SECONDA PROVA SCRITTA – ESEMPIO MINISTERIALE DICEMBRE 2018

Tema di MATEMATICA

PROBLEMA 1

Fissati due parametri reali $S > 0,\ k > 0$, *considera la funzione:*

$$f_k(x) = \frac{S}{1+e^{-kx}}$$

il cui grafico viene indicato con Γ_k .

La funzione $f_k(x)$ *può essere adoperata per studiare la possibile evoluzione nel tempo di una popolazione che abbia capacità di riprodursi, nell'ipotesi in cui la limitatezza delle risorse disponibili causi l'esistenza di una "soglia di sostenibilità" al di sotto della quale la popolazione è costretta a mantenersi.*

1)

Dimostra che i valori assunti dalla funzione $f_k(x)$ *si mantengono all'interno dell'intervallo aperto delimitato inferiormente dal valore 0 e superiormente dal valore S, dove quest'ultimo rappresenta tale soglia di sostenibilità.*

La funzione è definita e continua su tutto R e risulta:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{S}{1+e^{-kx}} = 0^+ \quad e \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{S}{1+e^{-kx}} = S^-$$

Valutiamo la monotonia della funzione:

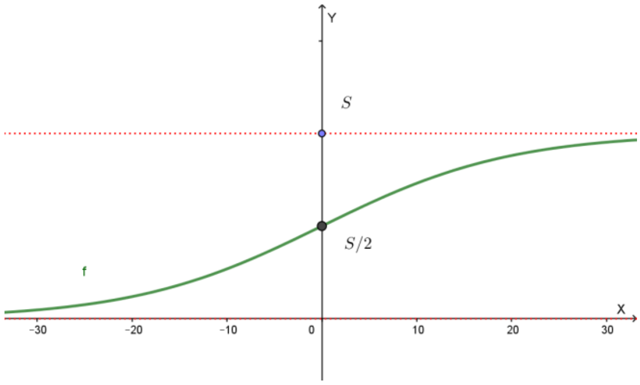
$$f'(x) = \frac{-S(-ke^{-kx})}{(1+e^{-kx})^2} = \frac{kSe^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2} > 0 \ \ per\ ogni\ x:$$

La funzione è quindi strettamente crescente in tutto il dominio ed ha come codominio l'intervallo aperto $(0;\ S)$, dove S è il valore al di sotto del quale si mantiene la popolazione.

2)

Osservando Γ_k, *individua la trasformazione geometrica da applicare a* Γ_k *per farlo diventare il grafico di una funzione dispari, e determina l'espressione analitica di tale funzione.*

Oltre a quanto detto nel punto precedente osserviamo che il grafico della funzione taglia l'asse delle ordinate in $(0; S/2)$. Il grafico è quindi del tipo:



Consideriamo la traslazione di vettore $\vec{v} = \left(0; -\frac{S}{2}\right)$:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - \frac{S}{2} \end{cases} ; \begin{cases} x = X \\ y = Y + \frac{S}{2} \end{cases}$$

Applicando questa trasformazione a Γ_k otteniamo l'equazione:

$$Y + \frac{S}{2} = \frac{S}{1 + e^{-kX}}, \quad Y = \frac{2S - S(1 + e^{-kX})}{2(1 + e^{-kX})} = \frac{S - Se^{-kX}}{2(1 + e^{-kX})} = \frac{S}{2} \cdot \frac{1 - e^{-kX}}{1 + e^{-kX}} = \frac{S}{2} \cdot \frac{e^{kX} - 1}{e^{kX} + 1}$$

Verifichiamo che $Y = \frac{S}{2} \cdot \frac{1-e^{-kX}}{1+e^{-kX}}$ è dispari, dimostrando che la trasformazione che muta Y in -Y e X in -X lascia inalterata l'equazione:

$$-Y = \frac{S}{2} \cdot \frac{1 - e^{kX}}{1 + e^{kX}}, \qquad Y = \frac{S}{2} \cdot \frac{e^{kX} - 1}{1 + e^{kX}}$$

La trasformazione geometrica da applicare a Γ_k per farlo diventare il grafico di una funzione dispari è la traslazione di vettore $\vec{v} = \left(0; -\frac{S}{2}\right)$, e l'espressione analitica della funzione che si ottiene è: $Y = \frac{S}{2} \cdot \frac{e^{kX}-1}{1+e^{kX}}$.

Notiamo che quest'ultima funzione, dispari, presenta in (0; 0) un flesso, quindi $f_k(x)$ ha in $\left(0; \frac{S}{2}\right)$ un flesso.

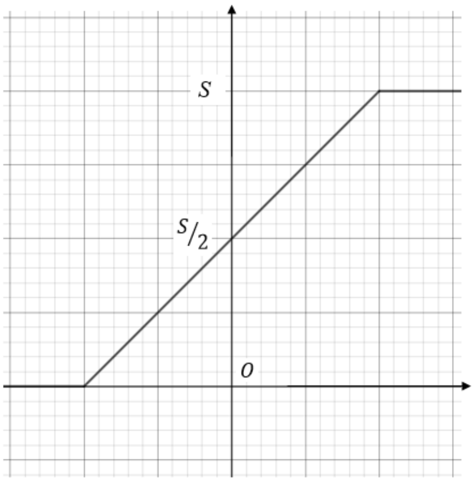
3)

Individua graficamente o analiticamente il valore della x corrispondente alla massima velocità di crescita di una popolazione secondo il modello rappresentato dalla funzione $f_k(x)$; determina quindi, in funzione dei parametri S e k, il valore di tale velocità massima.

La velocità di crescita è data dalla derivata prima di $f_k(x)$. Analizzando grafico di $f_k(x)$ si osserva che la derivata seconda è positiva per x<0, negativa per x>0 e nulla per x=0 (dove c'è un flesso): la derivata prima di $f_k(x)$ è quindi crescente per x<0 e decrescente per x>0: in x=0 assume il valore massimo. Sostituendo in $f_k'(x) = \frac{kSe^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}$ otteniamo: $f_k'(0) = \frac{kS}{4}$.

Quindi: il valore della x corrispondente alla massima velocità di crescita di una popolazione secondo il modello rappresentato dalla funzione $f_k(x)$ è x=0 ed il valore della massima velocità di crescita è $\frac{kS}{4}$.

Dovendo effettuare lo studio di una coltura batterica in un ambiente a risorse limitate, puoi pensare, al fine di semplificare i calcoli, di approssimare la funzione $f_k(x)$ con una funzione come $g_k(x)$, il cui grafico è riportato nella figura seguente:



Il valore di $g_k(x)$ passa da 0 a S con una rampa lineare, di pendenza pari alla pendenza di Γ_k nel punto di ascissa 0.

4)

Determina, in funzione dei parametri S e k, l'espressione analitica della funzione $g_k(x)$.

La pendenza di Γ_k nel punto di ascissa 0 è $f_k'(0) = \frac{kS}{4}$. Questo valore è uguale al coefficiente angolare della retta che corrisponde alla rampa lineare, passante per $\left(0; \frac{S}{2}\right)$; la rampa ha quindi equazione:

$$y - \frac{s}{2} = \frac{kS}{4}x, \quad y = \frac{kS}{4}x + \frac{S}{2}; \quad se\ y = 0\ si\ ha\colon\ x = -\frac{2}{k}\ ; \quad se\ y = S, \qquad x = \frac{2}{k}$$

Quindi si ha:

$$g_k(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < -\frac{2}{k} \\ \frac{kS}{4}x + \frac{S}{2}, & se\ -\frac{2}{k} \leq x \leq \frac{2}{k} \\ S, & se\ x > \frac{2}{k} \end{cases}$$

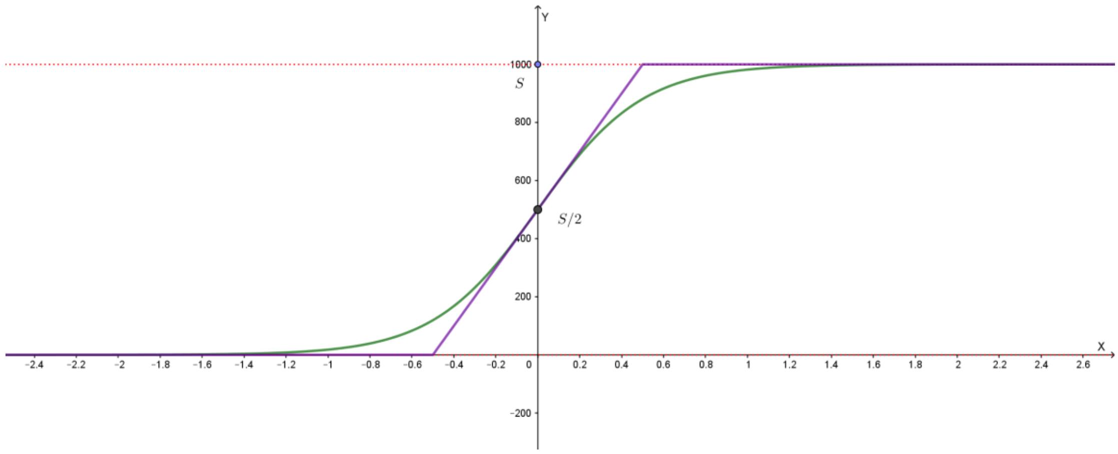
Osserviamo che $g_k(x)$, in $-\frac{2}{k} \leq x \leq \frac{2}{k}$, è la tangente nel punto di flesso di $f_k(x)$.

5)

Illustra il procedimento che adotteresti per valutare la accettabilità dell'approssimazione di $f_k(x)$ fornita da $g_k(x)$.

$$f_k(x) = \frac{S}{1+e^{-kx}}$$

Confrontiamo i grafici delle due funzioni (per esemplificare abbiamo posto S=1000 e k=4):



Abbiamo già osservato che $g_k(x)$, in $-\frac{2}{k} \leq x \leq \frac{2}{k}$, è la tangente nel punto di flesso di $f_k(x)$, quindi essa approssima $f_k(x)$ in un intorno dell'origine, come $-\frac{2}{k} \leq x \leq \frac{2}{k}$. Inoltre se $x = \frac{2}{k}$ $g_k(x)$ vale S, mentre $f_k(x)$ vale $\frac{S}{1+e^{-2}} \cong \frac{S}{1.14}$.

In particolare, nel nostro esempio, in cui S=1000 e k=4, per x=1 risulta approssimativamente f(1)=982 e g(1)=1000. Quindi g ed f per $|x| > 1$ tendono ad avere valori molto vicini:

possiamo concludere che $g_k(x)$ fornisce un'approssimazione accettabile di $f_k(x)$.

6)

All'aumentare di k, tale approssimazione diventa migliore? Motiva la tua risposta.

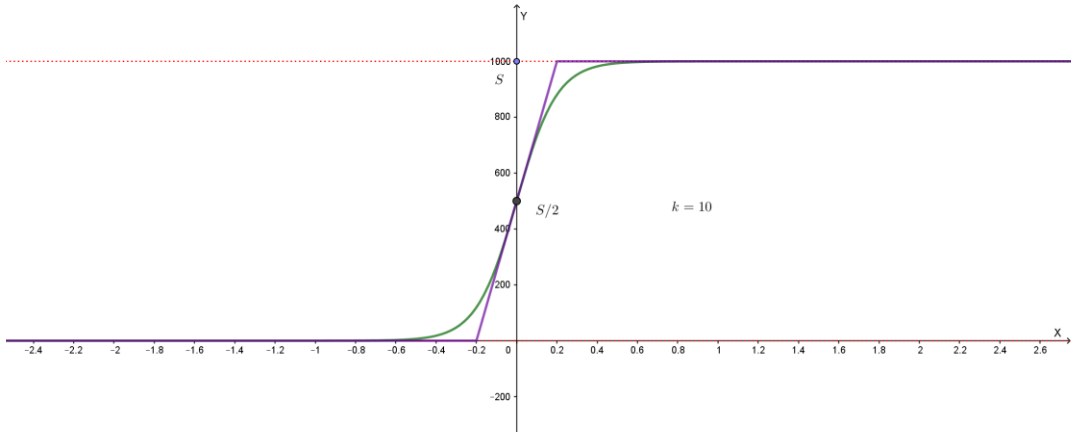
Abbiamo già detto che $g_k(x)$, in $-\frac{2}{k} \leq x \leq \frac{2}{k}$, è la tangente nel punto di flesso di $f_k(x)$, quindi essa approssima $f_k(x)$ in un intorno dell'origine, quale $-\frac{2}{k} \leq x \leq \frac{2}{k}$. Più è piccolo tale intervallo, migliore sarà l'approssimazione; tale intervallo è tanto più piccolo quanto più k è grande quindi:

al crescere di k l'approssimazione di f con g migliora.

Facciamo un'altra considerazione.

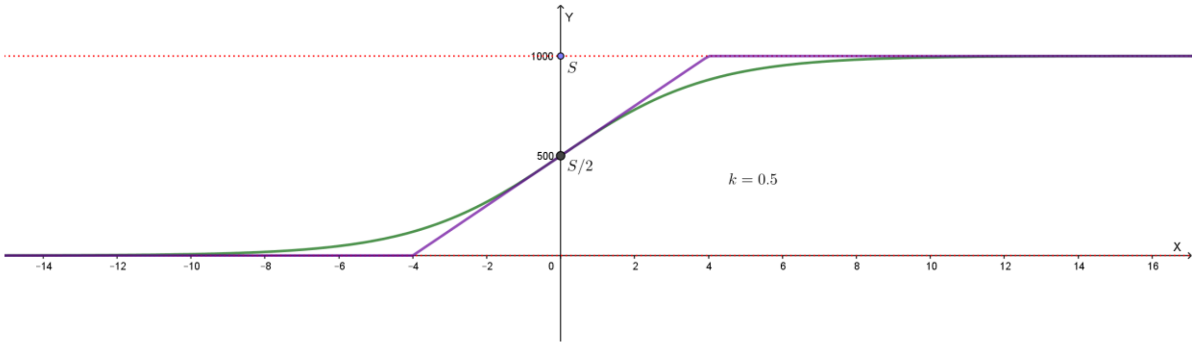
Fissato per esempio S=1000 abbiamo visto la relazione grafica fra g ed f per k=4 ed i valori assunti per x=1.

Per k=10 abbiamo:



E risulta approssimativamente f(1)=999.95 e g(1)=1000: praticamente uguali. Quindi g approssima molto bene f per $|x| > 1$.

Per k=0.5 abbiamo circa f(1)=622 e g(1)=625: quindi g approssima meno bene dei casi precedenti f per $|x| > 1$.



Osserviamo infine che la g vale S per x=2/k. Inoltre:

Se k=0.5, g vale S per x=4. Per x=4 si ha: $f_k(4) = \frac{S}{1+e^{-2}} \cong \frac{S}{1.14}$

Se k=4, g vale S per x=0.5. Per x=0.5 si ha: $f_k(0.5) = \frac{S}{1+e^{-2}} \cong \frac{S}{1.14}$

Se k=10, g vale S per x=0.2. Per x=0.2 si ha: $f_k(0.2) = \frac{S}{1+e^{-2}} \cong \frac{S}{1.14}$

Ciò conferma che g ed f tendono ad avere lo stesso valore per x sempre più piccolo al crescere di k, a conferma che al crescere di k migliora l'approssimazione di f con g.

Con la collaborazione di Angela Santamaria

SECONDA PROVA SCRITTA – ESEMPIO MINISTERIALE DICEMBRE 2018

Tema di MATEMATICA

PROBLEMA 2

(Il Problema è quasi uguale al Problema 2 della Simulazione del 10 dicembre 2015)

Il tuo liceo, nell'ambito dell'alternanza scuola lavoro, ha organizzato per gli studenti del quinto anno un'attività presso lo stabilimento ICE EXPRESS sito nella tua regione. All'arrivo siete stati divisi in vari gruppi. Il tuo, dopo aver visitato lo stabilimento e i laboratori, partecipa ad una riunione legata ai processi di produzione.

Un cliente ha richiesto una fornitura di blocchi di ghiaccio a forma di parallelepipedo a base quadrata di volume 10 dm^3*, che abbiano il minimo scambio termico con l'ambiente esterno, in modo da resistere più a lungo possibile prima di liquefarsi.*

Al tuo gruppo viene richiesto di determinare le caratteristiche geometriche dei blocchi da produrre, sapendo che gli scambi termici tra questi e l'ambiente avvengono attraverso la superficie dei blocchi stessi.

1) *Determina il valore del lato b della base quadrata che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza h, tenendo presente la necessità che il volume sia* $10\ dm^3$.

Indicata con h l'altezza del parallelepipedo, il suo volume è:

$$V = b^2 h = 10\ dm^3 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{10}{b^2}$$

La superficie S del parallelepipedo è:

$$S = 2b^2 + 4(bh) = 2b^2 + 4b \cdot \frac{10}{b^2} = 2b^2 + \frac{40}{b} \qquad con\ b > 0$$

Posto per comodità S=y e b=x studiamo (anche se non richiesto) la funzione di equazione:

$$\boldsymbol{y = 2x^2 + \frac{40}{x}\ , \quad con\ x > 0}$$

Se $x \to 0^+ \quad y \to +\infty$; se $x \to +\infty \quad y \to +\infty$; non esiste asintoto obliquo poiché la funzione è un infinito del secondo ordine.

Segno: y>0 per ogni x del dominio (x>b).

Derivata prima:

$y' = 4x - \frac{40}{x^2} \geq 0 \quad se \quad x^3 \geq 10\,, \quad x \geq \sqrt[3]{10}$
La funzione è quindi crescente per $x > \sqrt[3]{10}$ e decrescente per $0 < x < \sqrt[3]{10}$.

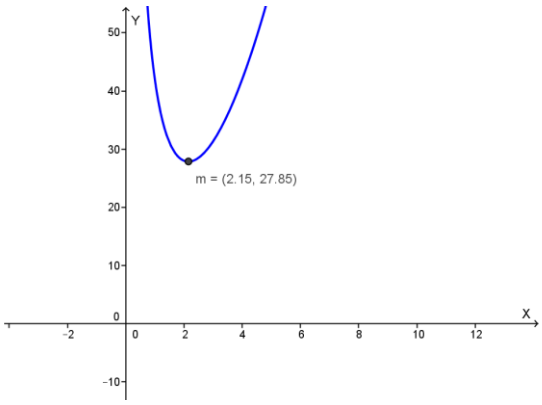
$x = \sqrt[3]{10} \cong 2.2$ è punto di minimo relativo (e assoluto), con valore:

$y = 2\sqrt[3]{100} + \frac{40}{\sqrt[3]{10}} \cong 27.8$.

Derivata seconda:

$y'' = 4 + \frac{80}{x^3} \geq 0 \quad per\ ogni\ x\ del\ dominio:$ la concavità è sempre rivolta verso l'alto.

Il grafico della funzione è quindi il seguente:



Determiniamo il valore di b che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza h.

Lo scambio termico è minimo quando è minima la superficie del parallelepipedo, quindi quando $b = \sqrt[3]{10} \cong 2.2\ dm$; in tal caso l'altezza h del parallelepipedo è:

$$h = \frac{10}{b^2} = \frac{10}{\sqrt[3]{100}} = \frac{10\sqrt[3]{10}}{10} = \sqrt[3]{10}\ dm \cong 2.2\ dm = b$$

Il minimo scambio termico si ha quindi quando il parallelepipedo è un cubo di spigolo $b = \sqrt[3]{10}$

Il blocco di ghiaccio al termine del processo produttivo si trova alla temperatura di -18°C. Esso viene posto su un nastro trasportatore che lo porta a un camion frigorifero, attraversando per due minuti un ambiente che viene mantenuto alla temperatura di 10°C; esso pertanto tende a riscaldarsi, con velocità progressivamente decrescente, in funzione della differenza di temperatura rispetto all'ambiente, e inizia a fondere se lungo il percorso raggiunge la temperatura di 0°C.

2) *Scegli, motivando la tua scelta, quale delle seguenti funzioni è più idonea per rappresentare il processo di riscaldamento prima della liquefazione (T_a = temperatura ambiente, T_g = temperatura iniziale del ghiaccio, $T(t)$ = temperatura del ghiaccio all'istante t, dove t è il tempo trascorso dall'inizio del riscaldamento, in minuti):*

$$T(t) = (T_g - T_a)e^{-kt}$$

$$T(t) = (T_a - T_g)(1 - e^{-kt}) + T_g$$

$$T(t) = (T_a - T_g)e^{-kt} - T_a$$

e determina il valore che deve avere il parametro K perché il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero.

Con i dati forniti le tre funzioni hanno le seguenti equazioni:

$$T(t) = -28\, e^{-kt}$$

$$T(t) = 28(1 - e^{-kt}) - 18 = 10 - 28\, e^{-kt}$$

$$T(t) = 28e^{-kt} - 10$$

Per t=0 deve essere T= - 18, quindi si scarta la prima equazione essendo T(0) = -28 e così pure la terza essendo T(0)= + 18.

La funzione richiesta è quindi la seconda (per la quale T(0)=-18):

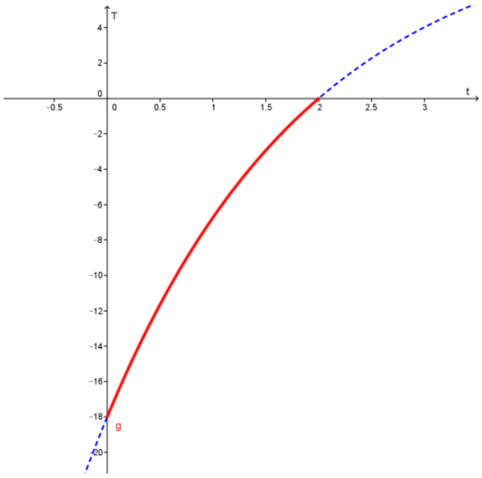
$$T(t) = 10 - 28\, e^{-kt}$$

Per determinare il valore di k dobbiamo imporre che per t=2 la temperatura non sia superiore a zero gradi:

$$T(2) = 10 - 28\, e^{-2k} \leq 0\,, \quad e^{-2k} \geq \frac{5}{14} \quad , \quad -2k \geq ln\left(\frac{5}{14}\right)\,, \quad k \leq -\frac{1}{2}\, ln\left(\frac{5}{14}\right) \cong 0.51$$

Possiamo quindi scegliere $k = -\frac{1}{2}\, ln\left(\frac{5}{14}\right)$, che è circa $k = \frac{1}{2}$.
Per tale valore di k la temperatura del blocco di ghiaccio raggiunge zero gradi alla fine del percorso sul nastro trasportatore.

Anche se non richiesto, indichiamo il grafico della temperatura: $T(t) = 10 - 28\, e^{-kt}$ che è approssimabile a $\boldsymbol{T(t) = 10 - 28\, e^{-\frac{1}{2}t}}$.



3) *Poiché il parametro K varia in funzione di diversi fattori produttivi, c'è un'incertezza del 10% sul suo effettivo valore. Ritieni che questo determini una incertezza del 10% anche sul valore della temperatura T del blocco di ghiaccio all'istante in cui raggiunge il camion frigorifero? Motiva la tua risposta, in modo qualitativo o quantitativo.*

Essendo $k = -\frac{1}{2}\, ln\left(\frac{5}{14}\right) \cong 0.5$, il suo 10% è circa 0.05 ($= \Delta k =$ errore assoluto di k).
Assumendo come valore effettivo di k=0.5, con l'incertezza del 10% esso varia tra 0.45 e 0.55.
Ricordiamo che, data una funzione y=f(x), all'incremento Δx di $x = x_0$ corrisponde un incremento Δf della funzione dato da: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ e tale incremento è approssimabile con $f'(x_0) \cdot \Delta x$ (differenziale della funzione relativo al punto x_0 ed all'incremento Δx. Quindi: $\Delta f \cong f'(x_0) \cdot \Delta x$.
Consideriamo T come funzione di k, fissato t=2: $T(k) = 10 - 28\, e^{-2k}$.
Nel nostro caso abbiamo: $T'(k) = 56\, e^{-2k}$, $T'(0.5) \cong 21$, $\Delta k = 0.05$. Quindi:

$\Delta T \cong 21 \cdot 0.05 \cong 1.1$

Ad un incremento di 0.05 su k corrisponde un incremento di 1.1 su T. Quindi:

$T = (0.0 \pm 1.1)$°C

L'errore relativo di T è: $\frac{\Delta T}{T}$.

Essendo il valore di T=0, l'errore relativo non è definito, è indeterminato (tenderebbe a $+\infty$)

Osserviamo che:

Per k=0.45 si ha $T(0.45) = T(k - \Delta k) = 10 - 28\, e^{-0.45\cdot 2} \cong -1.4$
Per k=0.55 si ha $T(0.55) = T(k + \Delta k) = 10 - 28\, e^{-0.55\cdot 2} \cong 0.7$

E notiamo che $\Delta T \cong \frac{T(0.55)-T(0.45)}{2} \cong 1.0\ (equivalente\ a\ \ \Delta T \cong 21 \cdot 0.05 \cong 1.1)$
Assumendo come valore probabile di T la media tra T(0.45) e T(0.55), risulta:

$$\bar{T} = \frac{-1.4 + 0.7}{2} = -\frac{0.7}{2} = -0.35$$

Con tale valore di T abbiamo: $T = -0.35 \pm 1.1$, quindi l'errore relativo di T sarebbe:

$$\left|\frac{\Delta T}{\bar{T}}\right| = \left|\frac{1.1}{0.35}\right| \cong 3.14 = \frac{314}{100} = 314\ \% \quad !$$

Quindi ad un'incertezza del 10% sul valore di k NON corrisponde un'incertezza del 10% sul valore della temperatura T del blocco di ghiaccio all'istante in cui raggiunge il camion frigorifero.

L'azienda solitamente adopera, per contenere l'acqua necessaria a produrre un singolo blocco di ghiaccio, un recipiente cilindrico, con raggio della base eguale a 1.5 dm, e altezza eguale a 2 dm.

4) *sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del 9,05%, stabilisci se il suddetto recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto e, in tal caso, a quale altezza dal fondo del recipiente arriverà l'acqua.*

Sappiamo che il volume del blocco di ghiaccio, che è un cubo di lato $b = \sqrt[3]{10}\ dm$, è:

$$V(blocco\ ghiaccio) = b^3 = 10\ dm^3$$
$$V(recipiente) = \pi R^2 h = \pi \cdot (1.5)^2 \cdot 2\ \ dm^3 \cong 14.137\ dm^3$$

Detto poi V_a il volume dell'acqua necessaria per ottenere il blocco di ghiaccio, si ha:

$$V_a + \frac{9.05}{100} \cdot V_a = 10\,, \qquad da\ cui: \frac{109.05}{100} V_a = 10, \quad V_a = \frac{1000}{109.05} \cong 9.170\ dm^3$$

Quindi l'acqua necessaria per ottenere il blocco di ghiaccio è di $9.170\ dm^3$, inferiore alla capacità del contenitore che è di $14.137\ dm^3$:

quindi il recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto.

Dobbiamo ora trovare l'altezza del cilindro ottenuto dal recipiente riempito con $9.170\ \ dm^3$ di acqua.

Essendo $V_a = 9.170\ dm^3 = \pi R^2 h = \pi (1.5)^2 \cdot h\ \ dm^3 = 9.170\ \ dm^3$:

$$h = \frac{9.170}{\pi (1.5)^2}\, dm \cong 1.3\ \ dm.$$

L'altezza dal fondo del recipiente è di circa 1.3 dm.

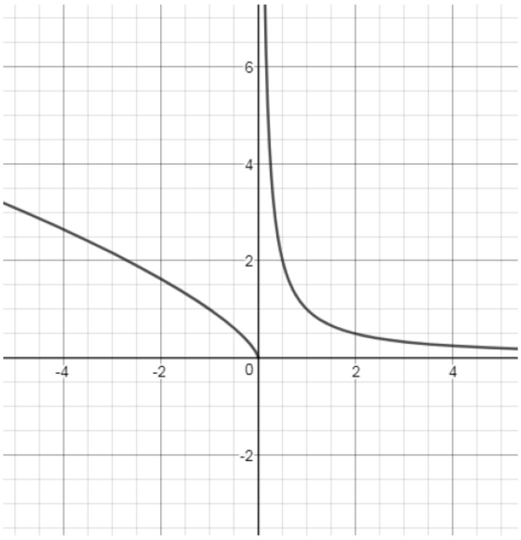
Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri

SECONDA PROVA SCRITTA – ESEMPIO MINISTERIALE DICEMBRE 2018

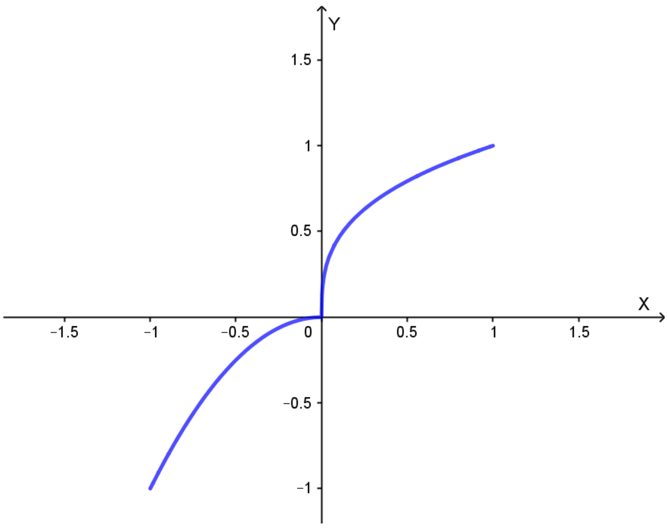
Tema di MATEMATICA - QUESTIONARIO

Q 1

In figura è riportato il grafico della funzione $f'(x)$, derivata della funzione $f(x)$. Il grafico presenta un asintoto verticale per $x = 0$. Supponendo che la funzione f sia definita in $\mathbb{R}$, descrivi la derivabilità della funzione nel punto di ascissa nulla e fornisci un grafico probabile della funzione in un intorno di zero.



Risulta: $f'_+(0) = +\infty$ ed $f'_-(0) = 0^+$: quindi la funzione non è derivabile in x=0, dove c'è un punto angoloso.
Osserviamo che la derivata è positiva per ogni $x \neq 0$, quindi la funzione è sempre crescente.
Inoltre f' è decrescente, quindi $f'' < 0$ (per x diverso da 0): il grafico di f ha la concavità verso il basso:



Q 2

Individua il valore di k per cui la tangente nell'origine al grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x-k}$$

forma un angolo di $\pi/6$ radianti con l'asse delle ascisse.

Calcoliamo la derivata prima della funzione: $f'(x) = \frac{x-k-x}{(x-k)^2} = \frac{-k}{(x-k)^2}$; $f'(0) = -\frac{1}{k}$

Ma $f'(0) = tg(\alpha)$, essendo α l'angolo formato dalla tangente con l'asse x.

Deve quindi essere:

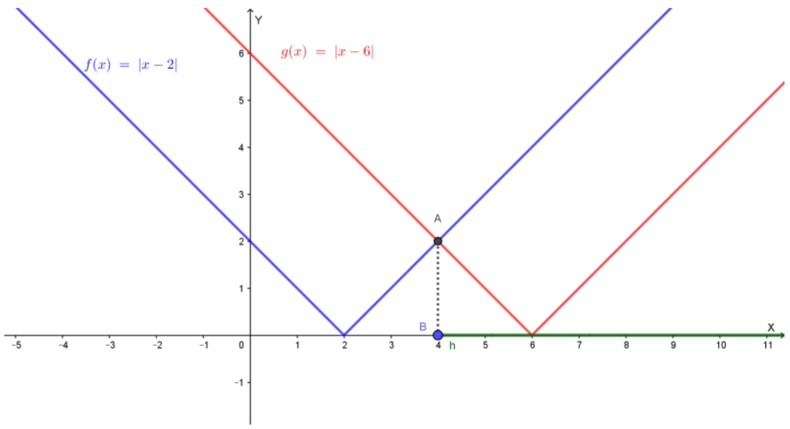
$tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{k}$, $da\ cui$: $k = -\sqrt{3}$.

Q 3

Risolvi esclusivamente per via grafica la disequazione:

$$|x-2| > |x-6|$$

Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano le funzioni: $f(x) = |x-2|$ e $g(x) = |x-6|$



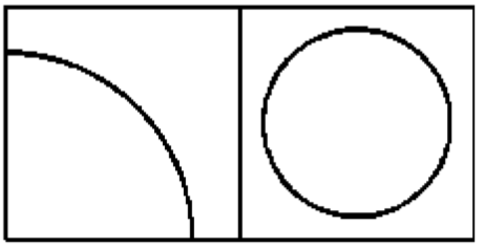
La disequazione è verificata per i valori di x tali che il grafico di f stia sopra il grafico di g:

$$x > x_A: \qquad x > 4.$$

Per trovare x_A: $\begin{cases} y = x-2 \\ y = -x+6 \end{cases}$: $x-2 = -x+6$, $x = 4$.

Q 4

Il cerchio di raggio R centrato nel vertice in basso a sinistra del quadrato in figura ne ricopre metà della superficie; il cerchio di raggio r centrato nel centro del quadrato ne occupa metà della superficie. Sapendo che i quadrati sono equivalenti, determina il rapporto R/r.



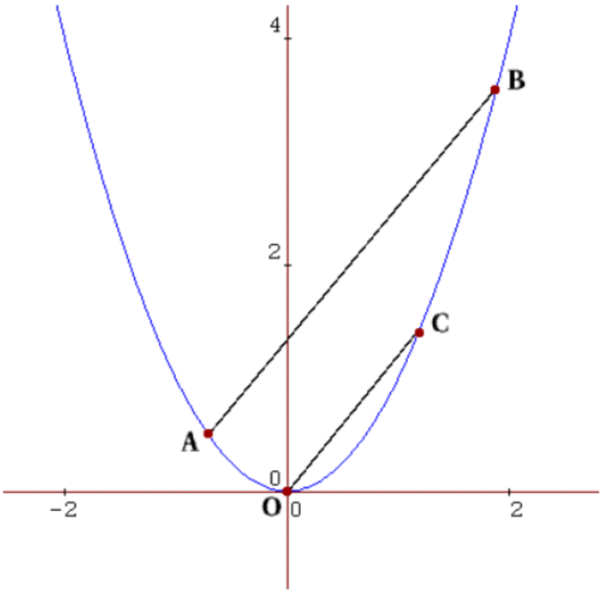
Detto L il lato dei due quadrati e C_1 e C_2 i cerchi di raggi R ed r rispettivamente, si ha:

$Area(C_1) = \pi R^2$, $Area(C_2) = \pi r^2$. Dette S_1 ed S_2 le aree delle due parti occupate dai cerchi nei due quadrati, si ha:

$$S_1 = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{2}L^2 \,; \quad S_2 = \pi r^2 = \frac{1}{2}L^2 \,, \qquad quindi: \ \frac{1}{4}\pi R^2 = \pi r^2 \,, \qquad \frac{1}{4}R^2 = r^2 \,: \ \frac{R}{r} = 2$$

Q 5

Presi due punti $A(a, a^2)$ e $B(b, b^2)$ sulla parabola $y = x^2$, traccia la retta OC, parallela alla retta AB e passante per l'origine e per il punto $C(c, c^2)$.



Dimostra che $a + b = c$.

Traccia un'altra parallela *DE*, passante per due punti *D* ed *E* appartenenti alla parabola, e mostra che i punti medi delle tre parallele giacciono su una retta.

Calcoliamo i coefficienti angolare delle rette AB e OC ed uguagliamoli:

$$m_{AB}=\frac{b^2-a^2}{b-a}\ ,\qquad m_{OC}=\frac{c^2}{c}:\quad \frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{c^2}{c}\ ,\qquad b+a=c\ \ (con\ b\neq a\ \ e\ \ c\neq 0)$$

Sia ora $D=(d;d^2)\ e\ \ E=(e;e^2)$.
In base a quanto dimostrato sopra, risulta: $d+e=c=a+b$.
Calcoliamo i punti medi M, N e P dei tre segmenti AB, OC e DE:

$$M=\left(\frac{a+b}{2};\frac{a^2+b^2}{2}\right),\qquad N=\left(\frac{c}{2};\frac{c^2}{2}\right),\qquad P=\left(\frac{d+e}{2};\frac{d^2+e^2}{2}\right).$$

Siccome $a+b=d+e=c,\ \ risulta: \frac{a+b}{2}=\frac{d+e}{2}=\frac{c}{2}$, quindi i punti M, N e P appartengono alla stessa retta $x=\frac{c}{2}$.

Q 6

Il grafico della funzione polinomiale cubica $y=f(x)$ intercetta l'asse x nei punti di ascissa 10, 100 e 1000. È sufficiente questa informazione per individuare le coordinate del punto di flesso? Se sì, determinale. Se no, spiega per quale motivo.

La funzione ha equazione del tipo:

$$y=f(x)=a(x-10)(x-100)(x-1000)$$

Ricordiamo che ogni cubica ha uno ed un solo flesso, ottenuto annullando la derivata seconda:
$f'(x)=a(x-100)(x-1000)+a(x-10)(x-1000)+a(x-10)(x-100)=$
$=a(3x^2-2220x+111000)$
$f''(x)=a(6x-2220)=0\ \ se\ \ x=\frac{2220}{6}=370$
L'ascissa del punto di flesso è indipendente da a, ma l'ordinata, f(370), dipende da a:
le informazioni date non sono sufficienti per individuare le coordinate del punto di flesso.

Q 7

Una sfera, il cui centro è il punto $K(1,0,1)$, è tangente al piano Π avente equazione $x-2y+z+1=0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

Il punto di tangenza T si ottiene intersecando la normale al piano tangente con la perpendicolare n ad esso condotta dal centro della sfera. La normale al piano di equazione $x-2y+z+1=0$ ha parametri direttori (1, -2, 1). Quindi:

$$n: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Intersecando n con il piano tangente abbiamo:

$1 + t - 2(-2t) + (1 + t) + 1 = 0, \;\; 6t = -3 \,, \qquad t = -\dfrac{1}{2}$

Sostituendo in n otteniamo il punto di tangenza: $T = \left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$

Il raggio R della sfera può essere calcolato come distanza del centro dal piano tangente, oppure come distanza tra K e T:

$$R = KT = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (0-1)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = R$$

Come distanza di K dal piano tangente:

$$R = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 - 0 + 1 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = R$$

Q 8

Se si lancia una moneta 2 volte, la probabilità di ottenere una testa e una croce (in qualsiasi ordine) è pari al 50%. Se la moneta viene lanciata 4 volte, la probabilità di ottenere due teste e due croci, in qualsiasi ordine, è ancora pari al 50%? Motiva la tua risposta.

La probabilità di ottenere una testa ed una croce (a prescindere dall'ordine) lanciando due volte una moneta (non truccata) è data da:

$p(TC) + p(CT) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 50\ \%$. Utilizzando la distribuzione binomiale (n=2 prove, k=1 successo con probabilità ½ , l'uscita della T in 1 lancio):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Se la moneta viene lanciata 4 volte, la probabilità di ottenere due teste e due croci è:

$$p(TTCC) + p(TCTC) + p(TCCT) + p(CTTC) + p(CTCT) + p(CCTT) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{2}$$

Utilizzando la distribuzione binomiale (n=4, k=2: 2volte T, p=1/2):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Quindi se la moneta viene lanciata 4 volte la probabilità di ottenere due teste e due croci non è ancora pari al 50 %.

Con la collaborazione di Angela Santamaria