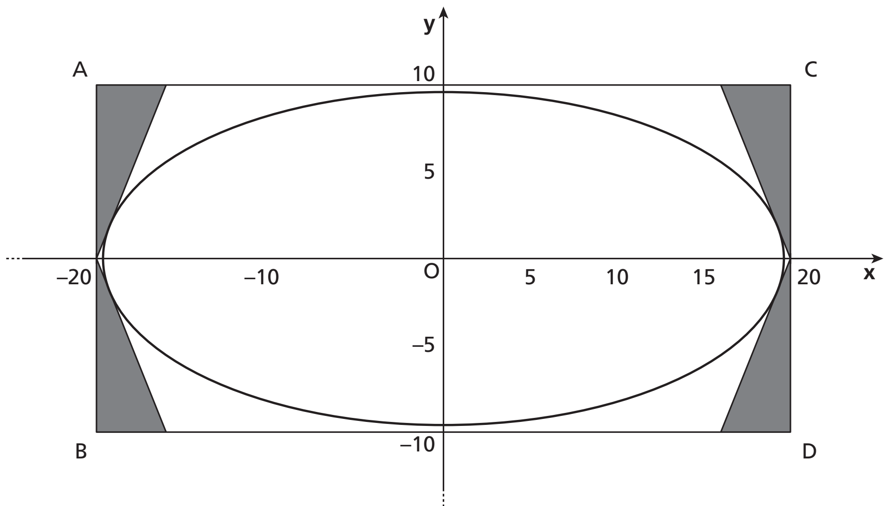

Figura 1

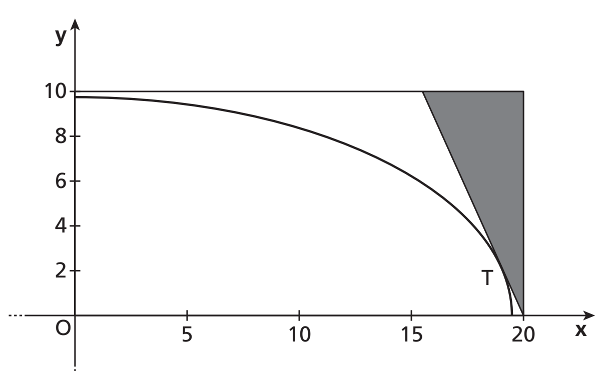

Figura 2

---

1. L'equazione dell'ellisse, in coordinate cartesiane, è la seguente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. Determina, in funzione di a e b (rispettivamente lunghezza del semiasse orizzontale e del semiasse verticale dell'ellisse) le coordinate del punto di tangenza T, e verifica che l'espressione della superficie totale S dell'area evidenziata in grigio nella figura 2 è:

$$S = \frac{50\sqrt{400 - a^2}}{b}.$$

2. Per motivi estetici, è richiesto che la proporzione tra il semiasse orizzontale e quello verticale dell'ellisse sia uguale a quella tra il lato orizzontale e quello verticale del rettangolo. Ricordando che l'area della pista[2] deve essere pari a 600 m^2, determina i valori di a e b (approssimati al centimetro). Verifica inoltre che la superficie evidenziata in grigio occupi meno del 15% del terreno disponibile.

Un'altra problematica da affrontare riguarda la scelta di un macchinario per la produzione del ghiaccio necessario per la pista, tenendo presenti la dimensione della pista, il tempo impiegato per tale produzione e il relativo consumo di energia. Tramite una ricerca di mercato, hai individuato un dispositivo che riesce a lavorare a una velocità che è inversamente proporzionale allo spessore raggiunto e in 3 ore di lavoro, a temperatura ambiente standard, produce una lastra di ghiaccio di superficie di 600 m^2 avente uno spessore di 3 cm.

3. Individua, per il macchinario selezionato, il modello matematico che descrive l'andamento dello spessore dello strato di ghiaccio in funzione del tempo.

Per un utilizzo ottimale, la pista deve avere uno spessore compreso tra i 6,5 e gli 8 cm.

4. Determina il tempo che il macchinario impiega a realizzare uno strato di ghiaccio di spessore 7,5 cm.

PROBLEMA 2

Le funzioni g_1, g_2, g_3, g_4 sono definite nel modo seguente:

$$g_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$g_2(x) = |x| - 1,$$

$$g_3(x) = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

$$g_4(x) = \ln(|x|).$$

1. Verifica che nei punti $x = 1$ e $x = -1$ le funzioni g_1, g_2, g_3, g_4 condividono le stesse rette tangenti.
2. Dopo aver tracciato i grafici delle funzioni g_1, g_2, g_3, g_4, deduci quelli delle funzioni:

$$f_1(x) = \begin{cases} \ln(|x|), & \text{se } |x| \geq 1 \\ -g_1(x), & \text{se } |x| < 1 \end{cases},$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \ln(|x|), & \text{se } |x| \geq 1 \\ -g_2(x), & \text{se } |x| < 1 \end{cases},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \ln(|x|), & \text{se } |x| \geq 1 \\ -g_3(x), & \text{se } |x| < 1 \end{cases},$$

classifica gli eventuali punti di non derivabilità di f_1, f_2, f_3 e posto

$$I_1 = \int_{-e}^{e} f_1(x)\,dx,$$

2. L'area della superficie racchiusa dall'ellisse di semiassi a e b è pari a πab.

$$I_2 = \int_{-e}^{e} f_2(x)dx,$$

$$I_3 = \int_{-e}^{e} f_3(x)dx,$$

verifica le disuguaglianze:

$$I_1 < I_3 < I_2.$$

3. Posto

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ g_1(x), & \text{se } 0 < x < 1, \\ \ln(|x|), & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

dimostra che la funzione:

$$H(x) = \int_0^x h(t)dt$$

ammette uno zero nell'intervallo $[\sqrt{e}; e]$.

4. Calcola il volume del solido ottenuto facendo ruotare di $\frac{\pi}{3}$ radianti intorno all'asse x la regione di piano delimitata dalle rette di equazioni $x = -1$, $x = +1$ e dai grafici di g_2 e g_1.

QUESTIONARIO

1 Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \ln(x)$, adoperando la definizione di derivata.

2 Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 2x + 1 & \text{per } x < 2 \\ x^2 + (k-1)x - 1 & \text{per } x \geq 2 \end{cases},$$

determinare, se possibile, k in modo che la funzione $f(x)$ e la sua derivata siano continue in tutto l'insieme di definizione.

3 Un solido ha per base la regione Π del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = x^2 + 2$ e l'asse x nell'intervallo $[0; 2]$. Per ogni punto P di Π, di ascissa x, l'intersezione del solido col piano passante per P e ortogonale all'asse delle x è un rettangolo di altezza $x + 1$. Calcolare il volume del solido.

4 Giovanni tira ripetutamente con l'arco a un bersaglio: la probabilità di colpirlo è del 28% per ciascun tiro. Se Giovanni esegue 10 tiri, calcolare la probabilità che il bersaglio venga colpito:

a. 4 volte;

b. le prime 4 volte.

5 Stabilire per quale valore del parametro k il grafico della funzione $f(x) = x^3 + 2x^2 + kx - 4$ ha una sola tangente parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Quante tangenti orizzontali ha il grafico della funzione per questo valore del parametro k?

6 In un sistema di riferimento cartesiano il piano π di equazione $3x - 4y - 22 = 0$ è tangente a una sfera avente come centro il punto $C(3; 3; 0)$. Determinare il raggio della sfera.

7 Data la funzione:

$$f(x) = \ln(x) - [\ln(x)]^2,$$

dimostrare che esistono due rette r e s tangenti al grafico della funzione in punti di ascissa $x > 1$, che passano entrambe per il punto $P(0;1)$ e scrivere le rispettive equazioni.

8 Determinare l'equazione della retta perpendicolare nel punto P di coordinate $(1;\, 1,\, 0)$ al piano di equazione $2x-2y+z=0$.

9 Sapendo che una moneta è truccata e che la probabilità che esca «testa» in un lancio è pari a p, determina i possibili valori che può assumere p, sapendo che la probabilità che esca testa esattamente 2 volte lanciando 4 volte la moneta è $\frac{8}{27}$.

10 Data la funzione integrale:

$$F(x)=\int_0^{e^{2x}} \ln(t)\,dt,$$

calcolare la sua derivata prima e di quest'ultima individuare gli eventuali punti stazionari.

Liceo scientifico e opzione scienze applicate

PROBLEMA 1

1. L'equazione generale dell'ellisse con centro nell'origine del sistema di riferimento e con i semiassi orizzontali e verticale lunghi rispettivamente a e b è:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Limitatamente al primo quadrante, il profilo della pista ellittica è allora descritto dalla funzione:

$$f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

con a e b positivi, $0<a<20$, $0<b<10$ e $0\le x\le a$.

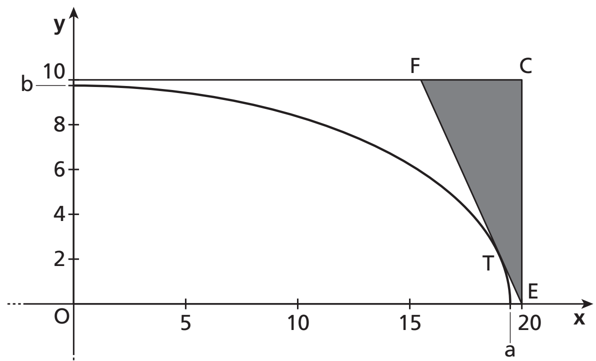

Figura 3

La generica retta (tranne quella verticale) passante per il punto $E(20;0)$ ha equazione:

$$y-0=m(x-20)\ \rightarrow\ y=mx-20m,$$

con m reale.

Fra queste rette cerchiamo quella tangente al grafico di $f(x)$, imponendo che il sistema formato dalle equazioni di $f(x)$ e della retta abbia una sola soluzione.

$$\begin{cases} y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \\ y=mx-20m \end{cases}\ \rightarrow\ mx-20m=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ \rightarrow$$

$$m^2x^2+400m^2x-40m^2x=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\ \rightarrow$$

$$a^2m^2x^2+400a^2m^2-40a^2m^2x=a^2b^2-b^2x^2\ \rightarrow$$

$$(a^2m^2+b^2)x^2-40a^2m^2x+400a^2m^2-a^2b^2=0.$$

Le eventuali soluzioni di questa equazione di secondo grado in x sono:

$$x=\frac{20a^2m^2\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a^2m^2+b^2}$$

L'equazione di secondo grado in x ha una sola soluzione se il suo discriminante è nullo:

$$\frac{\Delta}{4}=0\ \rightarrow\ (20a^2m^2)^2-(a^2m^2+b^2)(400a^2m^2-a^2b^2)=0\ \rightarrow$$

$$400a^4m^4 - 400a^4m^4 + a^4b^2m^2 - 400a^2b^2m^2 + a^2b^4 = 0 \rightarrow$$

$$a^2b^2(a^2m^2 - 400m^2 + b^2) = 0 \rightarrow a^2m^2 - 400m^2 + b^2 = 0 \rightarrow (a^2 - 400)m^2 = -b^2$$

Osserviamo che $a < 20 \rightarrow a^2 < 400$. Cambiamo il segno di entrambi i membri dell'equazione per ottenere un coefficiente positivo per m^2:

$$(400 - a^2)m^2 = b^2 \rightarrow m^2 = \frac{b^2}{400 - a^2} \rightarrow m = -\frac{b}{\sqrt{400 - a^2}},$$

dove abbiamo considerato solo la radice positiva per m perché il coefficiente angolare della retta cercata è negativo (vedi la figura 2 del testo del problema).

In corrispondenza di tale valore di m si ha $\frac{\Delta}{4} = 0$, quindi il punto di tangenza T ha ascissa data dalla soluzione dell'equazione di secondo grado scritta sopra:

$$x_T = \frac{20a^2m^2}{a^2m^2 + b^2} = \frac{20a^2\dfrac{b^2}{400 - a^2}}{a^2\dfrac{b^2}{400 - a^2} + b^2} = \frac{\dfrac{20a^2b^2}{400 - a^2}}{\dfrac{a^2b^2 + b^2(400 - a^2)}{400 - a^2}} = \frac{20a^2b^2}{400b^2} = \frac{a^2}{20}.$$

L'ordinata di T è:

$$f(x_T) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2}{20}\right)^2} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{400a^2 - a^4}{400}} =$$

$$\frac{ab}{20a}\sqrt{400 - a^2} = \frac{b}{20}\sqrt{400 - a^2}.$$

Il punto T ha dunque coordinate $T\left(\frac{a^2}{20}; \frac{b}{20}(400 - a^2)\right)$.

Potevamo cercare le coordinate di T anche per altra via. Considerato un punto generico $P(\alpha; f(\alpha))$ del grafico di $f(x)$, determiniamo la retta tangente al grafico in P e imponiamo che tale retta passi per il punto $E(20; 0)$. Il punto P che soddisfa tale proprietà sarà dunque il punto di tangenza T cercato.
La retta tangente in P ha equazione:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha).$$

Poiché $f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$, l'equazione della retta tangente in P diventa:

$$y - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \alpha^2} = -\frac{b\alpha}{a\sqrt{a^2 - \alpha^2}}(x - \alpha).$$

Imponiamo il passaggio per (20; 0):

$$0 - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \alpha^2} = -\frac{b\alpha}{a\sqrt{a^2 - \alpha^2}}(20 - \alpha) \rightarrow$$

$$a^2 - \alpha^2 = \alpha(20 - \alpha) \rightarrow$$

$$a^2 - \alpha^2 = 20\alpha - \alpha^2 \rightarrow \alpha = \frac{a^2}{20}.$$

L'ascissa di T è dunque $x_T = \alpha = \frac{a^2}{20}$ e, come prima, si trova $T\left(\frac{a^2}{20}; \frac{b}{20}(400 - a^2)\right)$.

La retta tangente in T ha equazione:

$$y = mx - 20m, \text{ con } m = -\frac{b}{\sqrt{400 - a^2}} \rightarrow$$

$$y=-\frac{b}{\sqrt{400-a^2}}x+\frac{20b}{\sqrt{400-a^2}}.$$

Determiniamo ora l'espressione della superficie S calcolando le coordinate dei punti F e C.
Determiniamo le coordinate del punto di intersezione F fra tale retta tangente in T e il bordo superiore del terreno rettangolare, di equazione $y = 10$:

$$\begin{cases} y=-\frac{b}{\sqrt{400-a^2}}x+\frac{20b}{\sqrt{400-a^2}} \\ y=10 \end{cases} \rightarrow$$

$$-\frac{b}{\sqrt{400-a^2}}x+\frac{20b}{\sqrt{400-a^2}}=10 \rightarrow$$

$$-bx+20b=10\sqrt{400-a^2} \rightarrow x=\frac{20b-10\sqrt{400-a^2}}{b} \rightarrow x=20-\frac{10}{b}\sqrt{400-a^2},$$

quindi le coordinae di F sono $F\left(20-\frac{10}{b}\sqrt{400-a^2};10\right)$.

Le coordinate di C sono immediate: $C(20; 10)$.
La superficie evidenziata in grigio nella figura 3 è un triangolo di area:

$$S=\frac{1}{2}\overline{FE}\cdot\overline{CE}=\frac{1}{2}\left(20-20+\frac{10}{b}\sqrt{400-a^2}\right)\cdot 10=\frac{50}{b}\sqrt{400-a^2}.$$

2. Il rapporto fra i semiassi dell'ellisse deve essere lo stesso di quello fra i lati del rettangolo, quindi:

$$\frac{a}{b}=\frac{40}{20} \rightarrow a=2b.$$

L'equazione della corrispondente ellisse è:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{(2b)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

L'area racchiusa da questa ellisse è pari a:

$$A=\pi ab \rightarrow A=2\pi b^2.$$

Imponiamo che tale area sia di 600 m^2 e troviamo i valori di a e b approssimati al centimetro:

$$2\pi b^2=600 \rightarrow b=\sqrt{\frac{300}{\pi}}\simeq 9{,}77\ \text{m} \rightarrow a=2b\simeq 19{,}54\ \text{m}.$$

Con tali valori la superficie complessivamente destinata a deposito e servizi tecnici, evidenziata in grigio nella figura 1, ha area:

$$4S\simeq 4\cdot\frac{50}{9{,}77}\sqrt{400-19{,}54^2}\simeq 87{,}30\ \text{m}^2.$$

L'area del terreno disponibile, individuato dal rettangolo di lati 40 m e 20 m, è di 800 m^2, quindi:

$$\frac{4S}{800}\cdot 100=\frac{87{,}30}{800}\cdot 100\simeq 11\%.$$

La superficie adibita a deposito e servizi tecnici occupa meno del 15% dell'intero spazio a disposizione.

3. Indichiamo con $h(t)$ l'altezza della lastra di ghiaccio prodotta dal macchinario dopo un intervallo di tempo t dall'accensione, relativamente alla pista di area 600 m^2. Il tempo t è misurato in ore, l'altezza h in centimetri.

La velocità di produzione del ghiaccio, rappresentata dalla funzione $h'(t)$, è inversamente proporzionale allo spessore raggiunto $h(t)$; questo equivale a dire che le grandezze h' e h sono legate dalla relazione $h' \cdot h = k$, con k costante.
Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili; risolviamola:

$$h' \cdot h = k \rightarrow hdh = kdt \rightarrow \int hdh = \int kdt \rightarrow \frac{1}{2}h^2 = kt + c_1 \rightarrow h(t) = \sqrt{2kt + c},$$

dove abbiamo considerato solo il radicale positivo perché $h(t)$ rappresenta lo spessore della lastra di ghiaccio e quindi non può essere negativo.
Determiniamo i valori delle costanti k e c nell'espressione di $h(t)$. Sappiamo che:

- all'istante iniziale lo spessore della lastra è di 0 cm: $h(0) = 0$;
- dopo 3 ore, la lastra è spessa 3 cm: $h(3) = 3$.

Mettiamo a sistema queste due condizioni:

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(3) = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{2k \cdot 0 + c} = 0 \\ \sqrt{2k3 + c} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ \sqrt{6k} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ k = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Con il macchinario scelto, pertanto, viene prodotta una lastra di ghiaccio il cui spessore (in cm) è funzione del tempo (in ore) secondo la legge:

$$h(t) = \sqrt{2 \cdot \frac{3}{2}t + 0} \rightarrow h(t) = \sqrt{3t}.$$

4. Calcoliamo quanto tempo il macchinario deve restare in funzione affinché la lastra di ghiaccio prodotta abbia uno spessore di 7,5 cm:

$$h(t) = 7{,}5 \rightarrow \sqrt{3t} = 7{,}5 \rightarrow 3t = 56{,}25 \rightarrow t = 18{,}75.$$

Il macchinario deve quindi funzionare per circa 18 ore e 45 minuti.

PROBLEMA 2

1. Le quattro funzioni:

$$g_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$g_2(x) = |x| - 1,$$

$$g_3(x) = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

$$g_4(x) = \ln|x|,$$

sono tutte definite su $\mathbb{R}$ e quindi sono definite in un intorno di $x = 1$ e di $x = -1$.
Calcoliamo le derivate prime delle funzioni:

$$g_1'(x) = x,$$

$$g_2'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases},$$

$$g_3'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

$$g_4(x) = \frac{1}{x}.$$

I grafici delle quattro funzioni presentano la stessa retta tangente in $x=1$, poiché in tale punto le funzioni assumono lo stesso valore e le rette tangenti hanno lo stesso coefficiente angolare:

$$g_1(1)=g_2(1)=g_3(1)=g_4(1)=0;$$

$$g_1'(1)=g_2'(1)=g_3'(1)=g_4'(1)=1.$$

L'equazione della retta tangente comune nel punto $x=1$ è:

$$y-0=1\cdot(x-1)\ \rightarrow\ y=x-1.$$

Analogamente, coincidono le rette tangenti ai grafici delle quattro funzioni nel punto $x=-1$:

$$g_1(-1)=g_2(-1)=g_3(-1)=g_4(-1)=0;$$

$$g_1'(-1)=g_2'(-1)=g_3'(-1)=g_4'(-1)=-1.$$

L'equazione della retta tangente comune nel punto $x=-1$ è:

$$y-0=(-1)\cdot(x+1)\ \rightarrow\ y=-x-1.$$

2. Osserviamo che le funzioni $g_i(x)$ sono tutte pari, quindi i loro grafici sono simmetrici rispetto all'asse delle ordinate.

Per disegnare i grafici delle funzioni, osserviamo quanto segue:

- $g_1(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ è una parabola con la concavità verso l'alto e di vertice $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$;
- $g_2(x)=|x|-1$ è ottenuta applicando alla funzione valore assoluto elementare $y=|x|$ una traslazione verso il basso di 1;
- $g_3(x)=-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ è ottenuta applicando alla funzione elementare $y=\cos x$ una contrazione orizzontale di fattore $\frac{\pi}{2}$ e una contrazione verticale di fattore $-\frac{2}{\pi}$, ha periodo $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$;
- $g_4(x)=\ln|x|$ è ottenuta per simmetria rispetto all'asse delle ordinate della funzione elementare $y=\ln x$.

Disegniamo i quattro grafici.

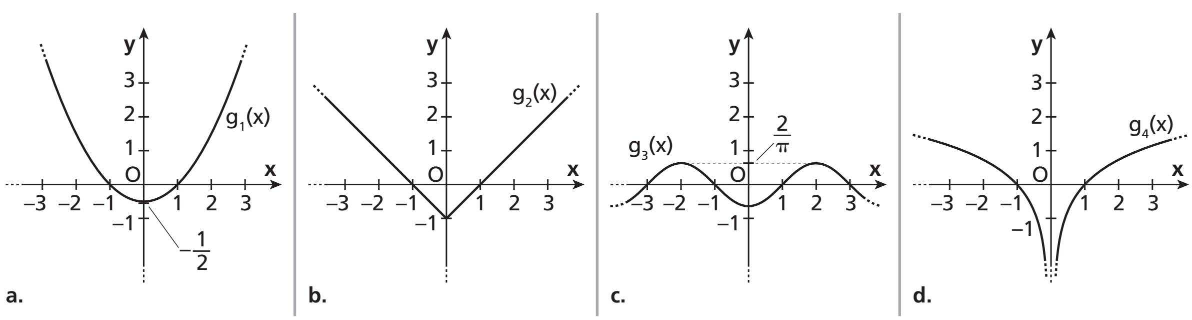

Figura 4

Le tre funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ sono definite a tratti; in particolare i loro grafici corrispondono a quelli di $g_4(x)$ per $x\le -1 \vee x\ge 1$ e, rispettivamente, a quelli di $-g_1(x)$, $-g_2(x)$, $-g_3(x)$ per $-1<x<1$.

Analiticamente abbiamo:

$$f_1(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases},$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ 1 - |x| & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}.$$

Disegniamo i tre grafici.

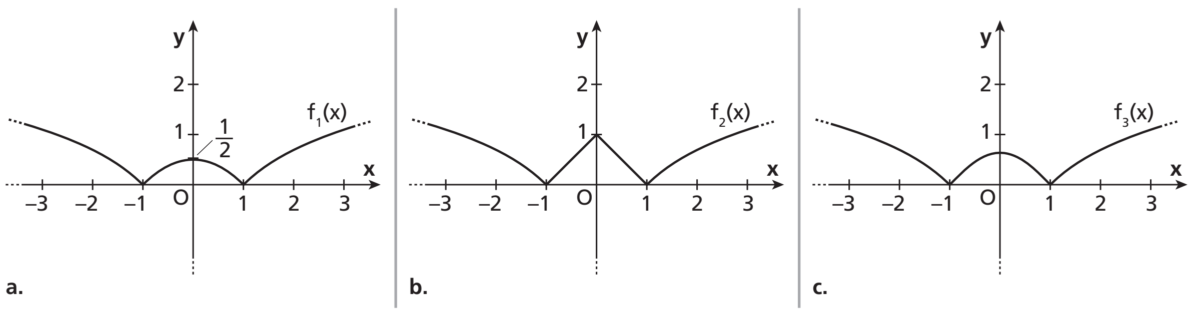

Figura 5

Per tutte e tre le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ i punti $x = 1$ e $x = -1$ sono punti angolosi. Infatti, per quanto ricavato in precedenza, in tali punti le rette tangenti da sinistra e da destra hanno coefficiente angolare rispettivamente -1 e $+1$.
Per $x \neq \pm 1$, le tre funzioni $f_1(x)$ e $f_3(x)$ sono continue e derivabili mentre la funzione $f_2(x)$ ha un altro punto angoloso in $x = 0$ poiché $\lim_{x \to 0^-} f_2'(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0^+} f_2'(x) = -1$.

Verifichiamo se è soddisfatta la catena di disuguaglianze $I_1 < I_3 < I_2$. Osserviamo innanzi tutto che le funzioni $f_i(x)$ sono sempre non negative, coincidono per valori esterni all'intervallo $[-1; 1]$ e sono simmetriche rispetto all'asse y; chiedersi se è vera la catena $I_1 < I_3 < I_2$ equivale quindi a chiedersi se è vera la catena di disuguaglianze:

$$\int_0^1 f_1(x)dx < \int_0^1 f_3(x)dx < \int_0^1 f_2(x)dx.$$

Calcoliamo:

$$\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \simeq 0{,}33;$$

$$\int_0^1 f_2(x)dx = \int_0^1 (1 - x)dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

$$\int_0^1 f_3(x)dx = \int_0^1 \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{4}{\pi^2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \frac{4}{\pi^2} \simeq 0{,}41.$$

È quindi verificato che $I_1 < I_3 < I_2$

3. Consideriamo:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

e la funzione integrale:

$$H(x)=\int_0^x h(t)\,dt.$$

La funzione $h(x)$ è continua in $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ e presenta in $x=0$ una discontinuità a salto, quindi $H(x)$ è continua in $\mathbb{R}$. Otteniamo infatti:

- per $x \leq 0$:

$$H(x)=-\int_x^0 0\,dt=0;$$

- per $0<x\leq 1$:

$$H(x)=\int_0^x h(t)\,dt=\int_0^x\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\right)dt=\left[\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t\right]_0^x=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x,$$

  e in particolare $H(1)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$;

- per $x>1$:

$$H(x)=\int_0^x h(t)\,dt=\int_0^1 h(t)\,dt+\int_1^x h(t)\,dt=-\frac{1}{3}+\int_1^x \ln t\,dt=$$

$$-\frac{1}{3}+[t\ln t-t]_1^x=-\frac{1}{3}+x\ln x-x+1.$$

La funzione $H(x)$ è dunque continua in $[\sqrt{e};e]$ con:

$$H(\sqrt{e})=-\frac{1}{3}+\sqrt{e}\ln\sqrt{e}-\sqrt{e}+1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{e}\simeq-0,16 \rightarrow H(\sqrt{e})<0;$$

$$H(e)=-\frac{1}{3}+e\ln e-e+1=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3} \rightarrow H(e)>0.$$

Per il teorema di esistenza degli zeri, $H(x)$ ammette almeno uno zero in $]\sqrt{e};e[$.

4. Evidenziamo in grigio, nella figura, la regione delimitata dalle rette di equazione $x=-1$, $x=1$ e dai grafici di $g_1(x)$ e $g_2(x)$.

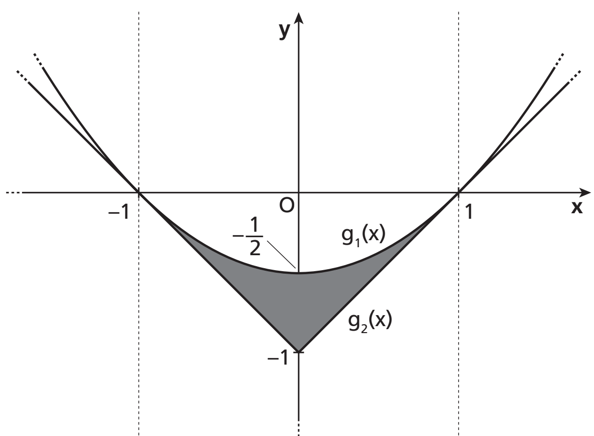

Figura 6

In generale, il volume del solido generato dalla rotazione completa (cioè di 2π radianti) attorno all'asse x di una regione sottesa al grafico di $f(x)$ in un intervallo $[a;b]$ è dato dall'integrale $V=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,dx$.

Poiché la rotazione è di $\frac{\pi}{3}$ radianti, il volume $V_{\frac{\pi}{3}}$ si ottiene dalla proporzione $V_{\frac{\pi}{3}}:V=\frac{\pi}{3}:2\pi$.

Quindi $V_{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} V = \dfrac{1}{6} V = \dfrac{\pi}{6} \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Nel caso in esame, dobbiamo considerare il solido che si ottiene ruotando di $\frac{\pi}{3}$ radianti la funzione $g_2(x)$ svuotato del solido che si ottiene ruotando di $\frac{\pi}{3}$ radianti la funzione $g_1(x)$.

Tenendo infine conto della simmetria rispetto all'asse y, otteniamo per il volume:

$$V_{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} \int_{-1}^{1} [g_2^2(x) - g_1^2(x)] dx = 2 \cdot \frac{\pi}{6} \int_0^1 \left[(x-1)^2 - \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 \right] dx =$$

$$\frac{\pi}{3} \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} \right) dx =$$

$$\frac{\pi}{3} \int_0^1 \left(-\frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^2 - 2x + \frac{3}{4} \right) dx =$$

$$\frac{\pi}{3} \left[-\frac{1}{20} x^5 + \frac{3}{6} x^3 - x^2 + \frac{3}{4} x \right]_0^1 =$$

$$\frac{\pi}{3} \left(-\frac{1}{20} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} \right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\pi}{15}.$$

QUESTIONARIO

1 Calcoliamo la derivata di $f(x) = \ln x$, applicando la definizione di derivata, in un generico punto $x > 0$:

$$D[\ln x] = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h \to 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} =$$

$$\ln \left[\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{1}{h} \cdot x \cdot \frac{1}{x}} \right] = \ln \left[\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{x}{h}} \right]^{\frac{1}{x}}.$$

Per $h \to 0$ è $\frac{x}{h} \to \infty$, quindi possiamo applicare il limite notevole $\lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y = e$ per dedurre $\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{x}{h}} = e$.

Otteniamo allora:

$$D[\ln x] = \ln \left[\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{x}{h}} \right]^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$

2 La funzione:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 2x + 1 & \text{se } x < 2 \\ x^2 + (k-1)x - 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$, perché definita nei due intervalli aperti da funzioni polinomiali.

Imponiamo la continuità in $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) \ \rightarrow \ 4k - 4 + 1 = 4 + 2(k-1) - 1 \ \rightarrow \ 2k = 4 \ \rightarrow \ k = 2.$$

La funzione, continua in $\mathbb{R}$, diventa:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x + 1 & \text{se } x < 2 \\ x^2 + x - 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}.$$

Per la derivabilità, possiamo subito dire che $f(x)$ è derivabile con derivata continua in $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$, e risulta:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 2 & \text{se } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}.$$

Nel punto $x = 2$ si ha:

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} (4x - 2) = 6; \quad \lim_{x \to 2+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x + 1) = 5.$$

I limiti sono diversi, quindi la funzione $f(x)$ non è derivabile, con derivata continua, in $\mathbb{R}$.
Conclusione: non esiste un valore di k per il quale $f(x)$ soddisfa la proprietà richiesta, ossia essere derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata continua.

3 Le sezioni del solido con piani ortogonali all'asse delle ascisse sono costituite da rettangoli aventi base lunga $x^2 + 2$ e altezza lunga $x + 1$, con $0 \leq x \leq 2$, quindi di area:

$$A(x) = (x^2 + 2)(x + 1) = x^3 + x^2 + 2x + 2.$$

Possiamo quindi calcolare il volume del solido mediante il seguente integrale:

$$V = \int_0^2 A(x)dx = \int_0^2 (x^3 + x^2 + 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x\right]_0^2 = 4 + \frac{8}{3} + 4 + 4 = \frac{44}{3}.$$

4 Ogni tiro al bersaglio si svolge nelle stesse condizioni e l'esito di un tiro non influenza gli altri.
Siamo quindi all'interno dello schema delle prove ripetute (o di Bernoulli), con probabilità di successo $p = 0{,}28$ e probabilità di insuccesso $q = 1 - 0{,}28 = 0{,}72$.
La probabilità di colpire il bersaglio 4 volte su 10 tiri è:

$$\binom{10}{4} p^4 q^{10-4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 0{,}28^4 \cdot 0{,}72^6 \simeq 0{,}18 \rightarrow 18\%.$$

La probabilità di colpire il bersaglio esattamente le prime 4 volte e di non colpirlo nei successivi 6 tiri è invece:

$$\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot p}_{4 \text{ volte}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}_{6 \text{ volte}} = p^4 q^6 = 0{,}28^4 \cdot 0{,}72^6 \simeq 0{,}00086 \rightarrow 0{,}086\%.$$

Ai fini della gara o dell'allenamento di Giovanni, possiamo ritenere questo evento quasi impossibile.

5 Consideriamo la funzione:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + kx - 4.$$

Se in un punto del suo grafico la funzione è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante, vuol dire che in quel punto la retta tangente ha coefficiente angolare $+1$, ovvero che la funzione derivata prima assume valore $+1$.
Imponiamo allora che l'equazione $f'(x) = 1$ abbia una sola soluzione.

$$f'(x) = 1 \rightarrow 3x^2 + 4x + k = 1 \rightarrow 3x^2 + 4x + k - 1 = 0.$$

L'equazione ha una sola soluzione se il discriminante è nullo:

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \rightarrow 2^2 - 3 \cdot (k - 1) = 0 \rightarrow 4 - 3k + 3 = 0 \rightarrow 3k = 7 \rightarrow k = \frac{7}{3}.$$

La corrispondente funzione è:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + \frac{7}{3}x - 4, \text{ con } f'(x) = 3x^2 + 4x + \frac{7}{3}.$$

Il numero di tangenti orizzontali al grafico di $f(x)$ è dato dal numero di soluzioni reali dell'equazione:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 4x + \frac{7}{3} = 0 \rightarrow 9x^2 + 12x + 7 = 0.$$

Poiché il discriminante è negativo $\left(\frac{\Delta}{4} = 6^2 - 9 \cdot 7 < 0\right)$, l'equazione non ha soluzioni reali e il grafico di $f(x)$ non presenta tangenti orizzontali.

6 Il piano π di equazione $3x - 4y - 22 = 0$ è tangente alla sfera di centro $C(3; 3; 0)$, quindi la lunghezza del raggio della sfera è dato dalla distanza del punto C dal piano π:

$$r_{\text{sfera}} = d(C; \pi) = \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 3 - 22|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 3 - 22|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{25}{5} = 5.$$

7 Data la funzione:

$$f(x) = \ln x - (\ln x)^2,$$

la generica retta tangente in un punto $(\alpha; f(\alpha))$ del suo grafico, con $\alpha > 1$, è data da:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha).$$

Se tale retta passa per $P(0; 1)$, allora deve essere:

$$1 - f(\alpha) = f'(\alpha)(0 - \alpha) \rightarrow 1 - f(\alpha) = -\alpha \cdot f'(\alpha).$$

Esplicitiamo i termini $f(\alpha)$ e $f'(a)$ e risolviamo l'equazione in α:

$$1 - [\ln\alpha - (\ln\alpha)^2] = -\alpha\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha}\ln\alpha\right) \rightarrow 1 - \ln\alpha + (\ln\alpha)^2 = -1 + 2\ln\alpha \rightarrow$$

$$(\ln\alpha)^2 - 3\ln\alpha + 2 = 0.$$

Poniamo $z = \ln\alpha$ e risolviamo:

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \rightarrow (z - 1)(z - 2) = 0 \rightarrow z = 1 \vee z = 2.$$

Tornando ad α, troviamo:

$$z = 1 \rightarrow \ln\alpha = 1 \rightarrow \alpha = e;$$

$$z = 2 \rightarrow \ln\alpha = 2 \rightarrow \alpha = e^2.$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili, perché maggiori di 1, quindi esistono esattamente due rette tangenti al grafico di $f(x)$, per $x > 1$, che passano per P.
In ultimo, scriviamo le equazioni di queste due rette tangenti:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \rightarrow y - [\ln\alpha - (\ln\alpha)^2] = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha}\ln\alpha\right)(x - \alpha);$$

per $\alpha = e \rightarrow y - (1 - 1^2) = \left(\frac{1}{e} - \frac{2}{e}\right)(x - e) \rightarrow y = -\frac{1}{e}(x - e) \rightarrow y = -\frac{1}{e}x + 1;$

per $\alpha = e^2 \rightarrow y - (2 - 2^2) = \left(\frac{1}{e^2} - \frac{2}{e^2} \cdot 2\right)(x - e^2) \rightarrow y + 2 = -\frac{3}{e^2}(x - e^2) \rightarrow y = -\frac{3}{e^2}x + 1.$

8 I coefficienti di x, y e z nell'equazione $2x - 2y + z = 0$ del piano α individuano il vettore di direzione ortogonale al piano stesso. Quindi, il vettore $(2; -2; 1)$ ortogonale ad α.

L'equazione della retta passante per $P(1;\,1;\,0)$ e ortogonale al piano α, in forma parametrica, è:

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 - 2k \\ z = k \end{cases}.$$

Dalla posizione $z = k$ otteniamo subito anche una possibile coppia di equazioni cartesiane della retta:

$$\begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = 1 - 2z \end{cases}.$$

9 Se p è la probabilità che esca testa in un lancio, la probabilità che esca croce sarà $1 - p$.
Si tratta di un problema di prove ripetute, quindi la probabilità che in 4 lanci esca 2 volte testa e 2 volte croce è data da:

$$\binom{4}{2} p^2 (1 - p)^{4-2}.$$

Imponiamo che tale probabilità sia uguale a $\frac{8}{27}$ e ricaviamo p:

$$\binom{4}{2} p^2 (1 - p)^2 = \frac{8}{27} \rightarrow 6p^2(1 - p) = \frac{8}{27} \rightarrow$$

$$[p(1 - p)]^2 = \frac{8}{162} \rightarrow [p(1 - p)]^2 = \frac{4}{81}.$$

Abbiamo ottenuto un'equazione pura di secondo grado nella variabile $p(1 - p)$. Quindi:

$$p(1 - p) = \pm\frac{2}{9} \rightarrow p - p^2 = \pm\frac{2}{9}, \text{ con } 0 \le p \le 1 \text{ perché } p \text{ è una probabilità.}$$

Cerchiamo ora i valori di p che risolvono le due equazioni di secondo grado in p.
Dalla prima equazione otteniamo:

$$p - p^2 = \frac{2}{9} \rightarrow 9p^2 - 9p + 2 = 0 \rightarrow$$

$$p = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{18} = \frac{9 \pm 3}{18} \rightarrow p_1 = \frac{2}{3} \vee p_2 = \frac{1}{3}.$$

Entrambi i valori sono accettabili perché verificano la condizione $0 \le p \le 1$.

Dalla seconda equazione otteniamo:

$$p - p^2 = -\frac{2}{9} \rightarrow 9p^2 - 9p + 2 = 0 \rightarrow$$

$$p = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 72}}{18} = \frac{9 \pm \sqrt{153}}{18} \rightarrow$$

$$p_1 \simeq -0{,}19 \vee p_2 \simeq 1{,}19.$$

Entrambi i valori non sono accettabili perché $p_1 < 0$ e $p_2 > 1$.
Alternativamente, il procedimento diventa più snello se si utilizza la relazione:

$$0 \le p \le 1 \rightarrow 0 \le p(1 - p) \le 1.$$

Infatti l'equazione $p(1 - p) = -\frac{2}{9}$ non deve essere risolta perché è impossibile e quindi $p(1 - p) = \frac{2}{9}$ è l'unica equazioni da risolvere.

Se non si riconosce l'equazione pura di secondo grado, un altro modo di procedere è il seguente.

$\binom{4}{2}p^2(1-p)^2 = \frac{8}{27} \rightarrow$

$6p^2(1+p^2-2p) = \frac{8}{27} \rightarrow 81p^2(1+p^2-2p) = 4 \rightarrow$

$81p^4 - 162p^3 + 81p^2 - 4 = 0.$

Scomponiamo il polinomio $f(p) = 81p^4 - 162p^3 + 81p^2 - 4$ con la regola di Ruffini.

Gli zeri del polinomio vanno cercati tra le frazioni del tipo $\frac{n}{m}$ con n divisore di 4 e m divisore di 81.

Procedendo per tentativi si trova che $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, quindi $f(p)$ è divisibile per $\left(p - \frac{1}{3}\right)$.

Procediamo con lo schema di Ruffini:

	81	−162	81	0	−4
$\frac{1}{3}$		27	−45	12	4
	81	−135	36	12	0

Otteniamo:

$$f(p) = \left(p - \frac{1}{3}\right)(81p^3 - 135p^2 + 36p + 12) = 3\left(p - \frac{1}{3}\right)(27p^3 - 45p^2 + 12p + 4).$$

Procedendo in maniera analoga a prima, troviamo che $\frac{2}{3}$ è uno zero del polinomio di terzo grado.

	27	−45	12	4
$\frac{2}{3}$		18	−18	−4
	27	−27	−6	0

Il polinomio si scompone ulteriormente nella forma:

$$f(p) = 3\left(p - \frac{1}{3}\right)\left(p - \frac{2}{3}\right)(27p^2 - 27p - 6) = 9\left(p - \frac{1}{3}\right)\left(p - \frac{2}{3}\right)(9p^2 - 9p - 2).$$

Calcoliamo, infine, le radici del polinomio di secondo grado:

$9p^2 - 9p - 2 = 0 \rightarrow$

$p = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 9 \cdot 2}}{18} = \frac{9 \pm \sqrt{153}}{18} \rightarrow$

$p_1 = \frac{9 - \sqrt{153}}{18} < 0 \vee p_2 = \frac{9 + \sqrt{153}}{18} > 1.$

Poiché rappresenta una probabilità, p deve essere compreso fra 0 e 1, estremi inclusi.

Quindi i valori di p compresi fra 0 e 1 che annullano $f(p)$ sono due: $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

Concludiamo che nel caso in esame della moneta truccata, in cui l'evento «in 4 lanci esce 2 volte testa» si realizza con probabilità $\frac{8}{27}$, la probabilità che esca testa in un lancio è $\frac{1}{3}$ o $\frac{2}{3}$.

10 In generale, la funzione integrale $H(x)=\int_a^x h(t)dt$ è definita per una funzione $h(t)$ continua in $[a; b]$.

Nel caso in esame si chiede di considerare la funzione integrale:

$$F(x)=\int_0^{e^{2x}} \ln t\, dt,$$

ma la funzione integranda $f(t)=\ln t$ non è definita in $t=0$.
La funzione integrale assegnata va quindi intesa in senso generalizzato (o improprio):

$$F(x)=\lim_{k\to 0^+}\int_k^{e^{2x}} \ln t\, dt=\lim_{k\to 0^+}[t\ln t-t]_k^{e^{2x}}=\lim_{k\to 0^+}[(2xe^{2x}-e^{2x})-(k\ln k-k)]=(2x-1)e^{2x},$$

dove in particolare vale il limite $\lim\limits_{k\to 0^+}(k\ln k)=0$ per la gerarchia degli infiniti e degli infinitesimi.

La funzione integrale è derivabile, con derivata:

$$F'(x)=2e^{2x}+(2x-1)e^{2x}\cdot 2=4xe^{2x}.$$

I punti stazionari di $F'(x)$ sono individuati dai punti in cui la sua derivata prima si annulla, ovvero dai punti per i quali $F''(x)=0$.
Svolgiamo i calcoli:

$$F''(x)=0 \ \to\ 4e^{2x}+8xe^{2x}=0 \ \to\ (4+8x)e^{2x}=0 \ \to\ 4+8x=0 \ \to\ x=-\frac{1}{2}.$$

L'unico punto stazionario di $F'(x)$ ha ascissa $x=-\frac{1}{2}$.