Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

Lo studente risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (D.M. n. 350 Art. 18 comma 8).

PROBLEMA 1

Un produttore di candeline tea light vuole produrre un nuovo tipo di candela colorata che abbia una parte inferiore di forma cilindrica e una parte superiore avente la forma riportata in figura 1, che si connetta perfettamente a quella inferiore, come mostrato in figura 2:

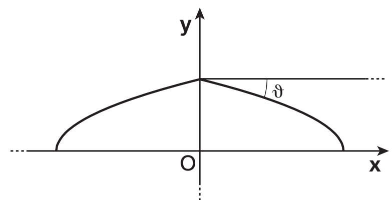


Figura 1

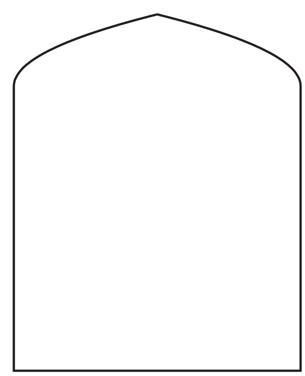


Figura 2

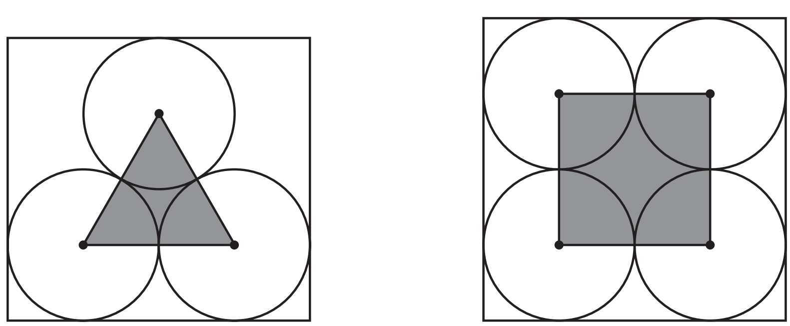
1. Stabilisci, motivando adeguatamente la risposta, quale delle seguenti funzioni può rappresentare adeguatamente il profilo della parte superiore della candela:

- $y = \begin{cases} \sqrt{a-x} & \text{se } 0 \le x \le a \\ \sqrt{a+x} & \text{se } -a \le x < 0 \end{cases}$ con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$
- $y = a - x^2$ in $[-\sqrt{a}; \sqrt{a}]$ con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$
- $y = -\sqrt{|x|} + a$ in $[-a^2; a^2]$ con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

Utilizzando l'espressione analitica trovata, studia eventuali punti di singolarità del profilo della parte superiore della candela.

2. Per consentire l'inserimento dello stoppino al vertice della candela, è necessario che l'angolo ϑ in figura 1 non sia maggiore di 30°. Determina di conseguenza i possibili valori del parametro a.
3. Attribuendo all'altezza e al raggio della parte cilindrica i valori rispettivamente di 8 e 2, in un'opportuna unità di misura, determina il volume totale della candela. Da questo dato dipenderanno il peso e il costo di produzione della candela stessa.

Il produttore deve inscatolare le candele in confezioni da 3 e da 4 candele, posizionando le candele in verticale, con le basi circolari disposte in modo da occupare il minor spazio possibile. Si prevedono due possibili configurazioni per posizionare le basi circolari delle candele all'interno delle scatole, rappresentate in figura 3:



Configurazione 1 Configurazione 2

Figura 3

4. Fornisci una valutazione numerica dell'efficienza dei due confezionamenti, calcolando il rapporto tra area occupata dalle basi circolari delle candele inserite nella scatola e area disponibile inciascuna delle due configurazioni. Tale rapporto deve essere espresso in percentuale. Ai fini del calcolo, considera che le celle poligonali evidenziate in grigio sono rispettivamente un triangolo equilatero e un quadrato.

PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, così definita:

$$f(x) = \ln(a \cdot e^{bx} + c)$$

al variare di a, b, c parametri reali positivi.

1. Verifica che, comunque si scelgano i parametri, si ha:

$$f'(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f''(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Verifica inoltre che, comunque si scelgano i parametri, la funzione f ha un asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$, e un asintoto obliquo, per $x \to +\infty$; determina a, b, c, in modo che l'asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$, sia la retta di equazione $y = 0$ e l'asintoto obliquo, per $x \to +\infty$, sia la retta di equazione $y = x$.
3. Dimostra che ponendo $a = b = c = 1$ si ha:

$$x < f(x) < e^x \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Verifica inoltre che ponendo $a = b = c = 1$ e detta A l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $h(x) = f(-|x|)$ e l'asse x del riferimento cartesiano, si ha

$$A < 2.$$

Inoltre, a partire dalle caratteristiche del grafico della funzione $h(x)$, determina un numero reale S, quanto più grande possibile, tale che

$$A > S.$$

QUESTIONARIO

1 Si dispone di due dadi uguali non bilanciati. Lanciando ciascuno dei due dadi, le probabilità di uscita dei numeri 1, 2, 3 e 4 sono pari a k, mentre le probabilità di uscita dei numeri 5 e 6 sono pari a $\frac{k}{2}$. Determinare il valore di k e stabilire qual è la probabilità che, lanciando i due dadi contemporaneamente, escano due numeri uguali tra loro.

2 Determinare il raggio della sfera di centro $C(2; 2; 2)$ tangente al piano di equazione:

$$x + 2y + z = 12.$$

3 Considerando la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{4} + 2x, & \text{per } x < 4 \\ e^{4-x} + 3, & \text{per } x \geq 4 \end{cases}$$

determinare l'angolo formato dalle tangenti nel punto angoloso del grafico della funzione.

4 Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x \cdot \sin(x)$, adoperando la definizione di derivata.

5 Determinare l'area della superficie compresa tra il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1},$$

le rette $y = 2$, $x = 5$ e l'asse y.

6 Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:

$$f(x) = x \cdot e^{-x}$$

nel suo punto di flesso.

7 La variabile casuale x ha densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{per } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ \frac{7}{12} & \text{per } x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]; \\ \frac{1}{2} & \text{per } x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right] \end{cases}$$

determinare la media e la mediana della variabile casuale x.

8 Determinare le coordinate dei punti nello spazio che giacciono sulla retta perpendicolare nel punto (1; 1; 1) al piano di equazione $2x - y - z = 0$, a distanza 6 da tale piano.

9 Considerando la funzione:

$$f(x) = \frac{ax+1}{x}$$

definita in $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$, mostrare che le tangenti al suo grafico nei punti di ascissa -1 e 1 sono parallele alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, indipendentemente dal valore del parametro a. Individuare inoltre il valore minimo del parametro a per cui la tangente al grafico nel punto di ascissa 1 forma con gli assi cartesiani un triangolo di area maggiore di 3.

10 Dimostrare che la derivata della funzione:

$$f(x) = e^{ax}$$

è la funzione

$$f'(x) = a \cdot e^{ax}.$$

PROBLEMA 1

1. Il profilo superiore della candela rappresentato nella figura 1 del testo del problema è crescente in $[-\alpha; 0]$, per qualche $\alpha > 0$, decrescente in $[0; \alpha]$ e presenta un punto angoloso in $x = 0$; inoltre, affinché si «connetta perfettamente» alla parte inferiore della candela, deve essere a tangente verticale in $x = -\alpha$ e $x = \alpha$.

Osservato che tutte e tre le funzioni proposte sono continue in un intorno chiuso dell'origine del tipo $[-\alpha; \alpha]$ e derivabili nei due intervalli $]-\alpha; 0[$ e $]0; \alpha[$, esaminiamo quale delle tre funzioni rispetta le condizioni indicate sopra.

- $f_1(x) = \begin{cases} \sqrt{a-x} & \text{se } 0 \le x \le a \\ \sqrt{a+x} & \text{se } -a \le x \le 0 \end{cases}$

  La funzione è decrescente in $[0; a]$, perché in tale intervallo $y = a - x$ è decrescente e la radice quadrata è una funzione crescente. Per ragionamenti analoghi possiamo dire che la funzione è crescente in $[-a; 0]$. Possiamo arrivare allo stesso risultato tramite la derivata prima:

  $$f_1'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{a-x}} & \text{se } 0 < x < a \\ \dfrac{1}{2\sqrt{a+x}} & \text{se } -a < x < 0 \end{cases}$$

  quindi:

  $f_1'(x) < 0$ e $f_1(x)$ decrescente per $0 < x < a$,

  $f_1'(x) > 0$ e $f_1(x)$ crescente per $-a < x < 0$,

  Controlliamo se $f_1(x)$ presenta un punto angoloso nell'origine:

  $$\lim_{x \to 0^+} f_1'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{a}} \text{ e } \lim_{x \to 0^-} f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}};$$

  i due valori sono finiti e diversi, in particolare sono opposti, quindi $f_1(x)$ ha un punto angoloso in $x = 0$.

  Infine, controlliamo le tangenti al grafico di $f_1(x)$ in $x = \pm a$:

  $$\lim_{x \to a^-} f_1'(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to -a^+} f_1'(x) = \infty;$$

  quindi il grafico di $f_1(x)$ è a tangente verticale in $x = \pm a$.

  La funzione $f_1(x)$ rappresenta dunque bene il profilo superiore della candela.

Controlliamo che le altre due funzioni non possono descrivere invece tale profilo.

- $f_2(x) = a - x^2$ per $-\sqrt{a} \le x \le \sqrt{a}$ è l'espressione analitica di una parabola con concavità verso il basso e vertice in (0; a), quindi *non* presenta un punto angoloso nell'origine.

- $f_3(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} + a & \text{se } 0 \le x \le a^2 \\ -\sqrt{-x} + a & \text{se } -a^2 \le x < 0 \end{cases} \rightarrow f_3'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } 0 < x < a^2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{se } -a^2 < x < 0 \end{cases}$

Poiché:

$$\lim_{x\to(a^2)^-} f_3'(x) = -\frac{1}{2a} \text{ e } \lim_{x\to(-a^2)^+} f_3'(x) = \frac{1}{2a},$$

ovvero i due limiti sono finiti, risulta che le tangenti al grafico di $f_3(x)$ negli estremi $x = \pm\, a^2$ del suo dominio di definizione *non* sono verticali.

Rimane confermato che l'espressione cercata per il profilo è:

$$f_1(x) = \begin{cases} \sqrt{a-x} & \text{se } 0 \le x \le a \\ \sqrt{a+x} & \text{se } -a \le x \le 0 \end{cases} \quad \text{con } a \in \mathbb{R},\ a > 0$$

che, come visto, presenta un punto angoloso nell'origine con tangenti da destra e da sinistra rispettivamente di coefficiente angolare $-\frac{1}{2\sqrt{a}}$ e $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. I coefficienti angolari sono opposti, quindi le due rette tangenti t_s e t_d sono simmetriche rispetto alla retta orizzontale passante per il punto angoloso, di equazione $y = \sqrt{a}$.

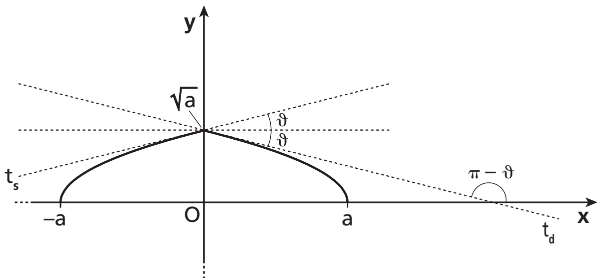


Figura 4

2. Indicato con ϑ l'angolo acuto (considerato positivo) che una tangente nel punto angoloso forma con la retta orizzontale $y = \sqrt{a}$, osserviamo che la tangente t_d forma un angolo pari a $\pi - \vartheta$ con il semiasse positivo delle *x*. Quindi il coefficiente angolare di t_d è la tangente di $\pi - \vartheta$ e possiamo scrivere:

$$\tan(\pi - \vartheta) = -\frac{1}{2\sqrt{a}} \ \to\ \tan\vartheta = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Poiché si richiede che sia $0° \le \vartheta \le 30°$, e quindi $0 \le \tan\vartheta \le \frac{\sqrt{3}}{3}$, otteniamo:

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} \le \frac{\sqrt{3}}{3} \ \to\ \sqrt{a} \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \ \to\ a \ge \frac{3}{4}.$$

3. Il cilindro della candela è alto $h = 8$ e ha raggio $r = 2$ (in una data unità di misura), quindi il profilo della parte superiore della candela è descritta da $f_1(x)$ per $a = 2$; indichiamo con $f(x)$ tale funzione particolare:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ \sqrt{2+x} & \text{se } -2 \le x \le 0 \end{cases}.$$

Il volume della parte inferiore, quella cilindrica, è:

$$V_{\text{inf}} = A_{\text{base}} \cdot \text{altezza} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 = 32\pi.$$

La parte superiore della candela è individuata dalla rotazione del grafico di $f(x)$ intorno all'asse *y*; calcoliamo quindi il suo volume con il metodo dei gusci cilindrici:

$$V_{\text{sup}} = 2\pi \int_0^2 x f(x)\,dx = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx.$$

Procediamo per sostituzione:

$$t = \sqrt{2-x} \ \to\ t^2 = 2 - x \ \to\ x = 2 - t^2 \ \to\ dx = -2t\,dt;$$

$$\text{se } x = 0 \ \to\ t = \sqrt{2}, \text{ se } x = 2 \ \to\ t = 0.$$

L'integrale si trasforma in:

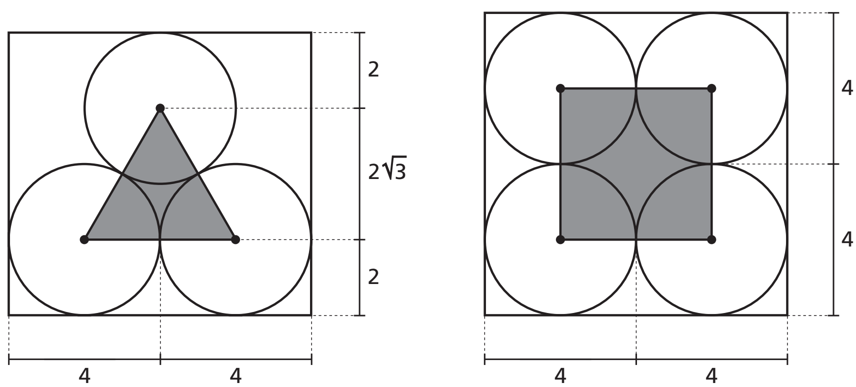
$$V_{\text{sup}} = 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{0} (2 - t^2)t(-2t)\,dt = 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{0} (2t^4 - 4t^2)\,dt = 2\pi \cdot 2 \int_{\sqrt{2}}^{0} (t^4 - 2t^2)\,dt = 4\pi\left[\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^{0} =$$

$$4\pi\left[-\frac{(\sqrt{2})^5}{5} + \frac{2(\sqrt{2})^3}{3}\right] = 4\pi\left(-\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = 16\pi\sqrt{2}\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{32}{15}\pi\sqrt{2}.$$

Il volume complessivo della candela è:

$$V = V_{\text{inf}} + V_{\text{sup}} = 32\pi + \frac{32}{15}\pi\sqrt{2} = \left(32 + \frac{32}{15}\sqrt{2}\right)\pi \simeq 110.$$

4. Ricordiamo che le candele hanno base circolare di raggio 2 (e quindi diametro 4).
Nella configurazione 1, il triangolo equilatero che congiunge i centri delle tre basi ha dunque il lato lungo 4, e l'altezza del triangolo risulta $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$.
Riportiamo nel disegno delle configurazioni 1 e 2 le quote.



Configurazione 1 **Configurazione 2** **Figura 5**

Calcoliamo l'efficienza di ciascuna configurazione.

- Nella configurazione 1 la scatola è a base rettangolare con i lati lunghi 8 e $4 + 2\sqrt{3}$; l'area del rettangolo è:

  $$A_{\text{base scatola}} = 8(4 + 2\sqrt{3}) = 16(2 + \sqrt{3}).$$

  Le basi delle tre candele hanno area complessiva:

  $$A_{\text{base candele}} = 3 \cdot r^2\pi = 3 \cdot 2^2\pi = 12\pi.$$

  Il rapporto fra le due aree è:

  $$\frac{A_{\text{base candele}}}{A_{\text{base scatola}}} = \frac{12\pi}{16(2 + \sqrt{3})} \simeq 0{,}6313 \rightarrow \text{circa } 63{,}13\%.$$

- Nella configurazione 2 la scatola è a base quadrata con il lato lungo 8; l'area del quadrato è:

  $$A_{\text{base scatola}} = 8^2 = 64.$$

  Le basi delle quattro candele hanno area complessiva:

  $$A_{\text{base candele}} = 4 \cdot r^2\pi = 4 \cdot 2^2\pi = 16\pi.$$

  Il rapporto fra le due aree è:

  $$\frac{A_{\text{base candele}}}{A_{\text{base scatola}}} = \frac{16\pi}{64} \simeq 0{,}7854 \rightarrow \text{circa } 78{,}54\%.$$

A conferma di quanto era intuibile dalla figura, l'inscatolamento risulta più efficiente se si sceglie la configurazione 2.

PROBLEMA 2

1. Consideriamo la funzione $f(x) = \ln(a \cdot e^{bx} + c)$.
Poiché a, b e c sono reali positivi, l'argomento $(a \cdot e^{bx} + c)$ del logaritmo è positivo per ogni valore di x e quindi il dominio di $f(x)$ è l'insieme $\mathbb{R}$.

Calcoliamo la derivata prima e seconda:

$$f'(x) = \frac{ab \cdot e^{bx}}{a \cdot e^{bx} + c},$$

$$f''(x) = \frac{ab^2 e^{bx}(a \cdot e^{bx} + c) - ab \cdot e^{bx} \cdot ab \cdot e^{bx}}{(a \cdot e^{bx} + c)^2} = \frac{\cancel{a^2 b^2 e^{2bx}} + ab^2 c \cdot e^{bx} \cancel{- a^2 b^2 e^{2bx}}}{(a \cdot e^{bx} + c)^2} = \frac{ab^2 c \cdot e^{bx}}{(a \cdot e^{bx} + c)^2}.$$

Sempre per la positività di a, b e c, le funzioni $f'(x)$ e $f''(x)$ risultano positive in $\mathbb{R}$; la funzione $f(x)$ è dunque strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e volge la concavità sempre verso l'alto.

2. Poiché vale il limite:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(a \cdot e^{bx} + c) = \ln c,$$

è verificato che la funzione $f(x)$ presenta un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e per ogni valore positivo dei parametri.
Tale asintoto orizzontale ha, in generale, equazione $y = \ln c$; in particolare, l'asintoto orizzontale risulta essere la retta di equazione $y = 0$ se:

$$\ln c = 0 \ \rightarrow \ c = 1.$$

Ricerchiamo l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Dal limite:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(a \cdot e^{bx} + c) = +\infty$$

deduciamo che l'asintoto obliquo potrebbe effettivamente esistere.
Calcoliamo allora:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(a \cdot e^{bx} + c)}{x},$$

che si presenta in forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.
Possiamo applicare il teorema di De L'Hospital e troviamo:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{ab \cdot e^{bx}}{a \cdot e^{bx} + c}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ab \cdot e^{bx}}{a \cdot e^{bx} + c} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{a} \cdot b \cdot \cancel{e^{bx}}}{\cancel{a} \cdot \cancel{e^{bx}} \underbrace{\left(1 + \frac{c}{a \cdot e^{bx}}\right)}_{\downarrow \atop 1}} = b.$$

Proseguiamo nella ricerca dell'asintoto obliquo; il limite:

$$q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} [\ln(a \cdot e^{bx} + c) - bx]$$

si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$. Riscriviamo l'argomento del limite nella seguente forma:

$$\ln(a \cdot e^{bx} + c) - bx = \ln(a \cdot e^{bx} + c) - \ln e^{bx} = \ln\left(\frac{a \cdot e^{bx} + c}{e^{bx}}\right) =.$$

$$\ln\left[\frac{\cancel{e^{bx}}}{\cancel{e^{bx}}}\left(a + \frac{c}{e^{bx}}\right)\right] = \ln\left(a + \frac{c}{e^{bx}}\right).$$

Il limite risulta allora:

$$q = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(a + \frac{c}{e^{bx}}\right) = \ln a.$$

In conclusione, per $x \to +\infty$ e per ogni terna di parametri positivi a, b, c la funzione $f(x)$ presenta l'asintoto obliquo di equazione $y = bx + \ln a$.
In particolare, l'asintoto obliquo è la retta di equazione $y = x$ se:

$$b = 1; \quad \ln a = 0 \;\to\; a = 1.$$

3. Poniamo $a = b = c = 1$. La funzione diventa $f(x) = \ln(e^x + 1)$.
Per verificare la catena di disuguaglianze $x < f(x) < e^x$, al variare di x, dobbiamo dimostrare le due disuguaglianze:

$$x < \ln(e^x + 1) \quad \text{e} \quad \ln(e^x + 1) < e^x.$$

Osservato che la funzione esponenziale e la funzione logaritmo con base e sono crescenti, per la prima disuguaglianza abbiamo:

$$\ln(e^x + 1) > \ln e^x = x \ln e = x \cdot 1 = x \;\to\; x < \ln(e^x + 1).$$

Possiamo verificare la seconda disuguaglianza:

$$\ln(e^x + 1) < e^x \;\forall x$$

facendo vedere, in maniera equivalente, che la funzione:

$$g(x) = \ln(e^x + 1) - e^x$$

è sempre negativa in $\mathbb{R}$.
Verifichiamo dunque che $g(x) < 0$ per ogni x; procediamo mostrando che $g(x)$ è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$ e che $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$. Sotto queste condizioni, infatti, non può esistere alcun valore α per cui sia $g(\alpha) \geq 0$, altrimenti la funzione $g(x)$ non potrebbe essere strettamente decrescente.

Calcoliamo:

- $g'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1} - e^x = \dfrac{\cancel{e^x} - e^{2x} - \cancel{e^x}}{e^x + 1} = -\dfrac{e^{2x}}{e^{x+1}} < 0$ per ogni x.
- $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} [\underbrace{\ln(e^x + 1)}_{\to 0} - \underbrace{e^x}_{\to 0}] = 0.$

Dunque, è verificata la catena di disuguaglianze $x < f(x) < e^x$ per ogni x.

4. Consideriamo sempre la funzione $f(x) = \ln(e^x + 1)$.
Per disegnare il grafico di $f(x)$, dal quale poi tramite trasformazioni geometriche otterremo quello di $h(x) = f(-|x|)$, osserviamo che:

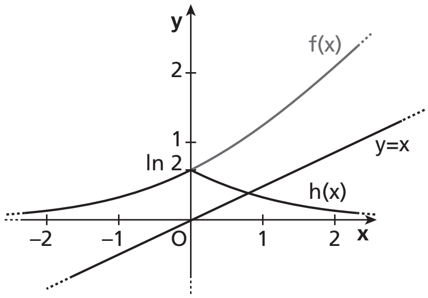
- $f(x)$ ha dominio $\mathbb{R}$, è sempre positiva (perché l'argomento del logaritmo è sempre maggiore di 1) ed è, per quanto visto prima, sempre crescente con concavità rivolta verso l'alto;
- $f(0) = \ln 2$;

  asintoto orizzontale sinistro $y = 0$ e asintoto obliquo destro $y = x$, per quanto mostrato prima.

Disegniamo dunque il grafico di $f(x)$ e poi quello di $h(x) = f(-|x|)$, che è formato da due rami così individuati:

- per $x < 0 \to h(x) = f(x)$, il grafico di $h(x)$ coincide con quello di $f(x)$;
- per $x > 0 \to h(x) = f(-x)$, il grafico di $h(x)$ si ottiene tramite simmetria rispetto all'asse y della

parte di grafico di $f(x)$ che sta a sinistra dell'asse delle ordinate.



■ **Figura 6**

Cerchiamo una stima dall'alto per l'area A della regione sottesa al grafico di $h(x)$; per la simmetria di $h(x)$ possiamo scrivere:

$$A = 2\int_{-\infty}^{0} f(x)dx.$$

Per la disuguaglianza $f(x) < e^x$ dimostrata al punto precedente risulta allora:

$$A < 2\int_{-\infty}^{0} e^x dx.$$

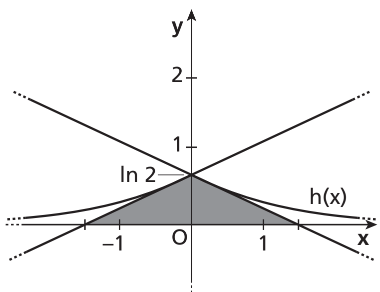
Calcoliamo l'integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{k\to-\infty} \int_{k}^{0} e^x dx = \lim_{k\to-\infty} [e^x]_k^0 = \lim_{k\to-\infty} (e^0 - e^k) = 1.$$

Otteniamo la maggiorazione:

$$A < 2\cdot 1 \ \rightarrow\ A < 2.$$

Cerchiamo ora una stima dal basso per l'area A. Come si capisce dalla seguente figura, l'area A è maggiore dell'area del triangolo individuato dalla rette tangenti al grafico di $h(x)$ nel punto angoloso (0; ln 2) e dall'asse x.



■ **Figura 7**

La retta tangente da sinistra in (0; ln 2) al grafico di $h(x)$ ha equazione:

$$y = f'(0)x + \ln 2 \ \rightarrow\ y = \frac{1}{2}x + \ln 2,$$

essendo $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

Tale retta interseca l'asse x nel punto di ascissa:

$$0 = \frac{1}{2}x + \ln 2 \ \rightarrow\ x = -2\ln 2 \simeq -1{,}386$$

e l'asse y nel punto di ordinata:

$$y = \ln 2 \simeq 0{,}693.$$

L'area del triangolo individuato dalle rette tangenti e dall'asse x ha area:

$$A_{\text{triangolo}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2\ln 2) \cdot \ln 2 = 2\ln^2 2 \simeq 0{,}9609.$$

Possiamo quindi asserire che l'area A cercata è sicuramente maggiore di $S = 0{,}96$.

QUESTIONARIO

1 Calcoliamo il valore di k, considerando che per ciascun dado l'uscita dei numeri 1, 2, 3, 4, 5 e 6 rappresentano eventi incompatibili:

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1 \to k + k + k + k + \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = 1 \to$$

$$5k = 1 \to k = \frac{1}{5} \to k = 0{,}2.$$

Nel lancio contemporaneo di due dadi, l'esito di un dado è indipendente dall'esito dell'altro (si tratta di eventi indipendenti), quindi la probabilità che lanciando due dadi contemporaneamente escano due numeri uguali tra loro è pari a:

$$\underbrace{p(1\cap 1) + p(2\cap 2) + p(3\cap 3) + p(4\cap 4)}_{4\cdot k\cdot k} + \underbrace{p(5\cap 5) + p(6\cap 6)}_{2\cdot \frac{k}{2}\cdot\frac{k}{2}} = \frac{9}{2}k^2 = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{9}{50} = 0{,}18.$$

2 Il raggio r della sfera di centro $C(2; 2; 2)$ e tangente al piano α di equazione $x + 2y + z - 12 = 0$ è dato dalla distanza di C da α.
Per calcolare r, possiamo seguire due strade.

- Applichiamo la formula della distanza di un punto da un piano.
  In generale, la distanza del punto $C(x_C; y_C; z_C)$ dal piano α di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è:
  $$r = d(C, \alpha) = \frac{|ax_C + by_C + cz_C + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$
  Nel caso in esame r risulta allora:
  $$r = \frac{|1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 1\cdot 2 - 12|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

- Oppure, determiniamo la retta t perpendicolare ad α e passante per C, individuiamo il punto T di intersezione fra t e α e infine calcoliamo la distanza fra C e T.
  Il vettore di direzione perpendicolare al piano α: $x + 2y + z - 12 = 0$ è $(1; 2; 1)$ e quindi la retta t perpendicolare ad α e passante per C, in forma parametrica, è data da:
  $$\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 2 + 2k, \text{ con } k \text{ reale.} \\ z = 2 + k \end{cases}$$
  Determiniamo il punto T di intersezione fra t e α:
  $$(2 + k) + 2(2 + 2k) + (2 + k) - 12 = 0 \to 6k - 4 = 0 \to k = \frac{2}{3},$$
  e quindi T ha coordinate:
  $$T\left(2 + \frac{2}{3}; 2 + 2\cdot\frac{2}{3}; 2 + \frac{2}{3}\right) \to T\left(\frac{8}{3}; \frac{10}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

La distanza fra C e T, e quindi il raggio r cercato, è:

$$r = d(C, T) = \sqrt{\left(\frac{8}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{10}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

3 Entrambe le due funzioni $f_1(x) = -\frac{x^2}{4} + 2x$ e $f_2(x) = e^{4-x} + 3$ che definiscono i due tratti di $f(x)$ sono continue e derivabili in $\mathbb{R}$, loro dominio naturale.
Verifichiamo allora che i grafici di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ si intersecano per $x = 4$, calcoliamo le rette tangenti ai due grafici in $x = 4$ e infine determiniamo l'ampiezza dell'angolo acuto compreso fra le due rette tangenti.
Poiché:

$$f_1(4) = -\frac{4^2}{4} + 2 \cdot 4 = 4 \text{ e } f_2(4) = e^{4-4} + 3 = 4,$$

i grafici di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ si intersecano in (4; 4).

La retta tangente al grafico di $f_1(x)$ in (4; 4) ha equazione:

$$y = f_1'(4)(x-4) + f_1(4) \rightarrow y = 0 \cdot (x-4) + 4 \rightarrow y = 4,$$

essendo $f_1'(x) = -\frac{1}{4} \cdot 2x + 2 = -\frac{x}{2} + 2$ e quindi $f_1'(4) = -\frac{4}{2} + 2 = 0$.

La retta tangente al grafico di $f_2(x)$ in (4; 4) ha equazione:

$$y = f_2'(4)(x-4) + f_2(4) \rightarrow y = -(x-4) + 4 \rightarrow y = -x + 8,$$

essendo $f_2'(x) = -e^{4-x}$ e quindi $f_2'(4) = -e^{4-4} = -1$.
Quindi una retta tangente è orizzontale, mentre l'altra è parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante. L'angolo acuto formato dalle due rette è dunque di 45°.

4 Applichiamo la definizione di derivata per calcolare la derivata di $f(x) = x\sin x$. La funzione è definita in $\mathbb{R}$; per ogni x reale calcoliamo il limite del rapporto incrementale:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\sin(x+h) - x\sin x}{h}.$$

Applichiamo la formula di addizione del seno e sviluppiamo i calcoli a numeratore:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)(\sin x\cos h + \cos x \sin h) - x\sin x}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\sin x\cos h + (x+h)\cos x\sin h - x\sin x}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x\sin x\cos h + h\sin x\cos h + (x+h)\cos x\sin h - x\sin x}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x\sin x(\cos h - 1) + h\sin x\cos h + (x+h)\cos x\sin h}{h}.$$

Ricordando i limiti notevoli $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ e $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, otteniamo:

$$\lim_{h \to 0} \left[x\sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\downarrow \atop 0} + \frac{\cancel{h}\sin x}{\cancel{h}} \underbrace{\cos h}_{\downarrow \atop 1} + \underbrace{(x+h)}_{\downarrow \atop x} \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\downarrow \atop 1} \right] = \sin x + x\cos x.$$

Abbiamo ottenuto la formula della derivata:

$$f(x) = x \sin x \;\rightarrow\; f'(x) = \sin x + x \cos x.$$

5 Il denominatore della funzione $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ non si annulla mai, in quanto il discriminante del polinomio di secondo grado è minore di zero ($\Delta = 1 - 4 = -3$). La funzione è quindi definita e continua in tutto $\mathbb{R}$.
Inoltre, la funzione è positiva nell'intervallo [0; 5], in quanto il denominatore è sempre positivo e il numeratore è positivo per $x > -\dfrac{1}{2}$.

Osserviamo che $f(0) = 1 < 2$ e $f(5) = \dfrac{11}{31} < 2$. Stabiliamo se la funzione assume valori maggiori o uguali a 2 nell'intervallo [0; 5].
Risolviamo la seguente disequazione:

$$f(x) \geq 2 \;\rightarrow\; \frac{2x+1}{x^2+x+1} \geq 2 \;\rightarrow\; \cancel{2x} + 1 \geq 2x^2 + \cancel{2x} + 2 \;\rightarrow\; 2x^2 \leq -1 \text{ che è impossibile.}$$

In conclusione, il grafico di $f(x)$ rimane sempre al di sotto della retta di equazione $y = 2$ nell'intervallo [0; 5].
L'area A della regione compresa fra la retta di equazione $y = 2$, il grafico $f(x)$ e le rette verticali di equazione $x = 0$ e $x = 5$ è dato dal seguente integrale definito:

$$A = \int_0^5 \left(2 - \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right) dx = \left[2x - \ln\left| x^2 + x + 1 \right|\right]_0^5 = (10 - \ln 31) - (-\ln 1) = 10 - \ln 31 \simeq 6{,}566.$$

6 Data la funzione $f(x) = xe^{-x}$, stabiliamo innanzi tutto qual è il suo punto di flesso e poi determiniamo la retta tangente al suo grafico in tale punto.
La funzione è continua e indefinitamente derivabile su $\mathbb{R}$; calcoliamo la derivata prima e seconda:

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x};$$
$$f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}.$$

La derivata prima si annulla per $x = 1$ mentre la derivata seconda si annulla per $x = 2$, è negativa per $x < 2$ ed è positiva per $x > 2$, quindi $f(x)$ ha un flesso per $x = 2$. In corrispondenza di tale ascissa si ha:

$$f(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2};$$

$$f'(2) = (1-2)e^{-2} = -\frac{1}{e^2}.$$

La retta tangente al grafico di $f(x)$ nel suo punto di flesso $\left(2; \dfrac{2}{e^2}\right)$ ha equazione:

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) \;\rightarrow\; y = -\frac{1}{e^2}(x-2) + \frac{2}{e^2} \;\rightarrow\; y = -\frac{x}{e^2} + \frac{4}{e^2}.$$

7 Osserviamo innanzi tutto che nel testo del quesito la funzione è definita a tratti tramite gli intervalli chiusi.
Riscriviamo il quesito usando la notazione standard per le variabili aleatorie.

La variabile casuale X ha densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & \text{per } x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right] \\[2mm] \dfrac{7}{12} & \text{per } x \in \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]; \\[2mm] \dfrac{1}{2} & \text{per } x \in \left[\dfrac{3}{2}; 2\right] \end{cases}$$

determinare la media e la mediana della variabile casuale X.

Compare una criticità, quindi, negli estremi $x=\frac{1}{2}$ e $x=\frac{3}{2}$, poiché in corrispondenza di tali valori la funzione dovrebbe assumere contemporaneamente due valori:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3} \text{ e } f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{12}; \qquad f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{12} \text{ e } f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

La cosa è ovviamente impossibile.
Trattandosi però di una funzione di probabilità di una variabile casuale continua X, possiamo modificare la funzione in un numero finito di punti senza che cambino le probabilità associate ai vari intervalli, che si calcolano mediante integrali.
Consideriamo allora, come funzione di probabilità, la seguente $\left(\right.$dove gli estremi $x=\frac{1}{2}$ e $x=\frac{3}{2}$ afferiscono a un solo tratto della funzione$\left.\right)$:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & \text{se } 0\le x\le\frac{1}{2}\\ \frac{7}{12} & \text{se } \frac{1}{2}<x\le\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & \text{se } \frac{3}{2}<x\le 2\end{cases}.$$

Prima di procedere al calcolo della media e della mediana verifichiamo che si tratti effettivamente di una funzione densità probabilità di una variabile casuale continua X:

- $f(x)\ge 0$ per ogni x reale per definizione (per $x<0$ e per $x>2$ si assume $f(x)=0$);
- l'evento «$X\in\mathbb{R}$» è certo, in quanto:

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{7}{12}dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right)+\frac{7}{12}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{3}{2}\right)=1.$$

La funzione $f(x)$ è dunque una funzione densità di probabilità.

La media, ovvero il valor medio, della variabile casuale continua X associata a $f(x)$ si calcola con l'integrale definito:

$$M(X)=\int_0^2 x\cdot f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{3}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{7}{12}x\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{x}{2}dx=\left[\frac{1}{6}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{7}{24}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{\frac{3}{2}}^{2}=$$

$$\frac{1}{24}-0+\frac{21}{32}-\frac{7}{96}+1-\frac{9}{16}=\frac{17}{16}.$$

La mediana della variabile casuale X è quel valore m, con $0<m<5$, tale che la probabilità dell'evento $0<X<m$ è uguale alla probabilità dell'evento $m<X<5$, ovvero è quel valore m tale che:

$$p(0<X<m)=p(m<X<5)=\frac{1}{2},$$

dove $p(x_1<X<x_2)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$.

Calcoliamo le probabilità sui tre intervalli di definizione di $f(x)$:

$$p\left(0<X<\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{6}<\frac{1}{2};$$

$$p\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{7}{12}dx=\frac{7}{12}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{12}>\frac{1}{2};$$

$$p\left(\frac{3}{2}<X<2\right)=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}.$$

Il valore mediano m si trova dunque nell'intervallo $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ ed è tale per cui:

$$p(0<X<m)=\frac{1}{2} \rightarrow p\left(0<X<\frac{1}{2}\right)+p\left(\frac{1}{2}<X<m\right)=\frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{6}+\int_{\frac{1}{2}}^{m}\frac{7}{12}dx=\frac{1}{2} \rightarrow \left[\frac{7}{12}x\right]_{\frac{1}{2}}^{m}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6} \rightarrow \frac{7}{12}\left(m-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3} \rightarrow \frac{7}{12}m=\frac{1}{3}+\frac{7}{24} \rightarrow$$

$$m=\frac{8+7}{24}\cdot\frac{12}{7} \rightarrow m=\frac{15}{14}.$$

8 Il punto $A(1;1;1)$ appartiene effettivamente al piano α di equazione $2x-y-x=0$, poiché le sue coordinate verificano l'equazione:

$$2\cdot 1-1-1=0 \rightarrow 0=0 \text{ VERO.}$$

Il vettore di direzione perpendicolare ad α è individuato dai coefficienti dell'equazione di α ed è pertanto $(2;-1;-1)$; la retta r passante per A e ortogonale ad α, in forma parametrica, è:

$$\begin{cases} x=1+2k \\ y=1-k, \text{ con } k \text{ reale.} \\ z=1-k \end{cases}$$

I punti di r hanno allora coordinate generiche $P(1+2k;1-k;1-k)$ al variare di k.
Fra tali punti, cerchiamo quelli che hanno distanza 6 da A:

$$d(A,P)=6 \rightarrow \sqrt{(1+2k-1)^2+(1-k-1)^2+(1-k-1)^2}=6 \rightarrow \sqrt{4k^2+k^2+k^2}=6 \rightarrow$$

$$\sqrt{6k^2}=6 \rightarrow 6k^2=36 \rightarrow k^2=6 \rightarrow k=\pm\sqrt{6}.$$

I punti cercati sono due:

$$P_1(1+2\sqrt{6};1-\sqrt{6};1-\sqrt{6}) \text{ e } P_2(1-2\sqrt{6};1+\sqrt{6};1+\sqrt{6}).$$

9 Consideriamo la funzione $f(x)=\frac{ax+1}{x}$, che ha dominio $x\neq 0$ per ogni a reale. Inoltre $f(-1)=a-1$ e $f(1)=a+1$.

La derivata prima è:

$$f'(x)=\frac{ax-(ax+1)\cdot 1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}.$$

La retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa -1 ha equazione:

$$y=f'(-1)(x+1)+f(-1) \rightarrow y=-(x+1)+a-1 \rightarrow y=-x+a-2,$$

e quindi è parallela alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante.
La retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa 1 ha equazione:

$$y=f'(1)(x-1)+f(1) \rightarrow y=-(x-1)+a+1 \rightarrow y=-x+a+2,$$

e quindi è anch'essa parallela alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante.

La retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa 1 interseca gli assi cartesiani in:

$$\begin{cases} y=-x+a+2 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=a+2 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow Q(0;a+2),$$

$$\begin{cases} y=-x+a+2 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=a+2 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow R(a+2;0).$$

Osserviamo che il triangolo OQR individuato dalla retta tangente e dagli assi:

- giace nel primo quadrante se $a+2>0 \rightarrow a>-2$;
- giace nel terzo quadrante se $a+2<0 \rightarrow a<-2$;
- degenera nel punto O se $a=-2$.

L'area del triangolo OQR è data da:

$$A=\frac{1}{2}\cdot\overline{OQ}\cdot\overline{OR}=\frac{1}{2}\cdot|a+2|\cdot|a+2|=\frac{1}{2}(a+2)^2,$$

per ogni valore di a.
Imponiamo che tale area sia maggiore di 3:

$$\frac{1}{2}(a+2)^2>3 \rightarrow (a+2)^2>6 \rightarrow$$

$$a+2<-\sqrt{6} \vee a+2>\sqrt{6} \rightarrow a<-\sqrt{6}-2 \vee a>\sqrt{6}-2.$$

L'area del triangolo OQR è dunque maggiore di 3 se $a<-\sqrt{6}-2$ oppure se $a>\sqrt{6}-2$.
Poiché è richiesto di trovare un valore minorante per a, concludiamo che:

- tale valore non esiste se si considera a reale;
- tale valore è $a=\sqrt{6}-2$ se ci limitiamo a considerare gli a reali positivi; in questo caso, comunque, il valore $(\sqrt{6}-2)$ risulta un estremo inferiore e *non* un minimo.

10 Dalle derivate notevoli

$$D[e^x]=e^x \text{ e } D[e^{g(x)}]=g'(x)\cdot e^{g(x)}$$

discende:

$$f(x)=e^{ax} \rightarrow f'(x)=D[ax]\cdot e^{ax}=a\cdot e^{ax}.$$

Volendo ottenere il risultato applicando la definizione di derivata, invece, procediamo nel seguente modo:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{e^{a(x+h)}-e^{ax}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^{ax}\cdot e^{ah}-e^{ax}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^{ax}(e^{ah}-1)}{h}=\lim_{h\to0}\left[e^{ax}\cdot\underbrace{\frac{e^{ah}-1}{ah}}_{1}\cdot a\right]=a\cdot e^{ax}.$$

dove ci siamo ricondotti al limite notevole $\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$.