PROVA D’ESAME • SESSIONE SUPPLETIVA 2018

Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l’uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (D.M. n. 350 Art. 18 comma 8).

PROBLEMA 1

Un artigiano deve realizzare una cornice in cui inscrivere uno specchio di forma circolare. A partire da una tavola quadrata di lato 3π decimetri (approssimato alla seconda cifra decimale), adoperando una macchina a controllo numerico (*CNC*), incide su ciascun lato una decorazione che rappresenta una porzione di curva goniometrica come si vede in figura 1.

La macchina traccia sul lato giacente sull’asse delle ascisse la curva descritta dalla funzione $y = k\left|\sin(x)\right|$ con $x \in [0; 3\pi]$ e k parametro reale positivo. La cornice viene ruotata per realizzare la decorazione su ciascun lato. (La precisione della macchina è di $10^{-4}\,\mathrm{m}$, quindi al di sopra della precisione richiesta della misure della cornice).

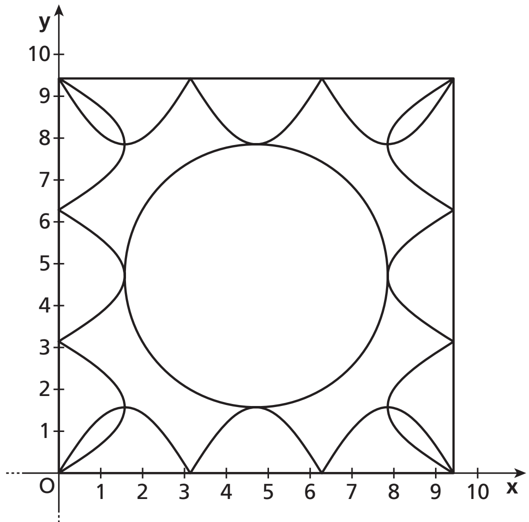


Figura 1

1. Per ottenere la decorazione, occorre che le curve su due lati consecutivi si intersechino nel loro punto di massimo più vicino al vertice della cornice. Verifica che tale richiesta è soddisfatta per $k = \frac{\pi}{2}$. La decorazione presenta delle «*foglie*» (colorate in grigio in figura 2) in corrispondenza dei quattro vertici. L’artigiano vuole rivestire queste quattro regioni con una polvere ceramica. Determina l’area, espressa in dm^2, della superficie da ricoprire.

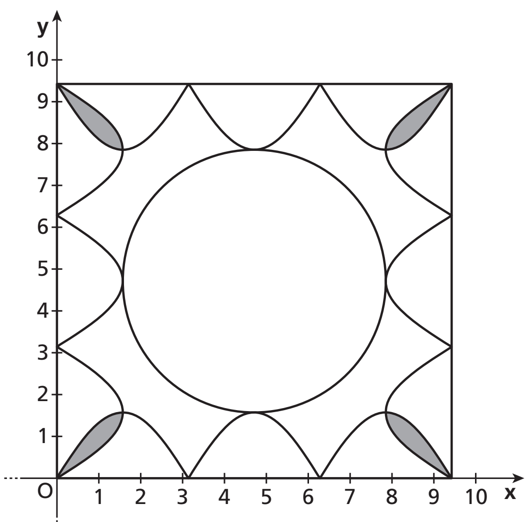
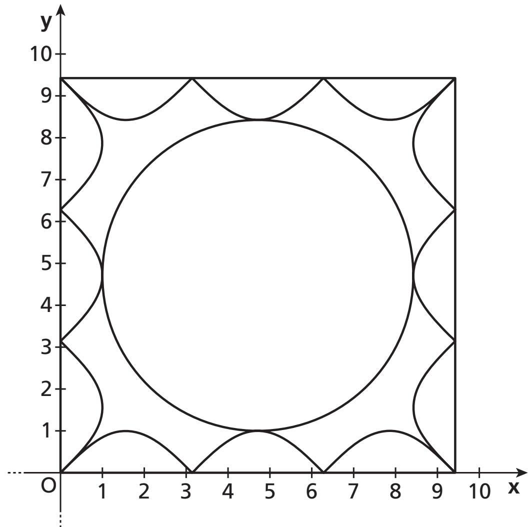


Figura 2



Volendo offrire ai clienti la possibilità di inserire nella cornice uno specchio di dimensioni maggiori, l'artigiano ne realizza un'altra con il lato delle stesse misure della precedente, ma con le quattro curve goniometriche che hanno in comune solo i vertici della cornice, così come in figura 3.

Figura 3

2. Verifica che per ottenere una decorazione di questo tipo occorre impostare nella macchina *CNC* un valore di k compreso tra 0 e 1 e che per $k = 1$ due decorazioni consecutive sono tangenti nel vertice della cornice. Determina inoltre, in funzione di $k \in [0; 1]$, l'area della parte di cornice compresa tra i lati e le quattro curve goniometriche, esprimendola in dm^2.
3. L'artigiano ha ovviamente l'esigenza di offrire la cornice a clienti che hanno specchi circolari di dimensioni diverse. Determina in funzione del parametro k l'area dello specchio tangente alle quattro curve goniometriche e stabilisci quindi l'area minima e massima possibile dello specchio.

Un cliente, per cui è stata realizzata una cornice con $k = 1$, chiede che la regione compresa tra lo specchio e le quattro curve venga dipinta con una vernice di cui l'artigiano possiede un flacone da 125 ml.

4. Dal momento che con 1 litro di vernice è possibile coprire 6 m^2 di superficie, la quantità a disposizione è sufficiente per passare due mani di vernice? Per quale valore di k la quantità di vernice richiesta è massima?

PROBLEMA 2

Fissato un numero reale $k > 0$, si definiscono le funzioni:

$$f_k(x) = k \cdot \ln(x) \text{ e } g_k(x) = e^{\frac{x}{k}},$$

i cui grafici sono indicati, rispettivamente, con F_k e G_k.

1. Verifica che, qualunque sia $k > 0$, le due funzioni f_k e g_k sono tra loro inverse; definite inoltre le funzioni:

   $$a(x) = f_k(g_k(x)) \text{ e } b(x) = g_k(f_k(x)),$$

   stabilisci se si verifica $a(x) = b(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Indicata con r la retta di equazione $y = x$, determina l'equazione della retta s_2, parallela a r e tangente al grafico F_2 della funzione $f_2(x) = 2\ln(x)$. Determina inoltre l'equazione della retta t_2, parallela a r e tangente al grafico G_2 della funzione $g_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$.
   Rappresenta i grafici F_2 e G_2 insieme alle rette s_2 e t_2 e stabilisci qual è la distanza minima tra un punto di F_2 e un punto di G_2.
3. Verifica che l'equazione $f_3(x) = g_3(x)$ possiede due soluzioni sapendo che, qualunque sia $k > 0$, gli eventuali punti d'intersezione tra il grafico F_k e il grafico G_k coincidono con i punti di intersezione tra uno qualsiasi di tali grafici e la retta di equazione $y = x$. Stabilisci inoltre per quali valori $k > 0$ i grafici F_k e G_k sono secanti, per quali valori sono disgiunti e per quale valore essi sono tangenti.
4. Sia A la regione limitata compresa tra i grafici F_e e G_e e gli assi cartesiani.
   Determina l'area di A ed il volume del solido generato ruotando A attorno a uno degli assi cartesiani.

QUESTIONARIO

1 Considerati nel piano cartesiano i punti $A(0;0)$ e $B(\pi;0)$, sia R la regione piana delimitata dal segmento AB e dall'arco di curva avente equazione $y = 4\sin x$, con $0 \le x \le \pi$. Calcolare il massimo perimetro che può avere un rettangolo inscritto in R avente un lato contenuto nel segmento AB.

2 Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ nell'intervallo $[p; 2p]$ e, detto Γ il suo grafico, sia t la retta tangente a Γ nel suo punto di ascissa p. Determinare, al variare di p, le aree delle due parti in cui la retta t divide la regione finita di piano compresa fra Γ e l'asse delle ascisse.

3 Determinare l'equazione della superficie sferica di centro $C(1;-1;2)$ tangente al piano di equazione $x - y + z = 10$ e le coordinate del punto di contatto tra la superficie sferica e il piano.

4 Verificare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)dx$ per $n > 1$ e usare questo risultato per calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)dx$.

5 Si lancia n volte un dado regolare a sei facce. Qual è il più piccolo valore di n tale che la probabilità che non esca mai il numero 3 sia minore dello 0,01%?

6 Data la funzione $y = x\left|ax^2 + b\right| - 3$, determinare il valore dei coefficienti a e b per i quali il grafico della funzione è tangente nel punto di ascissa $x = 1$ alla retta di equazione $y = 7x - 9$.

7 Date le curve γ_1 e γ_2 di equazioni rispettivamente $y = x^2 + 1$ e $y = x^2 - 8x + 9$, sia t la retta che è tangente a entrambe. Stabilire l'area della regione piana di area finita che è delimitata da γ_1, γ_2 e t.

8 Una variabile casuale, a valori nell'intervallo $[0;10]$, è distribuita secondo la densità di probabilità data dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x^2, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{12}, & 1 < x \le 10 \end{cases}$$

Stabilire il valore medio e il valore mediano di questa variabile casuale.

9 Determinare il luogo geometrico dei punti $P(x;y;z)$ equidistanti dai punti $A(0;1;2)$ e $B(-3;2;0)$.

10 Verificare che la funzione $y = e^{-x}\sin x$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 0$.

PROBLEMA 1

1. Prima di tutto osserviamo che le curve della decorazione che si sviluppano lungo i lati della tavola possono essere ottenute mediante simmetrie assiali a partire dalla curva «base» descritta dalla funzione $y = k|\sin x|$ in $[0; 3\pi]$.

   In particolare:

   - la curva che si sviluppa lungo l'asse y è simmetrica della curva base $y = k|\sin x|$ rispetto alla bisettrice del primo quadrante di equazione $y = x$;
   - la curva che si sviluppa lungo il lato destro della tavola, che giace sulla retta di equazione $x = 3\pi$, è simmetrica della curva base $y = k|\sin x|$ rispetto alla retta di equazione $y = 3\pi - x$;
   - la curva che si sviluppa lungo il lato superiore della tavola, che giace sulla retta di equazione $y = 3\pi$, è simmetrica della curva base $y = k|\sin x|$ rispetto alla retta di equazione $y = \frac{3\pi}{2}$.

   Possiamo quindi ragionare su un solo «angolo» della tavola quadrata per ricavare le informazioni richieste su k e sulle aree delle «foglie».

   Riportiamo dunque nella figura seguente il dettaglio in basso a sinistra della tavola, cioè il dettaglio dell'angolo coincidente con l'origine degli assi.

   Sugli assi riportiamo le ascisse e le ordinate dei punti in cui le curve hanno minima distanza (cioè distanza nulla) o massima distanza dall'asse stesso. Poiché la funzione $y = k|\sin x|$ è originata per simmetria e dilatazione dalla sinusoide $y = \sin x$, tali quote risultano bene espresse in funzione di π.

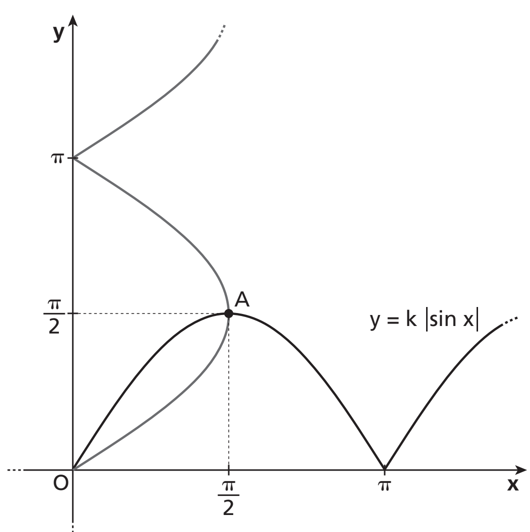


Figura 4

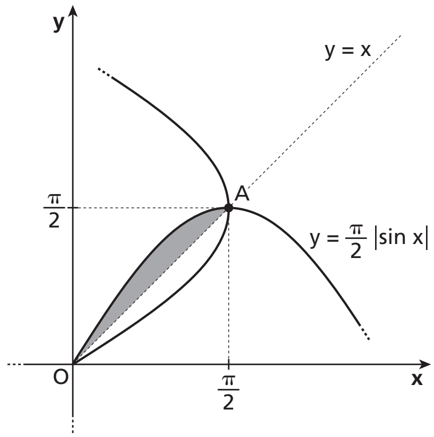
   La funzione $y = k|\sin x|$ è periodica di periodo π e, nell'intervallo $[0; \pi]$, assume il valore massimo k (che è positivo) per $x = \frac{\pi}{2}$.

   Per la simmetria della costruzione, l'ascissa e l'ordinata di A sono uguali e quindi deve essere $k = \frac{\pi}{2}$.

   L'espressione analitica della curva che si sviluppa lungo l'asse x è dunque:

   $$y = \frac{\pi}{2}|\sin x|.$$

Le quattro «foglie» che si creano nella decorazione ai quattro angoli della tavola sono congruenti e, ciascuna, simmetrica rispetto all'asse che collega i due estremi, come mostrato nella seguente figura.



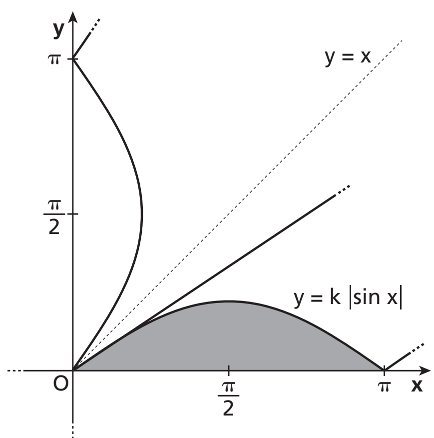
■ **Figura 5**

Per determinare l'area della superficie complessiva delle quattro foglie, calcoliamo l'area di mezza foglia e moltiplichiamo il risultato per otto. Considerato che nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ la funzione $\sin x$ è non negativa, otteniamo:

$$A_{4\text{ foglie}} = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\sin x - x\right)dx = 8\left[-\frac{\pi}{2}\cos x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\right] = 4\pi - \pi^2.$$

Approssimando π alla seconda cifra decimale, ovvero usando 3,14 come valore di π, l'area delle quattro foglie risulta di 2,70 dm^2.

2. Consideriamo ora la generica curva di equazione $y = k|\sin x|$, che si sviluppa lungo l'asse x in $[0; 3\pi]$, e la simmetrica rispetto alla retta di equazione $y = x$, che si sviluppa lungo l'asse y.



■ **Figura 6**

Affinché la decorazione non generi alcuna «foglia» nei vertici, come mostrato nella figura qui sopra, occorre che la semiretta tangente a $y = k\sin x$ nell'origine (eliminiamo il valore assoluto perché ragioniamo in $[0; \pi]$) abbia coefficiente angolare positivo e inferiore o uguale a 1, cioè inferiore o uguale al coefficiente angolare della retta $y = x$.
Deriviamo la funzione:

$$y' = k\cos x \quad \rightarrow \quad y'(0) = k.$$

Quindi non si generano le «foglie» nella decorazione se $0 \leq k \leq 1$.

Per $k = 0$ non si ha alcuna decorazione, poiché la curva corrispondente sarebbe il segmento di estremi $(0; 0)$ e $(3\pi; 0)$ che coincide con il lato della tavola.

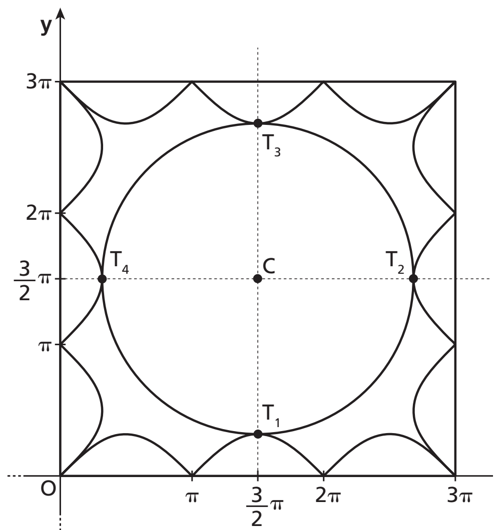
Per $k = 1$ la semiretta tangente alla curva $y = k \sin x = \sin x$ coincide con l'asse di simmetria $y = x$, quindi le due curve della decorazione, quella che si sviluppa lungo l'asse x e la simmetrica lungo l'asse y, risultano tangenti nel vertice della cornice.

La parte di cornice compresa tra i quattro lati della tavola e le quattro curve goniometriche è equivalente a 12 «spicchi» uguali a quello evidenziato in grigio nella figura precedente. L'area richiesta, espressa in decimetri quadrati, è quindi data da:

$$A_{12\text{ spicchi}} = 12 \cdot \int_0^{\pi} k \sin x \, dx = 12k[-\cos x]_0^{\pi} = 12k(1+1) = 24k$$

ed è quindi compresa fra 0 dm², per $k = 0$, e 24 dm², per $k = 1$.

3. Rappresentiamo la situazione in figura.



■ **Figura 7**

Sempre nell'ipotesi $0 \leq k \leq 1$, il raggio dello specchio in funzione di k è dato da:

$$r(k) = \overline{T_1C} = y_C - y_{T_1} = \frac{3}{2}\pi - k \cdot \left| \sin \frac{3}{2}\pi \right| = \frac{3}{2}\pi - k.$$

Per $k = 0$ si ha lo specchio di raggio massimo: $r_0 = \frac{3}{2}\pi \simeq 4{,}71 \text{ dm}$;

Per $k = 1$ si ha lo specchio di raggio minimo: $r_1 = \frac{3}{2}\pi - 1 \simeq 3{,}71 \text{ dm}$.

L'area dello specchio circolare è, in generale:

$$A_{\text{specchio}} = \pi r^2 = \pi\left(\frac{3}{2}\pi - k\right)^2.$$

Per $k = 0$ si ha lo specchio di area massima: $A_{\text{specchio},0} = \pi\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 \simeq 69{,}66 \text{ dm}^2$;

Per $k = 1$ si ha lo specchio di area minima: $A_{\text{specchio},1} = \pi\left(\frac{3}{2}\pi - 1\right)^2 \simeq 43{,}22 \text{ dm}^2$.

Osserviamo che per $k = 0$ la decorazione di fatto non esiste e lo specchio risulta essere il cerchio inscritto nel quadrato di lato 3π.

4. L'area della regione da tinteggiare, compresa tra lo specchio e le quattro curve, è data dall'area del quadrato di lato 3π da cui va sottratta l'area dei «12 spicchi» calcolata in precedenza e l'area dello specchio circolare. Nel caso generale è:

$$A_{\text{regione}} = A_{\text{quadrato}} - A_{\text{12 spicchi}} - A_{\text{specchio}} = (3\pi)^2 - 24k - \pi\left(\frac{3}{2}\pi - k\right)^2.$$

Se $k = 1$, l'area della regione da dipingere è:

$$A_{\text{regione},1} = (3\pi)^2 - 24 - A_{\text{specchio},1} \simeq 21{,}52 \text{ dm}^2.$$

Poiché le mani di vernice da dare sono due, consideriamo il doppio di quest'area: 43,04 dm^2.
Con la vernice a disposizione (0,125 litri; 6 m^2 = 600 dm^2 di copertura per litro) si possono coprire:

$$0{,}125 \cdot 600 = 75 \text{ dm}^2,$$

quindi la vernice è sufficiente per tinteggiare il supporto dello specchio nel caso $k = 1$.

Sviluppando i calcoli nell'espressione che fornisce l'area della regione da dipingere nel caso generale, otteniamo un polinomio di secondo grado in k:

$$A_{regione} = -\pi k^2 + (3\pi^2 - 24)k - \frac{9}{4}\pi^3 + 9\pi^2.$$

Tale funzione rappresenta una parabola con la concavità verso il basso e assume il massimo in corrispondenza del vertice; l'ascissa del vertice è:

$$k_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{3\pi^2 - 24}{2 \cdot (-\pi)} = \frac{3\pi^2 - 24}{2\pi} \simeq 0{,}89.$$

Concludendo, l'area massima da dipingere si ottiene per k approssimativamente uguale a 0,89.

PROBLEMA 2

1. La funzione $f_k(x) = k\ln x$, con $k > 0$, è definita per $x > 0$ e ha per insieme immagine l'insieme dei reali.

La funzione $g_k(x) = e^{\frac{x}{k}}$ è definita per tutti gli x reali e ha per insieme immagine l'insieme $]0; +\infty[$.
Dire che le due funzioni sono inverse equivale ad asserire che la loro composizione dà la funzione identità; verifichiamo se ciò accade.

- La funzione composta $a(x) = (f_k \circ g_k)(x)$ esiste poiché l'immagine di $g_k(x)$ è contenuta nel dominio di $f_k(x)$ e risulta:

  $$a(x) = f_k(g_k(x)) = f_k\left(e^{\frac{x}{k}}\right) = k\ln e^{\frac{x}{k}} = k \cdot \frac{x}{k}\ln e = x, \text{ con } x \in \mathbb{R}.$$

  Quindi $a(x)$ è la funzione identica su $\mathbb{R}$.
- La funzione composta $b(x) = (g_k \circ f_k)(x)$ esiste poiché l'immagine di $f_k(x)$ è contenuta nel dominio di $g_k(x)$ e risulta:

  $$b(x) = g_k(f_k(x)) = g_k(k\ln x) = e^{\frac{k\ln x}{k}} = e^{\ln x} = x, \text{ con } x > 0.$$

  Quindi $b(x)$ è la funzione identica definita per $x > 0$.

L'uguaglianza $a(x) = b(x)$ non è verificata per ogni x reale, perché non è definita per $x \leq 0$:

$$a(x) = b(x) \text{ solo per } x > 0.$$

2. Considerata la funzione $f_2(x) = 2\ln x$, determiniamo la retta s_2 tangente al suo grafico F_2 e parallela alla retta di equazione $y = x$.

La retta s_2 ha dunque coefficiente angolare uguale a 1 e da $f_2'(x) = \frac{2}{x}$ ricaviamo:

$$f_2'(x) = 1 \rightarrow \frac{2}{x} = 1 \rightarrow x = 2.$$

La retta s_2 tangente a F_2 nel suo punto di ascissa $x = 2$ ha dunque equazione:

$$y = f_2'(2) \cdot (x-2) + f_2(2) \;\rightarrow\; y = (x-2) + 2\ln 2 \;\rightarrow\; y = x + 2\ln 2 - 2.$$

In modo analogo, data la funzione $g_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$, anche la retta t_2 tangente al suo grafico G_2 e parallela alla retta di equazione $y = x$ ha coefficiente angolare uguale a 1 e da $g_2'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ ricaviamo:

$$g_2'(x) = 1 \;\rightarrow\; \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = 1 \;\rightarrow\; e^{\frac{x}{2}} = 2 \;\rightarrow\; \ln e^{\frac{x}{2}} = \ln 2 \;\rightarrow\; \frac{x}{2} = \ln 2 \;\rightarrow\; x = 2\ln 2.$$

La retta t_2 tangente a G_2 nel suo punto di ascissa $x = 2\ln 2$ ha dunque equazione:

$$y = g_2'(2\ln 2)(x - 2\ln 2) + g_2(2\ln 2) \;\rightarrow\; y = (x - 2\ln 2) + 2 \;\rightarrow\; y = x + 2 - 2\ln 2.$$

Alternativamente, poiché g_2 è l'inversa di f_2 e i grafici corrispondenti sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$, avremmo potuto ricavare l'equazione di t_2 da quelle di s_2 scambiando x e y.

Rappresentiamo i grafici F_2 e G_2 e le rette tangenti s_2 e t_2.

Anziché studiare le funzioni per tracciare i grafici, osserviamo che:

- F_2 si ottiene dal grafico di $y = \ln x$ mediante dilatazione verticale di fattore 2;
- G_2 si ottiene dal grafico di $y = e^x$ mediante dilatazione orizzontale di fattore 2.

Inoltre le coordinate approssimate dei punti di tangenza $(2; 2\ln 2)$ e $(2\ln 2; 2)$ (per un'idea immediata di dove collocare tali punti) valgono:

$$(2; 1{,}4) \text{ e } (1{,}4; 2)$$

Disegniamo dunque i grafici richiesti.

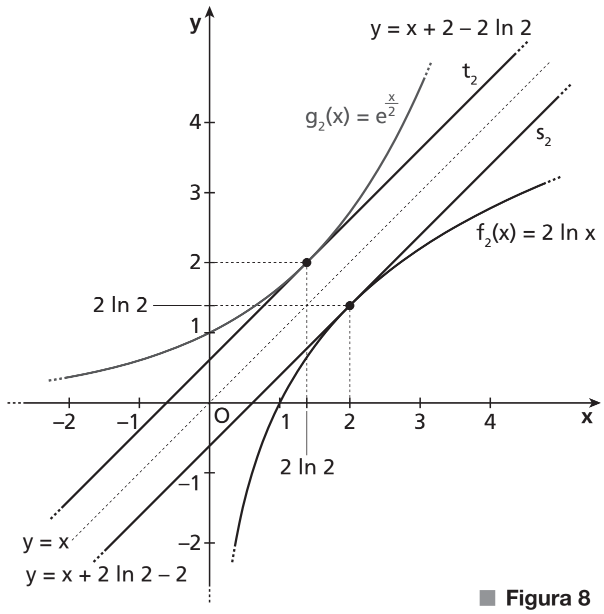


Figura 8

Osservando i grafici, deduciamo che la distanza minima tra un punto di F_2 e un punto G_2 è pari alla distanza fra i due punti di tangenza $(2; 2\ln 2)$ e $(2\ln 2; 2)$.

Quindi: $d_{\text{minima}} = \sqrt{(2\ln - 2)^2 + (2 - 2\ln 2)^2} = \sqrt{2(2\ln 2 - 2)^2} = \sqrt{2}(2\ln 2 - 2)$.

3. L'informazione nota che, per qualunque $k > 0$, gli eventuali punti di intersezione fra i grafici F_k e G_k coincidono con i punti di intersezione tra uno qualsiasi di tali grafici e la retta di equazione $y = x$, equivale a dire che in tali punti di intersezione il valore assunto dalle funzioni $f_k(x)$ e $g_k(x)$ coincide con l'ascissa del punto stesso. Anziché considerare l'equazione $f_3(x) = g_3(x)$, quindi, possiamo considerare il sistema:

$$\begin{cases} f_3(x) = x \\ g_3(x) = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\ln x = x \\ e^{\frac{x}{3}} = x \end{cases}.$$

Osserviamo che se α è una soluzione di un'equazione del sistema, per esempio della prima equazione, cioè $3\ln\alpha = \alpha$, allora α anche soluzione della seconda equazione, infatti:

$$3\ln\alpha = \alpha \;\rightarrow\; \ln\alpha = \frac{\alpha}{3} \;\rightarrow\; e^{\ln a} = e^{\frac{\alpha}{3}} \;\rightarrow\; \alpha = e^{\frac{\alpha}{3}}.$$

Non rimane che verificare che tale sistema ammette due soluzioni, ovvero che la prima (o la seconda) equazione ammette due soluzioni.
Consideriamo dunque l'equazione $3\ln x = x$ e verifichiamo che ha due soluzioni, interpretando l'equazione come l'intersezione dei grafici di $f_3(x)$ e di $i(x) = x$.

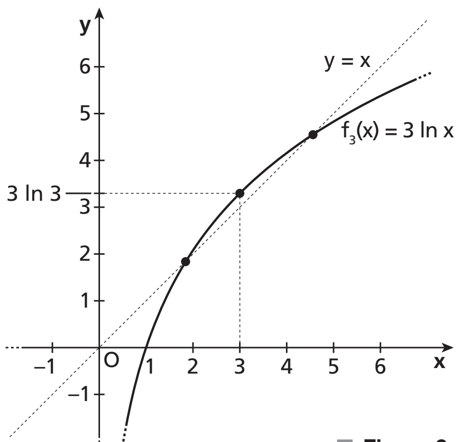


Figura 9

- La funzione $y = 3\ln x$ è una funzione crescente, definita per $x > 0$, con la concavità rivolta sempre verso il basso.
- Per $x \to 0$ è $3\ln x < x$ (perché $3\ln x \to -\infty$) e $x \to 0$) e anche per $x \to +\infty$ è $3\ln x < x$ (per gli ordini di infinito).
- Determiniamo il punto in cui F_3 ha retta tangente parallela a $y = x$:

$$f_3'(x) = 1 \to \frac{3}{x} = 1 \to x = 3.$$

Per $x = 3$ è $f_3(3) = 3\ln 3 > 3 = i(3)$.

La situazione è rappresentata in figura.
Poiché le funzioni $y = 3\ln x$ e $y = x$ sono continue, l'equazione $3\ln x = x$ deve ammettere due soluzioni (come conseguenza del teorema di esistenza degli zeri) e, per i ragionamenti fatti, possiamo infine affermare che l'equazione $f_3(x) = g_3(x)$ ha due soluzioni.

Più in generale possiamo affermare:

- se il grafico F_k interseca la retta r di equazione $y = x$, allora il grafico G_k, che è simmetrico di F_k rispetto a r, interseca la retta negli stessi punti e i due grafici F_k e G_k sono secanti;
- se il grafico F_k è tangente alla retta r, allora anche il grafico G_k è tangente a r e i due grafici F_k e G_k risultano fra di loro tangenti;
- se il grafico F_k non interseca la retta r, allora nemmeno il grafico G_k la interseca e i due grafici F_k e G_k risultano disgiunti.

Rappresentiamo le tre situazioni in figura.

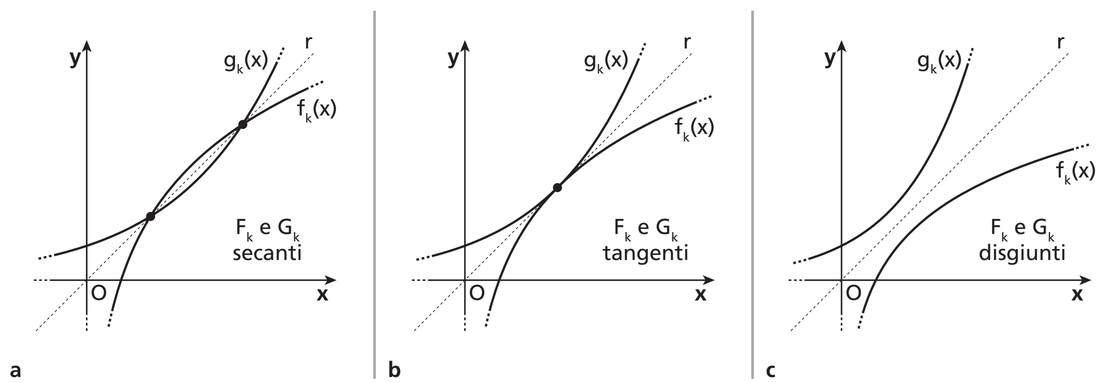


Figura 10

Per quanto visto fin qui sappiamo che i due grafici F_2 e G_2 $(k = 2)$ sono disgiunti, mentre i due grafici F_3 e G_3 $(k = 3)$ sono secanti.
Determiniamo il valore di k per i quale i due grafici F_k e G_k sono tangenti (sarà $2 < k < 3$).
Se F_k e G_k sono tangenti, allora F_k è tangente alle retta r di equazione $y = x$, ovvero il punto T di F_k nel quale la tangente è parallela a r ha l'ascissa e l'ordinata uguali.
Cerchiamo il punto di F_k nel quale la tangente è parallela a r, cioè ha coefficiente angolare 1:

$$f_k'(x) = 1 \to \frac{k}{x} = 1 \to x = k.$$

Imponiamo che, per $x = k$, anche l'ordinata di $f_k(x)$ sia uguale a k:

$$f_k(x) = k \rightarrow k \ln k = k \rightarrow \ln k = 1 \rightarrow k = e.$$

Quindi, i due grafici F_k e G_k sono tangenti per $k = e$ nel punto $(e; e)$.
Possiamo concludere:

- se $0 < k < e$, i due grafici F_k e G_k sono disgiunti;
- se $k = e$, i due grafici F_k e G_k sono tangenti;
- se $k > e$, i due grafici F_k e G_k sono secanti.

4. Rappresentiamo in figura la situazione.

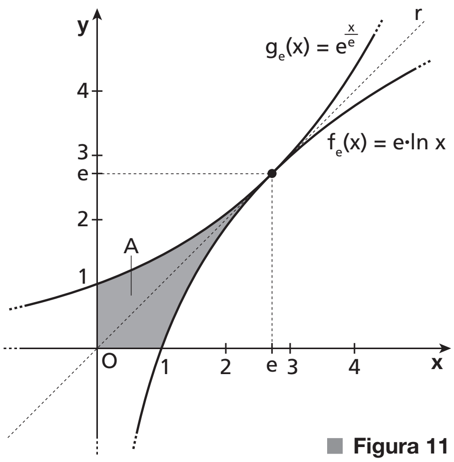


Figura 11

La regione A limitata compresa fra i grafici F_e e G_e e gli assi cartesiani è simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, quindi possiamo calcolare la sua area raddoppiando quella della regione compresa fra il grafico G_e e la bisettrice r nell'intervallo $[0; e]$:

$$\text{area}(A) = 2\int_0^e \left(e^{\frac{x}{e}} - x\right)dx = 2\left[e \cdot e^{\frac{x}{e}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^e =$$

$$2\left(e^2 - \frac{e^2}{2} - e\right) = 2\left(\frac{e^2}{2} - e\right) = e^2 - 2e \simeq 1{,}95.$$

La regione A è simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, quindi i solidi che si generano ruotando A attorno all'asse x oppure attorno all'asse y sono congruenti e pertanto equivalenti.

Ruotiamo dunque la regione A attorno all'asse x. Il volume V del solido così generato può essere calcolato come differenza fra il volume del solido generato dalla rotazione di G_e (per $0 \le x \le e$) attorno all'asse x e il volume del solido generato dalla rotazione di F_e (per $1 \le x \le e$) sempre attorno all'asse x:

$$V = \pi\int_0^e \left(e^{\frac{x}{e}}\right)^2 dx - \pi\int_1^e (e\ln x)^2 dx = \pi\int_0^e e^{\frac{2x}{e}} dx - \pi\int_1^e e^2 \ln^2 x\, dx = \pi\int_0^e e^{\frac{2x}{e}} dx - \pi e^2 \int \ln^2 x\, dx.$$

Risolviamo per comodità separatamente gli integrali corrispondenti:

- $\int e^{\frac{2x}{e}} dx = \frac{e}{2}\int \frac{2}{e} e^{\frac{2x}{e}} dx = \frac{e}{2} \cdot e^{\frac{2x}{e}} + c,$

  quindi:

  $$\int_0^e e^{\frac{2x}{e}} dx = \left[\frac{e}{2} \cdot e^{\frac{2x}{e}}\right]_0^e = \frac{e}{2} \cdot e^2 - \frac{e}{2} = \frac{e}{2}(e^2 - 1);$$

- $\int \ln^2 x\, dx = \int \ln x \cdot \ln x\, dx = \int \ln x \cdot \mathrm{D}(x\ln x - x)dx =$

  $$\ln x \cdot (x\ln x - x) - \int \frac{1}{x}(x\ln x - x)dx = x\ln^2 x - x\ln x - \int(\ln x - 1)dx =$$

  $$x\ln^2 x - x\ln x - (x\ln x - x - x) + c = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c,$$

  quindi:

  $$\int_1^e \ln^2 x\, dx = [x\ln^2 x - 2\ln x + 2x]_1^e = e - 2.$$

Sostituiamo i valori trovati nell'espressione del volume:

$$V = \pi\frac{e}{2}(e^2 - 1) - \pi e^2(e - 2) = -\frac{1}{2}\pi e^3 + 2\pi e^2 - \frac{1}{2}\pi e \simeq 10{,}61.$$

QUESTIONARIO

1 Rappresentiamo in figura la regione R sottesa al grafico di $y = 4\sin x$ nell'intervallo $[0; \pi]$ (la funzione $y = 4\sin x$ è ottenuta da $y = \sin x$ mediante dilatazione verticale di fattore 4) e un generico rettangolo *CDEF* inscritto in R, con la base *CF* giacente sull'asse x.

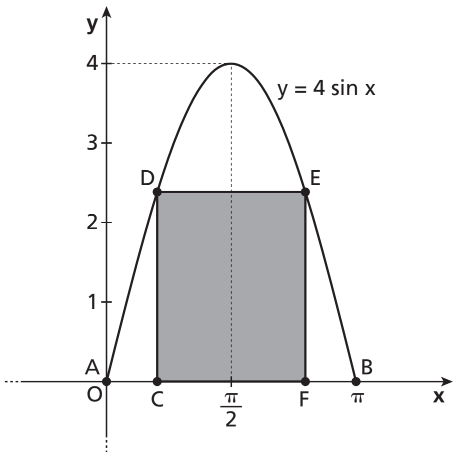


Figura 12

Indicato con $C(x; 0)$ le generiche coordinate di C, le coordinate degli altri vertici del rettangolo sono:

$$D(x; 4\sin x), \quad E(\pi - x; 4\sin x), \quad F(\pi - x; 0).$$

Il perimetro del rettangolo *CDEF*, in funzione dell'ascissa x di C, è dato da:

$$2p = 2\overline{CF} + 2\overline{CD} = 2(x_F - x_C) + 2(y_D - y_C) = 2(\pi - 2x) + 2(4\sin x) = 2(\pi - 2x + 4\sin x).$$

Individuiamo per quale valore di x il perimetro è massimo, cercando il punto di massimo della funzione $y = \pi - 2x + 4\sin x$:

$$y' = -2 + 4\cos x;$$

$$y' = 0 \rightarrow -2 + 4\cos x = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3},$$

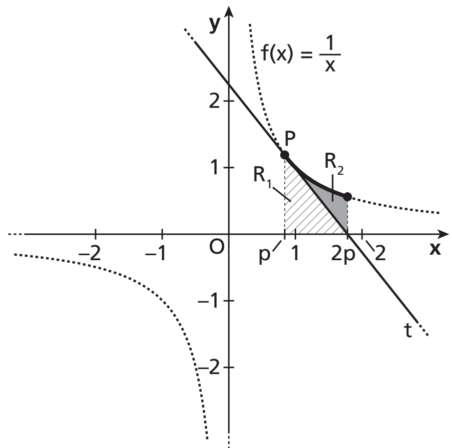
considerata la limitazione $0 \leq x \leq \pi$.
Risulta inoltre:

- $y' > 0$, e quindi y crescente, per $0 < x < \frac{\pi}{3}$;
- $y' < 0$, e quindi y crescente, per $\frac{\pi}{3} < x < \pi$

Quindi $x = \frac{\pi}{3}$ è un punto di massimo per la funzione y, di conseguenza il rettangolo *CDEF* ha perimetro massimo quando C ha coordinate $C\left(\frac{\pi}{3}; 0\right)$ e in questo caso il perimetro vale:

$$2p = 2\left(\pi - 2\frac{\pi}{3} + 4\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{\pi}{3} + 4\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi + 4\sqrt{3} \simeq 9{,}02.$$

2 Disegniamo il grafico di $f(x) = \frac{1}{x}$, definita per $x \neq 0$ e dispari. Mettiamo in evidenza l'intervallo $[p; 2p]$ con p generico diverso da zero, e disegniamo la retta t tangente a Γ nel punto di ascissa p.



■ **Figura 13**

Nel disegno abbiamo preso $p > 0$, ma, essendo *f* dispari, la trattazione algebrica seguente è valida anche per p negativo.

Per determinare l'equazione di t osserviamo che la retta passa per il punto $P\left(p; \frac{1}{p}\right)$ di Γ e, poiché è tangente a Γ in P, ha coefficiente angolare $f'(p) = -\frac{1}{p^2}$; quindi l'equazione di t è:

$$y = f'(p)(x-p) + f(p) \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{p^2}(x-p) + \frac{1}{p} \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{p^2}x + \frac{2}{p}.$$

Calcoliamo l'intersezione di t con l'asse x:

$$y = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{p^2}x + \frac{2}{p} \quad \rightarrow \quad x = 2p.$$

Quindi la retta tangente passa sempre per il punto $(2p; 0)$.

Per ogni valore di p non nullo, dunque, la retta t divide la regione sottesa a Γ nell'intervallo $[p; 2p]$ in due regioni:

- R_1, delimitata dall'asse x, dalla retta $x = p$ e dalla retta t;
- R_2, delimitata da Γ, dalla retta $x = 2p$ e dalla retta t.

La regione R_1 è un triangolo di area:

$$\text{area}(R_1) = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{2} \cdot p \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{2}.$$

L'area della regione R_2 si ottiene sottraendo l'area della regione R_1 all'area sottesa da $f(x)$ nell'intervallo $[p; 2p]$.

$$\text{area}(R_2) = \int_p^{2p} \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2} = \left[\ln|x|\right]_p^{2p} - \frac{1}{2} = \ln|2p| - \ln|p| - \frac{1}{2} = \ln\frac{|2p|}{|p|} - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2} \simeq 0{,}19.$$

Osserviamo che entrambe le aree sono indipendenti dal valore di $p \neq 0$.

3 Procediamo nel seguente modo:

a. determiniamo la retta r perpendicolare al piano α di equazione $x - y + z = 10$ e passante per $C(1; -1; 2)$;

b. il punto di intersezione T fra r e α individua il punto di contatto tra superficie sferica e piano;

c. la distanza $\overline{CT}$, ovvero la distanza di C dal piano α, fornisce il raggio della superficie sferica;

d. dato il centro e il raggio, determiniamo l'equazione della superficie sferica.

Sviluppiamo i singoli punti.

a. Le rette perpendicolari ad α hanno vettore di direzione $(1; -1; 1)$, le cui componenti sono i coefficienti di x, y, z dell'equazione di α. La retta r, in forma parametrica, è allora:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + t \end{cases}$$

b. Sostituiamo le equazioni di r nell'equazione di α; la soluzione, in t, fornirà la coordinata parametrica del punto di intersezione T:

$$(1+t) - (-1-t) + (2+t) = 10 \;\rightarrow\; 3t = 6 \;\rightarrow\; t = 2.$$

Il punto T ha dunque coordinate:

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \\ y = -1 - 2 \\ z = 2 + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases} \rightarrow T(3; -3; 4).$$

c. Calcoliamo il raggio della sfera in due modi.

Modo 1. Distanza fra due punti.

$$r = \overline{CT} = \sqrt{(3-1)^2 + (-3+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Modo 2. Distanza punto-piano.

$$r = \text{distanza}(C, \alpha) = \frac{|1 - (-1) + 2 - 10|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

d. La superficie sferica di centro $C(1; -1; 2)$ e raggio $2\sqrt{3}$ ha equazione:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = (2\sqrt{3})^2 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 6 = 0.$$

4 Verifichiamo la validità della formula; ragioniamo prima sugli integrali definiti e poi passiamo agli integrali definiti. Risolviamo l'integrale definito per parti:

$$\int \cos^n x\,dx = \int \underbrace{\cos x}_{g'} \cdot \underbrace{\cos^{n-1} x}_{f}\,dx = \underbrace{\sin x}_{g} \cdot \underbrace{\cos^{n-1} x}_{f} - \int \underbrace{\sin x}_{g} \cdot \underbrace{(n-1)(-\sin x)\cos^{n-2} x}_{f'}\,dx =$$

$$\sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1)\int \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x\,dx = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1)\int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^{n-2} x\,dx =$$

$$\sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx.$$

Abbiamo quindi ottenuto:

$$\int \cos^n x\,dx = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx.$$

Portando a primo membro l'integrale di $\cos^n x$ ricaviamo:

$$n\int \cos^n x\,dx = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx \;\rightarrow$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$$

Passando agli integrali definiti, possiamo allora scrivere:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \left[\frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\,dx \;\rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\,dx,$$

verificando così la formula.

Usiamo questo risultato per calcolare l'integrale definito richiesto:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx = \frac{4-1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{2-1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 x\,dx = \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{3}{8}[x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi.$$

Osserviamo che abbiamo effettuato la sostituzione $\cos^0 x = 1$. Tale uguaglianza è vera per $\cos x \neq 0$, cioè per $x \neq \frac{\pi}{2}$ (altrimenti avremmo 0^0 che non è definito), ma poiché tale punto $x = \frac{\pi}{2}$ rappresenta un punto di discontinuità eliminabile per la funzione costante $y = 1$, abbiamo potuto effettuare la sostituzione senza alterare il valore dell'integrale.

5 Il dado a sei facce è regolare, quindi la probabilità che in un lancio esca il numero 3 è $\frac{1}{6}$, mentre la probabilità che non esca il numero 3 è $\frac{5}{6}$.

Su n lanci, la probabilità che *non* esca mai il numero 3 è data da:

$$p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Imponiamo che tale probabilità sia minore dello 0,01%:

$$p_n < 0{,}01\% \;\rightarrow\; \left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{0{,}01}{100} \;\rightarrow\; \left(\frac{5}{6}\right)^n < 10^{-4} \;\rightarrow\; \ln\left(\frac{5}{6}\right)^n < \ln 10^{-4} \;\rightarrow$$

$$n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) < -4 \cdot \ln 10 \;\rightarrow\; n > \frac{-4 \cdot \ln 10}{\ln 5 - \ln 6} \quad \text{perché } \ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0.$$

Considerato che $\frac{-4 \cdot \ln 10}{\ln 5 - \ln 6} \simeq 50{,}5$, dovremo prendere $n \geq 51$.

6 Consideriamo la funzione $f(x) = x\left|ax^2 + b\right| - 3$ con a, b reali.
Il suo grafico Γ è tangente nel punto T di ascissa 1 alla retta di equazione $y = 7x - 9$; poiché T appartiene alla retta, la sua ordinata è $y = 7 \cdot 1 - 9 = -2$ e concludiamo che le coordinate del punto di tangenza sono $T(1; -2)$.

Il punto T appartiene anche al grafico di $f(x)$, quindi:

$$f(1) = -2 \;\rightarrow\; 1 \cdot \left|a \cdot 1^2 + b\right| - 3 = -2 \;\rightarrow\; \left|a + b\right| = 1.$$

La retta tangente in T a Γ ha coefficiente angolare 7, quindi deve essere $f'(1) = 7$.
Per poter derivare $f(x)$, che contiene un valore assoluto, ricordiamo la seguente regola:

$$\mathrm{D}\big[\left|g(x)\right|\big] = \frac{\left|g(x)\right|}{g(x)} \cdot g'(x).$$

In particolare otteniamo:

$$\mathrm{D}\big[\left|ax^2 + b\right|\big] = \frac{\left|ax^2 + b\right|}{ax^2 + b} \cdot 2ax.$$

Ritornando alla derivata di $f(x)$, troviamo:

$$f'(x) = |ax^2 + b| + x \cdot \frac{|ax^2 + b|}{ax^2 + b} \cdot 2ax = |ax^2 + b| \left(1 + \frac{2ax^2}{ax^2 + b}\right).$$

Imponiamo che la derivata assuma valore 7 in $x = 1$:

$$f'(1) = 7 \rightarrow |a + b| \left(1 + \frac{2a}{a + b}\right) = 7 \rightarrow 1 + \frac{2a}{a + b} = 7 \rightarrow \frac{3a + b}{a + b} = 7 \rightarrow$$

$$3a + b = 7a + 7b \rightarrow 4a + 6b = 0.$$

Mettiamo a sistema le due condizioni trovate, esaminando i due casi relativi al segno di $a + b$.

- Se $a + b \geq 0$ abbiamo:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + 6b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ 4 - 4b + 6b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ 2b = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases},$$

  da cui:

$$f(x) = x|3x^2 - 2| - 3.$$

- Se $a + b < 0$ abbiamo:

$$\begin{cases} -a - b = 1 \\ 4a + 6b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1 - b \\ -4 - 4b + 6b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1 - b \\ 2b = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases},$$

  da cui:

$$f(x) = x|-3x^2 + 2| - 3.$$

Poiché i termini in valore assoluto $|3x^2 - 2|$ e $|-3x^2 + 2|$ rappresentano la stessa funzione, le due scritture trovate per $f(x)$ sono equivalenti.

7 I grafici γ_1 e γ_2 sono costituiti entrambi da una parabola:

- γ_1, grafico di $y = x^2 + 1$, una parabola rivolta verso l'alto di vertice

$$x_V = -\frac{b}{2a} = 0,\ y_V = 1.$$

- γ_2, grafico di $y = x^2 - 8x + 9$, è una parabola rivolta verso l'alto di vertice

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2} = 4,\ y_V = -7.$$

Per determinare l'equazione della retta tangente a entrambe le parabole, prendiamo una generica retta tangente a γ_1 e imponiamo che risulti tangente anche a γ_2.

Preso dunque un punto $P(a; a^2 + 1)$ sulla prima parabola, con a reale, la retta tangente a γ_1 in P ha equazione:

$$y - (a^2 + 1) = 2a(x - a) \rightarrow y = 2ax - a^2 + 1,$$

dove il coefficiente angolare $2a$ è stato ottenuto sostituendo $x = a$ nella derivata di $y = x^2 + 1$.
Cerchiamo il punto di γ_2 nel quale la retta tangente ha coefficiente angolare $2a$:

$$y' = 2x - 8 \rightarrow 2x - 8 = 2a \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 4 + a \text{ da cui } y = (4 + a)^2 - 8(4 + a) + 9 = a^2 - 7.$$

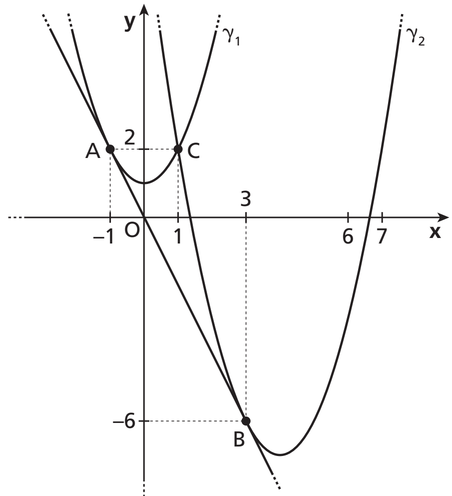
Imponiamo che la retta tangente a γ_1 passi per tale punto $(4+a; a^2-7)$:

$$a^2-7=2a\cdot(4+a)-a^2+1 \rightarrow a=-1.$$

In conclusione, la retta tangente a entrambe le parabole ha equazione:

$$y=2(-1)x-(-1)^2+1 \rightarrow y=-2x$$

ed risulta tangente a γ_1 in $A(-1; 2)$ e a γ_2 in $B(3; -6)$.



■ **Figura 14**

Le due parabole γ_1 e γ_2 si intersecano in:

$$\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=x^2-8x+9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x^2+1 \\ x^2+1=x^2-8x+9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x^2+1 \\ 8x=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases} \rightarrow C(1; 2).$$

Calcoliamo l'area della regione limitata da γ_1, γ_2 e dalla retta tangente:

$$\text{area} = \int_{-1}^{1}[x^2+1-(-2x)]dx+\int_{1}^{3}[x^2-8x+9-(-2x)]dx =$$

$$\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_{1}^{3}=$$

$$\left(\frac{1}{3}+1+1\right)-\left(\frac{-1}{3}+1-1\right)+\left(\frac{27}{3}-3\cdot 9+9\cdot 3\right)-\left(\frac{1}{3}-3+9\right)=$$

$$\frac{7}{3}+\frac{1}{3}+9-\frac{19}{3}=-\frac{11}{3}+9=\frac{-11+27}{3}=\frac{16}{3}.$$

8 La funzione assegnata

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}-\frac{1}{4}x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{12} & \text{se } 1 < x \leq 10 \end{cases}$$

è effettivamente una funzione densità di probabilità, poiché è ovunque $f(x) \geq 0$ (la funzione si considera nulla al di fuori dell'intervallo [0; 10]) e l'integrale definito su [0; 10] vale 1, infatti:

$$\int_0^{10} f(x)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x^2\right)dx+\int_1^{10}\frac{1}{12}dx=\left[\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{12}x\right]_1^{10}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}+\frac{10}{12}-\frac{1}{12}=1.$$

Il valore medio della variabile casuale corrispondente è:

$$\int_0^{10} x \cdot f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^3\right)dx + \int_1^{10} \frac{1}{12}x\,dx = \left[\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{16}x^4\right]_0^1 + \left[\frac{1}{24}x^2\right]_1^{10} =$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{16} + \frac{100}{24} - \frac{1}{24} = \frac{203}{48} \simeq 4,23.$$

Il valore mediano della variabile casuale è quel valore m, con $0 < m < 10$, tale che la probabilità dell'evento $0 < X < m$ è uguale alla probabilità dell'evento $m < X < 10$; detto altrimenti, il valore mediano m è tale per cui:

$$p(0 < X < m) = p(m < X < 10) = \frac{1}{2}.$$

Noto che $p(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, deve essere: $\int_0^m f(x)dx = \int_m^{10} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

Poiché $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x^2\right)dx = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, deve essere $1 < m < 10$.

Considerato $1 < m < 10$, abbiamo:

$$p(m < X < 10) = \int_m^{10} f(x)dx = \int_m^{10} \frac{1}{12}dx = \left[\frac{1}{12}x\right]_m^{10} = \frac{10}{12} - \frac{m}{12}.$$

Imponiamo tale probabilità uguale a $\frac{1}{2}$:

$$\frac{10}{12} - \frac{m}{12} = \frac{1}{2} \ \rightarrow\ 10 - m = 6 \ \rightarrow\ m = 4.$$

Il valore mediano della variabile casuale è 4.

9 I punti dello spazio tridimensionale equidistanti da $A(0; 1; 2)$ e $B(-3; 2; 0)$ sono i punti del piano perpendicolare al segmento AB e passante per il suo punto medio.
Il segmento AB ha vettore di direzione:

$$\vec{v}(x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A) \ \rightarrow\ \vec{v}(-3; 1; -2).$$

Il punto medio di AB è:

$$M\left(\frac{x_B + x_A}{2}; \frac{y_B + y_A}{2}; \frac{z_B + z_A}{2}\right) \ \rightarrow\ M\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 1\right).$$

Il piano perpendicolare ad AB e passante per M ha equazione:

$$-3 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) + 1 \cdot \left(y - \frac{3}{2}\right) - 2 \cdot (z - 1) = 0 \ \rightarrow\ -3x + y - 2z - 4 = 0.$$

10 Deriviamo due volte la funzione assegnata:

$$y = e^{-x}\sin x;$$

$$y' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x);$$

$$y'' = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = -2e^{-x}\cos x.$$

Sostituiamo nell'equazione differenziale e verifichiamo che otteniamo un'identità, ovvero un'uguaglianza sempre verificata per ogni valore di x:

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \ \rightarrow\ -2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}(\cos x - \sin x) + 2e^{-x}\sin x = 0 \ \rightarrow$$

$$2e^{-x}(-\cos x + \cos x - \sin x + \sin x) = 0 \ \rightarrow\ 0 = 0.$$

Quindi $y = e^{-x}\sin x$ è soluzione dell'equazione differenziale assegnata.