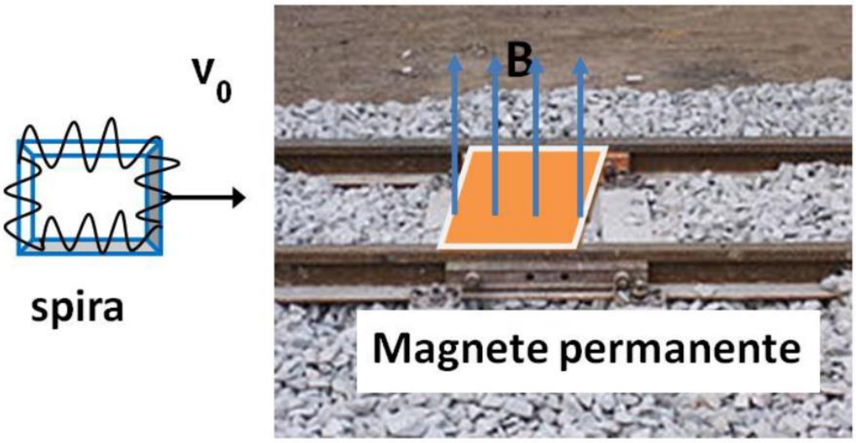
SECONDA PROVA SCRITTA – ESEMPIO MINISTERIALE DICEMBRE 2018

Tema di MATEMATICA E FISICA

PROBLEMA 1

Hai giocato con il tuo fratellino con un trenino elettrico da lui ricevuto in regalo per il compleanno. Osservandolo, più volte ti sei chiesto quale sia il principio di funzionamento delle varie parti. In particolare hai osservato che quando un vagone viene immesso in un binario morto, nei pressi del respingente finale il vagone subisce un forte rallentamento fino quasi a fermarsi; questo consente al vagone di raggiungere il respingente finale con velocità molto bassa e quindi di colpirlo senza conseguenze. Per capire il funzionamento di questo freno, hai analizzato in dettaglio il binario morto e un vagone; hai notato che sulla parte finale del binario morto è presente un piccolo magnete permanente di forma quadrata di lato $L = 5{,}0cm$ fissato tra le due rotaie del binario. Inoltre sul fondo del vagone è presente una cornice quadrata di dimensione uguale al magnete su cui è avvolto un filo a formare una spira quadrata di resistenza elettrica $R = 0{,}020\Omega$. Analizzando il moto del vagone hai compreso che quando il vagone passa sopra il magnete, anche la spira passa sopra il magnete (come mostrato in figura) e che in questo passaggio il vagone rallenta.



1)

Spiega qualitativamente l'origine della azione frenante dovuta al passaggio della spira sopra al magnete.

Il campo magnetico permanente produce nella spira una corrente indotta (per effetto della variazione del flusso attraverso la spira quadrata), il cui verso è tale da opporsi alla causa che l'ha prodotta (variazione del flusso attraverso la spira). Siccome il flusso attraverso la spira quadrata tende ad aumentare man mano che essa penetra nel campo magnetico permanente, la corrente indotta ostacola (per la legge di Lenz) tale aumento, producendo quindi un rallentamento del treno.

Osserviamo che la corrente indotta produce un campo magnetico (campo magnetico indotto) che, sempre per la legge di Lenz, ha verso tale da ostacolare la causa che l'ha prodotto.

2)

Assumendo che il magnete permanente generi sopra di sé un campo magnetico $B = 0{,}85T$ uniforme, perpendicolare al magnete stesso (e quindi anche alla spira) e trascurando tutti gli effetti di bordo, dimostra che l'equazione del moto della spira durante il passaggio sul magnete è:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2}{R}v$$

dove $m = 50g$ è la massa del vagone.

Indicando con dx il tratto della spira quadrata immerso nel campo permanente all'istante dt, dopo questo istante la superficie S della spira interna al campo magnetico permanente è Ldx. Indicata con i la corrente indotta, e ricordando che nel tratto di circuito di lunghezza L il campo B produce una forza pari a BiL, risulta: $F = ma = m\frac{dv}{dt} = BiL$. Detta f la forza elettromotrice indotta, si ha:

$$f = -\frac{d\Phi(B)}{dt} \quad ; \quad d\Phi(B) = B(dS) = B(Ldx)\,; \quad f = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{BLdx}{dt} = -BLv$$

Ma è:

$i = \frac{f}{R}$, $quindi;$ $m\frac{dv}{dt} = BiL = BL\frac{f}{R} = \frac{BL}{R}(-BLv) = -\frac{B^2L^2}{R}\,v$.

Risulta quindi dimostrato che: $m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2}{R}\,v$ (*)

3)

Verifica che l'equazione del moto ha come soluzione $v = v_0e^{-t/\tau}$ dove v_0 è la velocità del vagone (e quindi della spira) quando entra nel campo del magnete permanente, esprimendo la costante τ in termini delle altre grandezze presenti nell'equazione del moto e calcolandone il valore numerico.

Per trovare l'equazione del moto dobbiamo risolvere l'equazione differenziale (*) che riscriviamo nella forma seguente:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2L^2}{m\,R}\,dt$$

Integrando membro a membro abbiamo:

$$ln|v| = -\frac{B^2L^2}{m\,R}\,t + K\,, \quad |v| = e^{-\frac{B^2L^2}{m\,R}t+K} = e^Ke^{-\frac{B^2L^2}{m\,R}t}\,, \quad v = H\,e^{-\frac{B^2L^2}{m\,R}t} \quad (H = \pm e^K)$$

Siccome per $t = 0$ $risulta\ v = v_0\,,\ abbiamo\colon\ v_0 = H\,,\ quindi,\ posto\ \tau = \frac{m\,R}{B^2L^2}$:

$$v = v_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (**)\ , \qquad con \quad \tau = \frac{m\,R}{B^2L^2}$$

Calcoliamo il valore numerico di τ (che ha le dimensioni di un tempo, come si può dedurre dalla (**), dovendo essere $\frac{t}{\tau}$ un numero puro:

$$\tau = \frac{m\,R}{B^2L^2} = \frac{(50\,g)(0.020\,\Omega)}{(0.85\,T)^2(5.0\,cm)^2} = \frac{(5\cdot 10^{-2}kg)(20\cdot 10^{-3}\,\Omega)}{0.7225\,T^2\,(25\cdot 10^{-4}m^2)} = \frac{10^{-3}}{1.81\cdot 10^{-3}}\ s \cong 0.55\ s$$

Quindi: $\tau = 0.55\ s$.

4)

Assumendo per la velocità iniziale il valore $v_0 = 0{,}20\ {}^{m}/_{s}$, determina il tempo che la spira impiega ad attraversare completamente il magnete e la velocità che essa ha dopo aver attraversato il magnete.

Osserviamo che $v = \frac{dx}{dt}$, quindi: $dx = vdt = v_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}\, dt$ e integrando membro a membro:

$$x = \int v_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}\, dt = -v_0\tau \int -\frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{t}{\tau}}\, dt = -v_0\tau\, e^{-\frac{t}{\tau}} + A$$

Essendo x=0 per t=0 risulta: $0 = -v_0\tau + A$, $A = v_0\tau$, quindi l'equazione del moto è:

$$x = -v_0\tau\, e^{-\frac{t}{\tau}} + A = -v_0\tau\, e^{-\frac{t}{\tau}} + v_0\tau = v_0\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = x(t)$$

La spira attraversa completamente il magnete quando x=2L, quindi:

$$2L = v_0\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right);\ \frac{2L}{v_0\tau} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\,, \qquad e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{2L}{v_0\tau};\ \ e^{-\frac{t}{0.55}} = 1 - \frac{2\cdot 0.05}{0.20\cdot 0.55} = 0.09\,,$$

$$-\frac{t}{\tau} = ln(0.09)\,, \qquad t = -\tau\, ln(0.09) = (-0.55\, ln(0.09))\ s = 1.32\ \ s\ .$$

Il tempo che impiega la spira per attraversare completamente il magnete è quindi t=1.32 s .

Calcoliamo la velocità che ha la spira dopo aver attraversato completamente il magnete, cioè la velocità all'stante t=1.32 s, sostituendo tale tempo nella $v = v_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$:

$$v = (0.20\ m/s)\, e^{-\frac{1.32}{0.55}} = 0.02\ m/s\ .$$

5)

Dimostra che se la velocità iniziale v_0 è inferiore ad un valore limite, la spira non riesce a superare il magnete permanente: in queste condizioni il freno agisce come un blocco insormontabile per il vagone. Determina il valore numerico della velocità limite.

Dalla legge oraria del moto $v_0\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=x(t)$ deduciamo che se $t\to+\infty$, $x\to v_0\tau$
Uguagliando tale valore a 2L troviamo il valore limite di v_0:

$$v_0\,\tau=2L,\qquad v_0=\frac{2L}{\tau}=\frac{2\cdot 0.05\,m}{0.55\,s}=0.18\ m/s$$

Se la velocità iniziale è inferiore a 0.18 m/s (valore della velocità limite) la spira non riesce a superare il magnete.

Facciamo un esempio con $v_0=0.10\frac{m}{s}$.
Troviamo il tempo necessario per attraversare completamente il campo magnetico permanente ragionando come nel punto 4):

La spira attraversa completamente il magnete quando $x=2L$, quindi:

$$2L=v_0\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right);\ \frac{2L}{v_0\tau}=1-e^{-\frac{t}{\tau}},\qquad e^{-\frac{t}{\tau}}=1-\frac{2L}{v_0\tau};\ \ e^{-\frac{t}{0.55}}=1-\frac{0.1}{0.10\cdot 0.55}=-0.8,$$
che è impossibile.

Osserviamo che deve essere:

$$1-\frac{2L}{v_0\tau}>0,\ \ 1>\frac{2L}{v_0\tau},\ \ v_0>\frac{2L}{\tau},\ \ quindi\ v_0>\frac{0.1\,m}{0.55\,s}\cong 0.18\ m/s$$ come già detto.

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri

SECONDA PROVA SCRITTA – ESEMPIO MINISTERIALE DICEMBRE 2018

Tema di MATEMATICA E FISICA

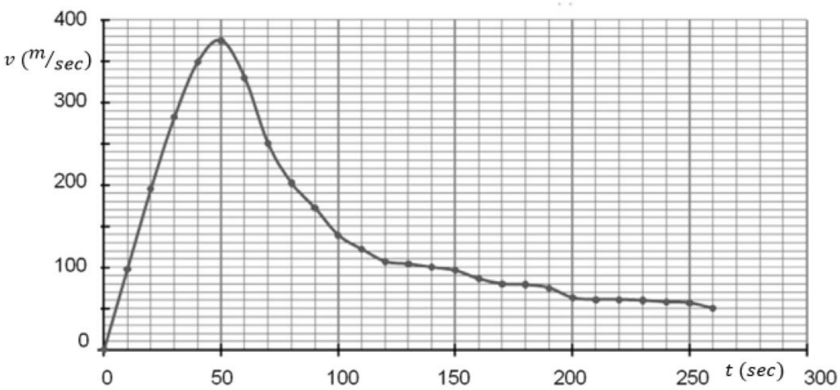
PROBLEMA 2

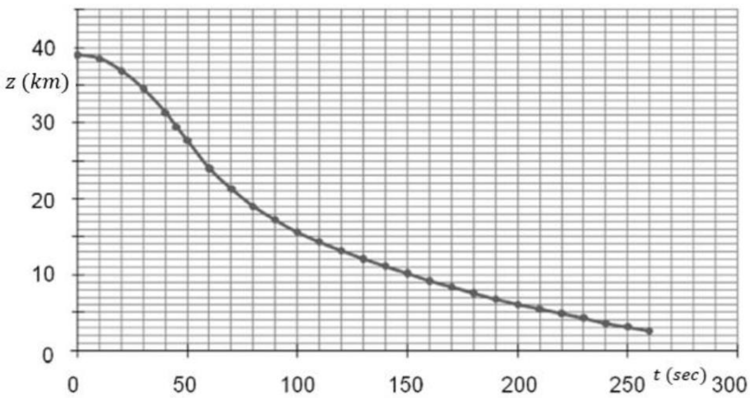
Il 14 ottobre 2012 Felix Baumgartner ha realizzato un lancio storico ottenendo tre record mondiali:

- la maggiore altezza raggiunta da un uomo in una ascesa con un pallone (39045 m);
- il lancio più alto in caduta libera;
- la più alta velocità in caduta libera (1341,9 km/h).

Dopo l'ascesa in un pallone gonfiato a elio, si è lanciato verso la Terra, protetto da una tuta speciale, e ha aperto il suo paracadute dopo 4 minuti e 20 secondi di caduta libera. Il lancio è durato in totale 9 minuti e 3 secondi.

Nelle figure seguenti sono riportati gli andamenti della velocità e della quota di Baumgartner durante il lancio, a partire dall'istante del lancio $t = 0$.





Per realizzare l'ascesa è stato necessario utilizzare un enorme pallone deformabile: ciò per fare in modo che all'aumentare della quota e al diminuire della densità dell'aria il volume del pallone possa aumentare, mantenendo così costante la spinta verso l'alto (spinta di Archimede). Su un giornale veniva riportato "*Per assicurare una velocità d'ascesa sufficiente la spinta verso l'alto era circa doppia di quella necessaria per tenere in equilibrio il sistema. In pratica, aggiungendo alla massa di Baumgartner quella del pallone riempito ad elio, era necessario sollevare una massa di circa 3 tonnellate*". La massa di Baumgartner e della sua tuta è pari a circa 120 kg.

Fase di ascesa

1)

Disegna il diagramma delle forze subito dopo il decollo, trascurando la forza di attrito. Non è necessario che il disegno sia in scala, deve però essere coerente con la situazione fisica.

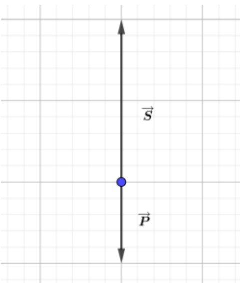
La forza peso del sistema è diretta verso il basso ed ha intensità P pari a ($mg = 3000 \cdot g$) N:

$P = 3000 \cdot 9.8\ N = 29400\ N$

La spinta verso l'alto necessaria per mantenere in equilibrio il sistema è una forza diretta verso l'alto di intensità pari a quella di P. La spinta S applicata è doppia di tale valore, quindi:

$S = 58800\ N$

Diagramma delle forze subito dopo il decollo (S spinta, P peso del sistema):



2)

Dopo qualche minuto di ascensione il moto può essere considerato rettilineo uniforme. In questa situazione, calcola approssimativamente il valore della forza di attrito con l'aria.

Se il moto è rettilineo uniforme vuol dire che la spinta S ha modulo pari al peso P del sistema più la forza d'attrito F_A (diretta verso il basso):

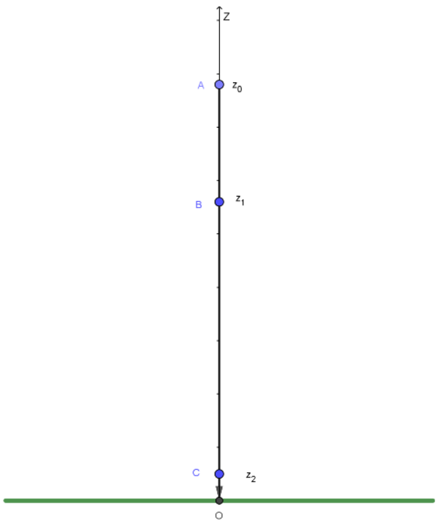
$P + F_A = S\ ,\quad F_A = S - P = P = 29400\ N$

Notiamo che consideriamo il peso costante, anche se, diminuendo g all'aumentare dell'altitudine, esso diminuisce seppur di poco.

Fase di lancio

Scegli un sistema di riferimento e studia la caduta verticale del sistema S costituito da Baumgartner e dalla tuta. In questa fase, si può ritenere trascurabile l'effetto della spinta di Archimede.

Fissiamo un sistema di riferimento con l'origine O nel punto di atterraggio, e l'asse z diretto verso l'alto:



Dai dati forniti e dai due grafici deduciamo:

A=posizione di lancio, t=0, v=0,
$z_0 = 39045\ m \ \cong 39\ km$

B=posizione dopo 50 s, $z_1 = 28\ km$

$$v = 1341{,}9\ \frac{km}{h} = \frac{1391{,}9}{3.6}\ \frac{m}{s} \cong 373\ m/s$$

C=posizione dopo 260 s, v=50 m/s,
$z_2 = 2.5\ km$

Dopo 50 secondi si raggiunge la velocità massima (circa 373 m/s) all'altezza dal suolo di circa 28 km. Dopo 260 secondi si raggiunge la velocità di 50 m/s in caduta libera all'altezza di circa 2.5 km. Notiamo che aumentando la velocità aumenta la forza d'attrito. A questo punto si apre il paracadute. Dai due grafici si deduce che la velocità si mantiene abbastanza costante. Dopo 9 minuti e 3 secondi (543 secondi) Baumgartner raggiunge il suolo.

3)

Utilizzando i grafici, determina l'accelerazione di S per $t < 20\ s$ e commenta il risultato ottenuto.

Da 0 a 20 secondi la velocità passa da 0 m/s a circa 195 m/s, quindi si ha un'accelerazione:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{195\ m/s}{20\ s} \cong 9.75\,\frac{m}{s^2}\ .$$

Notiamo che il valore dell'accelerazione è più o meno uguale a quello dell'accelerazione di gravità, giustificabile dal fatto che l'attrito può essere trascurato all'altezza considerata, essendo l'aria molto rarefatta (ricordiamo che ad un'altezza h dalla Terra risulta: $g = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}$).

4)

Il sistema S ha raggiunto velocità supersoniche durante la caduta? Tieni presente la seguente tabella, che riporta la velocità del suono in aria ad altezze diverse:

Altezza (km)	10	20	30	40
Velocità del suono (m/s)	305	297	301	318

A 10 km di altezza ($t = 150$ secondi dal lancio) si ha $v = 100$ m/s : minore della velocità del suono.

A 20 km di altezza ($t \cong 75$ secondi dal lancio) si ha $v = 220$ m/s : minore della velocità del suono.

A 30 km di altezza ($t \cong 45$ secondi dal lancio) si ha $v \cong 370$ m/s : maggiore della velocità del suono.

Dai due grafici forniti di osserva che si raggiunge la velocità di circa 320 m/s (superiore alla massima velocità fornita pari a 318 m/s) dopo circa 35 s, ad un'altezza di circa 33 km. Fino a 60 secondi circa dal lancio si supera la velocità del suono, fino ad un'altezza di circa 24 km

Quindi il sistema S ha superato la velocità del suono per oltre 15 secondi.

5)

Calcola la variazione di energia meccanica ΔE_m tra il momento in cui Baumgartner salta e il momento in cui raggiunge la massima velocità; fornisci la tua interpretazione del risultato.

Osserviamo che, essendo in presenza di forze non conservative (la forza di attrito), la variazione di energia meccanica (pari al lavoro della forza d'attrito) sarà negativa.

In particolare si ha (supponiamo g costante, pari a 9.8 m/s e indichiamo con K l'energia cinetica e con U l'energia potenziale:

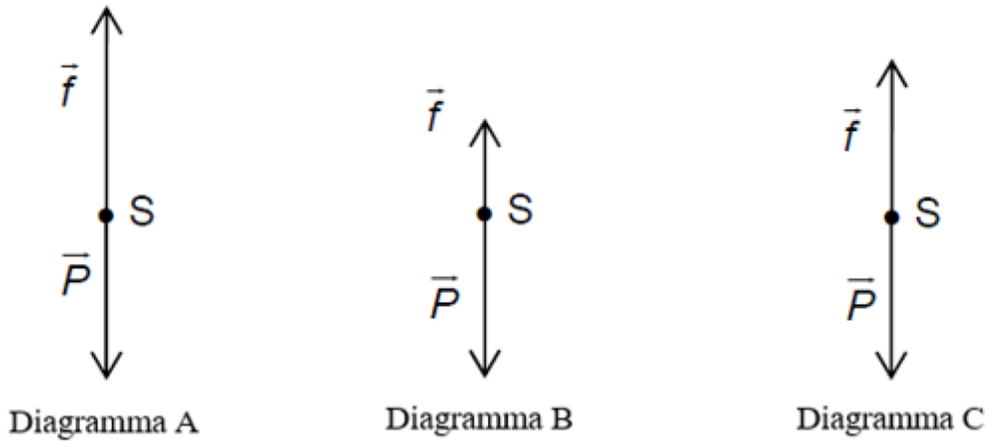
$$\Delta E_m = E_m(finale) - E_m(iniziale) = \left(K_f + U_f\right) - (K_i + U_i) = K(t = 50\ s) + U(t = 50\ s) -$$

$$-\left(K(t=0) + U(t=0)\right) = \frac{1}{2}mv^2 + mgz_1 - (0 + mgz_0) = \frac{1}{2}(120\ kg)\left(373\frac{m}{s}\right)^2 +$$

$$+120\ kg\ \left(9.8\frac{m}{s^2}\right)(28000\ m) - 120\ kg\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)(39045\ m) = \cdots = -4.6 \cdot 10^6 J = E_m$$

6)

Nella figura seguente vengono riportati i diagrammi delle forze applicate al sistema S durante la fase di lancio. $\vec{P}$ rappresenta la forza peso e $\vec{f}$ la forza di attrito con l'aria. Poni in corrispondenza i diagrammi con i tre istanti $t_1 = 40s, t_2 = 50s, t_3 = 60s$.



Risulta:

A) f>P: dopo aver raggiunto la velocità massima; t=60 s.
B) f<P: t= 40 s .
C) f=P: quando si raggiunge la velocità massima; t=50 s.

7)

Determina a quale altitudine Baumgartner ha aperto il paracadute. Ricordando che il lancio è durato in totale 9 minuti e 3 secondi, calcola la velocità media di discesa dopo l'apertura del paracadute, fino all'arrivo al suolo. Ti appare ragionevole considerare il moto in quest'ultima fase come un moto rettilineo uniforme?

Il paracadute viene aperto dopo 260 s (v=50 m/s), all'altezza $z_2 = 2.5\ km$.
Dopo l'apertura del paracadute la velocità può essere considerata costante (forza peso e forza d'attrito sono praticamente uguali) quindi è ragionevole considerare il moto rettilineo uniforme in questa fase.

La velocità media, dall'apertura del paracadute fino all'arrivo al suolo è quindi:

$$v_M = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2500\ m}{543\ s - 260s} = \frac{2500}{283} \frac{m}{s} \cong 8.8 \frac{m}{s} = v_M$$

8)

Per valutare il rischio di traumi derivanti dall'impatto dell'arrivo al suolo, fornisci una stima dell'altezza da cui Baumgartner sarebbe dovuto saltare, senza paracadute, per giungere al suolo con la stessa velocità.

Dobbiamo trovare l'altezza da cui dovrebbe saltare Baumgartner per giungere al suolo, in caduta libera, con una velocità di 8.8 m/s .

Ricordiamo che la velocità con cui un corpo, partendo da fermo, arriva al suolo cadendo da un'altezza h con accelerazione g è data da:

$$v = \sqrt{2gh}\,, \quad h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(8.8\ m/s)^2}{19.6\ m/s^2} \cong 4\ m$$

Per giungere al suolo in caduta libera con la stessa velocità con cui giunge al suolo col paracadute Baumgartner dovrebbe saltare da un'altezza di 4 m.

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri

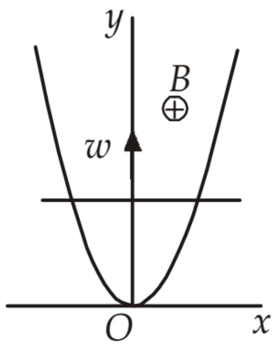
SECONDA PROVA SCRITTA – ESEMPIO MINISTERIALE DICEMBRE 2018

Tema di MATEMATICA – FISICA

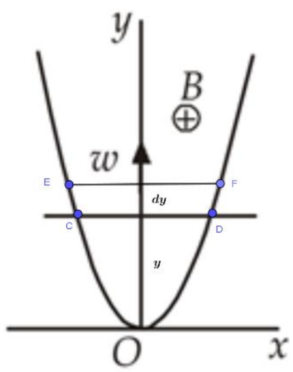
QUESTIONARIO

Q 1

Una spira a forma di parabola di equazione $y = ax^2$ è immersa in un campo magnetico uniforme B perpendicolare al piano xy della parabola. All'istante $t = 0$ una barretta inizia a traslare lungo la parabola partendo dal suo vertice con accelerazione costante come indicato in figura. Determinare la forza elettromotrice indotta sulla spira in funzione della y.



Indichiamo con y la distanza dall'origine della barretta e con dy lo spazio percorso dalla barretta nel tempo dt; l'ascissa di D passa da x a x+dx. L barretta passa dalla lunghezza CD alla lunghezza EF, e risulta ($dS = area\ spazzata\ dalla\ barretta$):



$CD = 2x\ ,\ \ dS \cong CD \cdot dy = 2x\ dy$. In modo più rigoroso:

$EF = 2(x + dx), \qquad dy = 2axdx$

Calcoliamo le aree $S_1\ \ ed\ \ S_2$ dei segmenti parabolici OCD e OEF:

$$S_1 = \frac{2}{3}CDy = \frac{4}{3}xy\ \ ,\ \ S_2 = \frac{4}{3}(x + dx)(y + dy)$$

$$S_2 - S_1 = \frac{4}{3}(x + dx)(y + dy) - \frac{4}{3}xy =$$

$$= \frac{4}{3}(xdy + ydx + dxdy) \cong \frac{4}{3}(xdy + ydx) =$$

$$= \frac{4}{3}\left(xdy + y\frac{dy}{2ax}\right) = \frac{4}{3}\left(xdy + ax^2\frac{dy}{2ax}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}xdy\right) =$$

$$= 2xdy = dS$$

$(N.B.:\ dxdy$ è $trascurabile)$. Quindi (detta $v = \sqrt{2\omega y}$ la velocità della barretta in funzione dell'accelerazione e dello spazio percorso):

$$fem = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{B(ds)}{dt} = -\frac{B(2xdy)}{dt} = -2Bxv = -2B\sqrt{\frac{y}{a}}\sqrt{2\omega y} = -2By\left(\sqrt{\frac{2\omega}{a}}\right)$$

La forza elettromotrice indotta sulla spira in funzione di y è:

$$fem = -2By\left(\sqrt{\frac{2\omega}{a}}\right)$$

Q 2

La posizione di una particella varia con il tempo secondo l'equazione:

$x = \alpha t(1-\beta t)$, dove α e β sono due costanti, con $\beta > 0$.

Determina:

a) la velocità e l'accelerazione della particella in funzione del tempo;

b) l'intervallo di tempo necessario alla particella, che parte dall'origine, per ritornare nell'origine e lo spazio percorso in questo intervallo di tempo.

a)

$v = x'(t) = \alpha(1-\beta t) + at(-\beta) = \alpha - 2\alpha\beta t = v(t)$

$a = x''(t) = -2\alpha\beta = a(t)$

b)

Risulta $x = 0 \;\; se \;\; t = 0 \;\; oppure \; t = \frac{1}{\beta}$.

Quindi il tempo necessario per ritornare nell'origine, partendo dall'origine è $t = \frac{1}{\beta}$, che è il doppio del tempo $t = 1/2\beta$ in cui la velocità si annulla per poi tornare indietro.

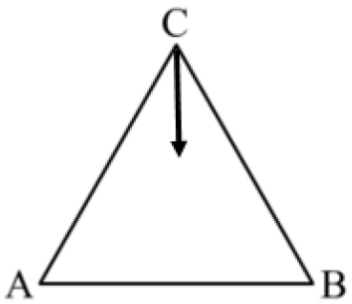
Lo spazio percorso in tale intervallo di tempo è: $2\left[x\left(\frac{1}{2\beta}\right)\right] = 2\left[\alpha \cdot \frac{1}{2\beta}\left(1-\beta \cdot \frac{1}{2\beta}\right)\right] = \frac{\alpha}{2\beta}$

Q 3

Tre cariche puntiformi di valore q sono poste ai vertici del triangolo equilatero ABC, i cui lati misurano 1m.

a) Determina l'energia potenziale del sistema.

b) La carica collocata in C viene spostata verso il segmento AB lungo la perpendicolare ad AB; traccia il grafico dell'andamento dell'energia potenziale del sistema in funzione della distanza della carica dal segmento AB.



a)

L'energia potenziale di una carica q posta in un punto P a distanza R da una seconda carica Q è data da:

$U_P = k\frac{Qq}{R} \qquad (con\ k = 9 \cdot 10^9\ N \cdot \frac{m^2}{C^2}\ ,\ \ costante\ di\ Coulomb)$

Ad ogni coppia di cariche q e Q (poste in due punti A e B a distanza R) corrisponde quindi un'energia potenziale elettrica data da: $U = k\frac{Qq}{R}$.

Quindi, tenendo presente che le cariche in A e B (distanti 1 m da C) sono uguali a q:

$U_{AB} = U_{AC} = U_{BC} = k\frac{qq}{1} = kq^2$:

$U(sistema) = U_{AB} + U_{AC} + U_{BC} = 3kq^2$

b)

Detta $x = CH$ la distanza di C quando la carica viene spostata verso il segmento AB lungo la perpendicolare ad AB, risulta: $CA = CB = \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4x^2}$

Quindi:

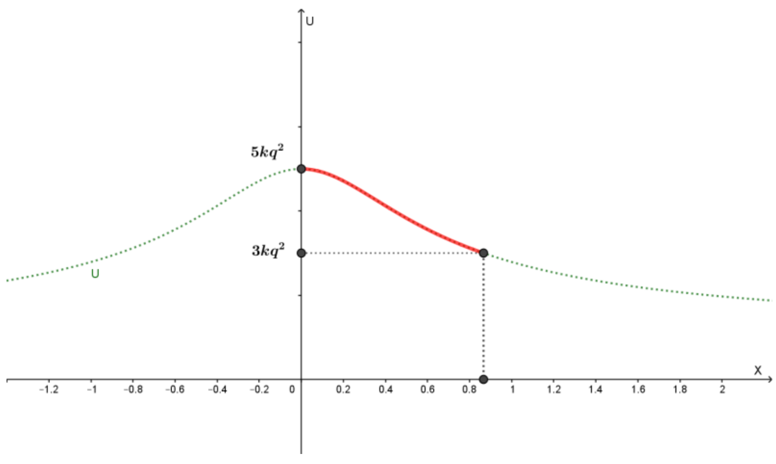
$U_{AC} = U_{BC} = \left(k\frac{qq}{\frac{1}{2}\sqrt{1+4x^2}}\right) = \frac{2kq^2}{\sqrt{1+4x^2}}$; $U_{AB} = \frac{kq^2}{1}$. Pertanto:

$U(sistema) = U_{CA} + U_{CB} + U_{AB} = \frac{4kq^2}{\sqrt{1+4x^2}} + kq^2; quindi:$

$U(x) = kq^2\left(1 + \frac{4}{\sqrt{1+4x^2}}\right), \qquad con\ \ 0 \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

Questa funzione è sempre positiva, vale $5kq^2$ se $x = 0$, è sempre decrescente (perché $\sqrt{1+4x^2}$ cresce al crescere di x), e vale $3kq^2$ se $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il grafico di U(x) è quindi del tipo:



Q 4

Un punto materiale si muove nel piano xy secondo la legge oraria:

$$x = a \cdot sen(\omega t), y = a(1 - cos(\omega t)),$$

con a e ω costanti positive. Determina la distanza del punto dall'origine al tempo $t = \tau$ e le direzioni dei vettori velocità e accelerazione all'istante $t = 0$.

Se $t = \tau$ il punto P in moto ha coordinate $P = (a\, sen(\omega\tau);\ a(1 - cos(\omega\tau))$. Quindi:

$$PO = \sqrt{(a\, sen(\omega\tau))^2 + (a(1 - cos(\omega\tau))^2} = \sqrt{2a^2 - 2a^2 cos(\omega\tau)} =$$

$$= a\sqrt{2 - 2cos(\omega\tau)} = 2a\, sen\frac{\omega\tau}{2} = PO$$

Determiniamo la velocità:

$$\begin{cases} v_x = x'(t) = a\omega cos(\omega t) \\ v_y = y'(t) = a\omega sen(\omega t) \end{cases} ; \quad v(0) = (a\omega; 0):\ direzione\ del\ semiasse\ x\ positivo$$

Determiniamo l'accelerazione:

$$\begin{cases} a_x = x''(t) = -a\omega^2 sen(\omega t) \\ v_y = y''(t) = a\omega^2 cos(\omega t) \end{cases} ; \quad a(0) = (0; a\omega^2):\ direzione\ del\ semiasse\ y\ positivo$$

N.B. La traiettoria del moto di P si ottiene eliminando il parametro t dalle equazioni parametriche del moto. Risulta:

$$\frac{x}{a} = sen(\omega t)\,, \qquad 1 - \frac{y}{a} = cos(\omega t):\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a} - 1\right)^2 = 1\ ,$$

$x^2 + (y - a)^2 = a^2$: circonferenza con centro in C=(0; a) e raggio R=a.

Q 5

Un elettrone si muove, partendo da fermo, in un campo elettrico uniforme di intensità $E = 10\, {}^{kV}/_{cm}$. Descrivi il procedimento che adotteresti per determinare l'istante in cui l'energia cinetica dell'elettrone sarà uguale alla sua energia a riposo.

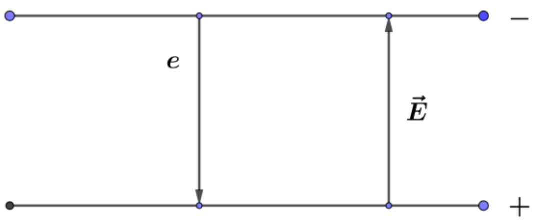
$$Energia\ a\ riposo = E_0 = m_0 c^2; \quad Energia\ cinetica\ relativistica = (\gamma - 1)m_0 c^2$$

dove $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Per il principio di conservazione dell'energia relativistica abbiamo:

$m_0c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2$, $se \quad \gamma = 2$, $\quad quindi: \ 2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $\quad 2 = \dfrac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}$,

$2\sqrt{c^2-v^2} = c$, $4(c^2-v^2) = c^2$, $4v^2 = 3c^2$, $\quad v = c\sqrt{\dfrac{3}{4}}$, $v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,c$

Per determinare l'stante in cui l'energia cinetica dell'elettrone è uguale alla sua energia a riposo applichiamo la seconda legge della dinamica (tenendo presente che la forza agente è $F = eE$ e ipotizzando che l'elettrone si muova, partendo da fermo, nella direzione del campo E ed in verso opposto):



$F = ma$, $\quad eE = ma = (m_0\gamma)a$, $\quad a = \dfrac{eE}{m_0\gamma}$, $v = at$, $\quad t = \dfrac{v}{a} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{\frac{eE}{m_0\gamma}} = \dfrac{\sqrt{3}cm_0\gamma}{2eE} = t$

Quindi (ricordiamo che $E = 10\,\frac{kV}{cm} = \frac{10^4 V}{10^{-2} m} = 10^6\ V/m$)

$$t = \frac{\sqrt{3}(3\cdot 10^8)(9.1\cdot 10^{-31})(2)}{2(1.6\cdot 10^{-19})(10^6)}\ s = \frac{3\sqrt{3}\cdot 9.1}{1.6}\cdot 10^{-10}\ s \cong 29.6\cdot 10^{-10}\ s = 3\cdot 10^{-9}\ s \cong t$$

Q 6

Quanto tempo impiegherà un'onda sonora a percorrere la distanza l tra i punti A e B se la temperatura dell'aria tra di essi varia linearmente da $T1$ a $T2$? Tieni presente che la velocità di propagazione nell'aria varia in funzione della temperatura secondo la legge:

$$v = a\sqrt{T}$$

dove a è una costante.

Siccome T varia linearmente rispetto alla posizione x (poniamo $x = 0$ in A e $x = l$ in B), risulta:

$T = T_1 + bx$, $\ con \ 0 \le x \le l$. $\ Ma\ se\ T = T_2$ è $x = l$, $\ quindi: \ b = \frac{T_2 - T_1}{l}$, perciò:

$$T = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{l}\right)x$$

Essendo $v = a\sqrt{T}$ risulta: $\frac{dx}{dt} = a\sqrt{T_1 + \left(\frac{T_2-T_1}{l}\right)x}$, $\frac{dx}{\sqrt{T_1+\left(\frac{T_2-T_1}{l}\right)x}} = adt$ e integrando:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{l}\right)x}} = \int a\, dt\ , \quad \frac{2l}{T_2 - T_1}\int \frac{\left(\frac{T_2 - T_1}{l}\right)dx}{2\left(\sqrt{T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{l}\right)x}\right)} = at + K\ ,$$

$$\frac{2l}{T_2 - T_1}\left(\sqrt{T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{l}\right)x}\right) = at + k\ .\ Ma\ per\ t = 0\ \text{è}\ x = 0, \qquad quindi: \frac{2l\sqrt{T_1}}{T_2 - T_1} = k$$

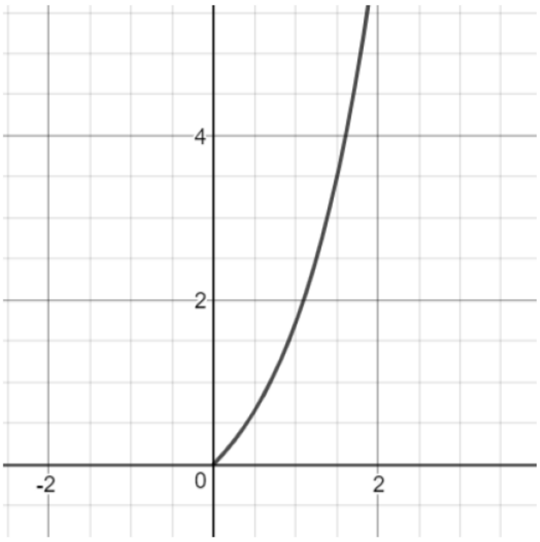
Perciò il tempo impiegato dall'onda a percorrere la distanza l è tale che:

$$\frac{2l}{T_2 - T_1}\left(\sqrt{T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{l}\right)l}\right) = at + \frac{2l\sqrt{T_1}}{T_2 - T_1}, \quad \frac{2l}{T_2 - T_1}\sqrt{T_2} - \frac{2l\sqrt{T_1}}{T_2 - T_1} = at\ , \qquad pertanto:$$

$$t = \frac{\frac{2l}{T_2 - T_1}\left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right)}{a} = \frac{2l\left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right)}{a(T_2 - T_1)} = \frac{2l}{a\left(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}\right)} = t$$

Q 7

Il grafico riportato nella figura seguente potrebbe rappresentare l'andamento della velocità con cui una carica puntiforme si allontana per repulsione elettrostatica da un'altra carica puntiforme, fissa, di eguale segno? Motiva la tua risposta.



Sia Q la carica fissa e q la carica che si allontana da Q (supponiamo che le cariche siano positive e che il mezzo sia il vuoto). Supponiamo poi che la carica Q sia fissa in O e che q si allontani nel verso positivo dell'asse x. La forza (repulsiva) esercitata da Q su q nella generica posizione x si ottiene da:

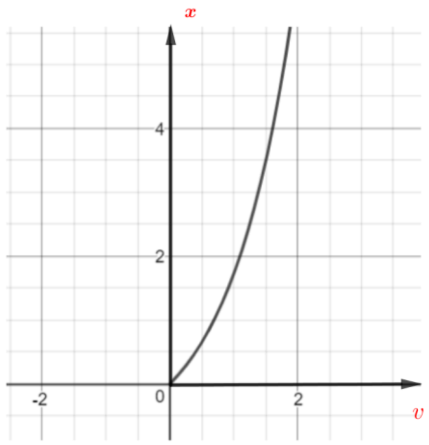
$$F = ma, \qquad \frac{KQq}{x^2} = ma \ , \ \ a = \frac{KQq}{mx^2} \ (*)$$

Supponendo che nella figura proposta la velocita sia l'ordinata e la distanza di q da Q sia l'ascissa, dal grafico deduciamo che per $x \to 2^-$ l'accelerazione (che corrispondente al coefficiente angolare della tangente al grafico della velocità) tende a $+\infty$, mentre dalla relazione (*) si ha che l'accelerazione tende a $\frac{KQq}{4m}$:

Il grafico NON può quindi rappresentare l'andamento della velocità di q (in funzione della distanza x dalla carica ferma Q).

N.B.

Se nella figura proposta consideriamo la velocità in ascissa e la distanza x di q da Q in ordinata, dal grafico deduciamo che se $x \to +\infty$ la velocità tende a 2 e ciò sarebbe possibile: a distanza infinita il moto tende ad essere uniforme.



Q 8

Un punto si muove lungo l'asse x secondo la legge:

$$x = a \cdot sen^2\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$$

con a costante positiva. Determina:

a) l'ampiezza e il periodo di oscillazione;

b) l'istante t in cui il punto raggiunge per la prima volta la massima distanza dall'origine.

a)

La legge oraria (utilizzando la formula di bisezione del seno: $sen^2 x = \frac{1-cos2x}{2}$) può essere riscritta nella seguente forma:

$$x = a\frac{1-cos\left(6t-\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}a\left(1-cos\left(6t-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}a(1-sen(6t) = -\frac{1}{2}a\cdot sen(6t)+\frac{1}{2}a$$

che rappresenta un moto periodico di ampiezza $A = \frac{1}{2}a$ e periodo $T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = T$.

b)

La massima distanza dall'origine si ha quando è massimo $x = \frac{1}{2}a(1-sen(6t))$, e ciò avviene quando $sen(6t) = -1$, $6t = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\ (con\ k \in Z)$,

$t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$, $e\ per\ k = 0\ otteniamo\ t = \frac{\pi}{4}$.

Il punto raggiunge per la prima volta la massima distanza dall'origine in $t = \frac{\pi}{4}\ s \cong 0.79\ s$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri