# SIMULAZIONE SECONDA PROVA SCRITTA – 28 FEBBRAIO 2019

## Tema di MATEMATICA e FISICA

## PROBLEMA 1

*Assegnate due costanti reali a e b (con $a > 0$), si consideri la funzione $q(t)$ così definita:*

$$q(t) = at \cdot e^{bt}$$

### 1)

*A seconda dei possibili valori di a e b, discutere se nel grafico della funzione $q$ è presente un punto di massimo o di minimo. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $q(t)$, in un piano cartesiano di coordinate $(t, y)$, ha un massimo nel punto $B\left(2, \frac{8}{e}\right)$.*

La funzione è definita, continua e derivabile su tutto R e risulta:
$q' = a\,e^{bt} + abt\,e^{bt} = a\,e^{bt}(1 + bt) \geq 0 \quad se\ 1 + bt \geq 0.$
Se $b = 0$: $\ q = at,\ non\ si\ hanno\ massimi\ e\ minimi$
Se $b > 0$: $q' \geq 0\ \ se\ \ t \geq\ -\frac{1}{b}$: la funzione è crescente per $t >\ -\frac{1}{b}$ e decrescente per $t <\ -\frac{1}{b}$
Quindi abbiamo un minimo per $t = -\frac{1}{b}$.
Se $b < 0$: $q' \geq 0\ \ se\ \ t \leq\ -\frac{1}{b}$: la funzione è crescente per $t <\ -\frac{1}{b}$ e decrescente per $t >\ -\frac{1}{b}$
Quindi abbiamo un massimo per $t = -\frac{1}{b}$.

Per avere un massimo in B deve essere $-\frac{1}{b} = 2$, $\ b = -\frac{1}{2}$. Imponendo il passaggio per B si ha:
$q(2) = \frac{8}{e} = 2a\,e^{-1} = \frac{2a}{e}\ :\quad a = 4\ .$

### 2)

*Assumendo, d'ora in avanti, di avere $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, studiare la funzione*

$$q(t) = 4t \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$

*verificando, in particolare, che si ha un flesso nel punto $F\left(4, \frac{16}{e^2}\right)$.*
*Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto F.*

Abbiamo già osservato che la funzione è definita, continua e derivabile su tutto R. Essa è positiva se t>o e negativa se t<0. Risulta q=0 solo se t=0. Calcoliamo i limiti:

$\lim_{t\to-\infty} 4t\cdot e^{-\frac{t}{2}} = -\infty$ $(non\ c'è\ asintoto\ obliquo)$, $\lim_{t\to+\infty} 4t\cdot e^{-\frac{t}{2}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{4t}{e^{\frac{t}{2}}} = 0^+$

(asintoto orizzontale q=0).

Studiamo la derivata prima: abbiamo già detto che se $b<0:\ \ q'\geq 0\ \ se\ \ t\leq -\frac{1}{b}$: la funzione è crescente per $t< -\frac{1}{b}$ e decrescente per $t> -\frac{1}{b}$. Quindi abbiamo un massimo per $t=-\frac{1}{b}$. Nel nostro caso $b=-\frac{1}{2}$, quindi punto di massi x=2: $B=\left(2;\ \frac{8}{e}\right)$.

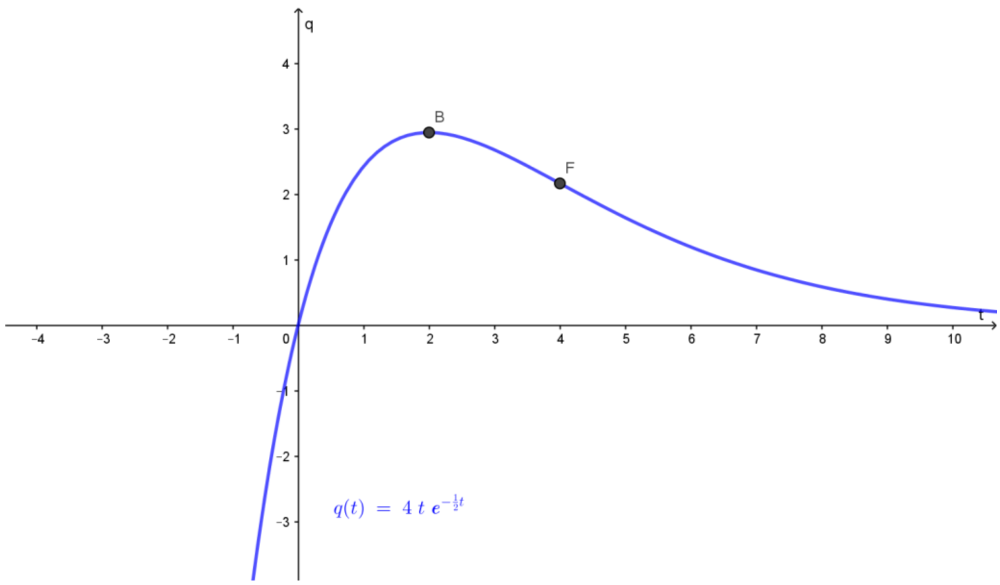
Studiamo la derivata seconda, notando che $q'=a\,e^{bt}(1+bt)=4\,e^{-\frac{1}{2}t}\left(1-\frac{1}{2}t\right)$.

$q''=-2\,e^{-\frac{1}{2}t}\left(1-\frac{1}{2}t\right)+4\,e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{1}{2}\right)=2\,e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{1}{2}t-2\right)\geq 0\ \ se\ \ t\geq 4$ : il grafico quindi volge la concavità verso l'alto per $t>4$ e verso il basso per $t<4$ : t= 4 punto di flesso.

Risulta:

$q(4)=\frac{16}{e^2}$ , $quindi\ abbiamo\ il\ flesso\ \ F=\left(4;\ \frac{16}{e^2}\right)$ .

Grafico:




Determiniamo la tangente nel punto di flesso. Risulta $q'(4)=-\frac{4}{e^2}$, quindi la tangente inflessionale ha equazione:

$q-\frac{16}{e^2}=-\frac{4}{e^2}(t-4)$ , $q=-\frac{4}{e^2}\,t+\frac{32}{e^2}$

## 3)

*Supponendo che la funzione $q(t)$ rappresenti, per $t \geq 0$, la carica elettrica (misurata in $C$) che attraversa all'istante di tempo t (misurato in s) la sezione di un certo conduttore, determinare le dimensioni fisiche delle costanti $a$ e $b$ sopra indicate. Sempre assumendo $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, esprimere l'intensità di corrente $i(t)$ che fluisce nel conduttore all'istante t; determinare il valore massimo ed il valore minimo di tale corrente e a quale valore essa si assesta col trascorrere del tempo.*

Si ha: $q(t) = at \cdot e^{bt}$

Essendo la dimensione di q quella di una carica elettrica, le dimensioni di a sono quelle di una corrente elettrica: dimensioni di a=[corrente elettrica]=[carica]/[tempo]=[i]

Siccome $e^{bt}$ deve essere un numero puro, b ha le dimensioni di [1/tempo]:

dimensioni di b=[1/tempo]=[$t^{-1}$]

Determiniamo i(t):

$$i(t) = q'(t) = 4\, e^{-\frac{1}{2}t}\left(1 - \frac{1}{2}t\right) = 2\, e^{-\frac{1}{2}t}(2 - t) = i(t)$$

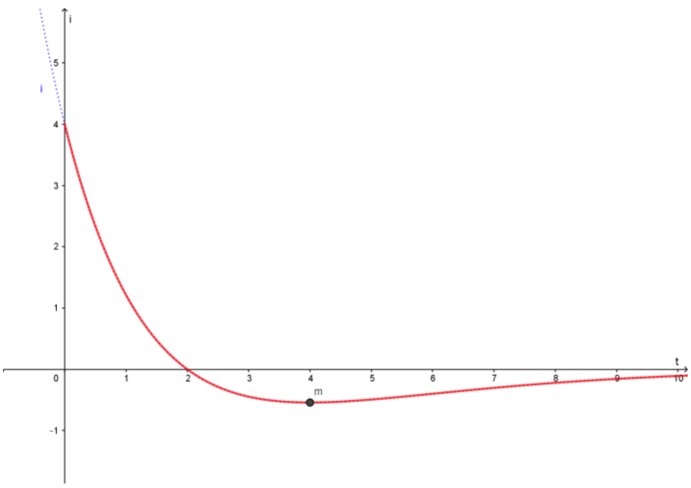
Studiamo la derivata di i(t):

$i'(t) = q''(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(t - 4) \geq 0 \;\; se \;\; t \geq 4$ : i cresce per t>4 e decresce per $0 \leq t < 4$; t=4 è punto di minimo. Risulta poi $i(0) = 4 \;\; e \;\; \lim_{t \to +\infty} i(t) = 0^-$ .

Quindi i è massima per t=0 (valore massimo 4) e minima per t=4 (valore minimo

$i(4) = q'(4) = -\frac{4}{e^2}$ ).

La corrente si assesta per $t \to +\infty$ , quando tende a 0.
Grafico qualitativo di i(t):



**4)**

*Indicando, per* $t_0 \geq 0$*, con* $Q(t_0)$ *la carica totale che attraversa la sezione del conduttore in un dato intervallo di tempo* $[0, t_0]$*, determinare a quale valore tende* $Q(t_0)$ *per* $t_0 \to +\infty$.
*Supponendo che la resistenza del conduttore sia* $R = 3\Omega$*, scrivere (senza poi effettuare il calcolo), un integrale che fornisca l'energia dissipata nell'intervallo di tempo* $[0, t_0]$.

Interpretando $q(t)$ come la carica che attraversa la sezione del conduttore nell'intervallo di tempo $[0; t]$, risulta: $Q(t_0) = q(t_0) = 4t_0 \cdot e^{-\frac{t_0}{2}}$.

Si ha poi:

$$\lim_{t_0 \to +\infty} 4t_0 \cdot e^{-\frac{t_0}{2}} = \lim_{t_0 \to +\infty} \frac{4t_0}{e^{\frac{t_0}{2}}} = 0^+ \quad \left(e^{\frac{t_0}{2}} \text{ è } infinito\ di\ ordine\ superiore\ rispetto\ 4t_0\right)$$

Se conoscessimo i(t) ma non q(t) allora, ricordando che: $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, la carica che attraversa la sezione del conduttore nel tempo dt si ottiene nel seguente modo:

$dq(t) = i(t)\, dt$ .

Nell'intervallo $[0, t_0]$ abbiamo:

$\int_o^{t_0} dq(t) = \int_o^{t_0} i(t)\ dt$ , $q(t_0) - q(0) = \int_o^{t_0} 2\, e^{-\frac{1}{2}t}(2-t)\ dt$ che conduce allo stesso risultato:

$q(t_0) = 4t_0 \cdot e^{-\frac{t_0}{2}} = Q(t_0)$

L'energia dissipata nel tempo dt è: $dE = i^2 R dt$ ; nell'intervallo $[0, t_0]$ l'energia dissipata è:

$$E = \int_0^{t_0} i^2 R dt = \int_0^{t_0} \left(2\, e^{-\frac{1}{2}t}(2-t)\right)^2 \cdot 3\, dt = 12 \int_0^{t_0} e^{-t}(2-t)^2\, dt = E$$

*Con la collaborazione di Angela Santamaria*

## SIMULAZIONE SECONDA PROVA SCRITTA – 28 FEBBRAIO 2019

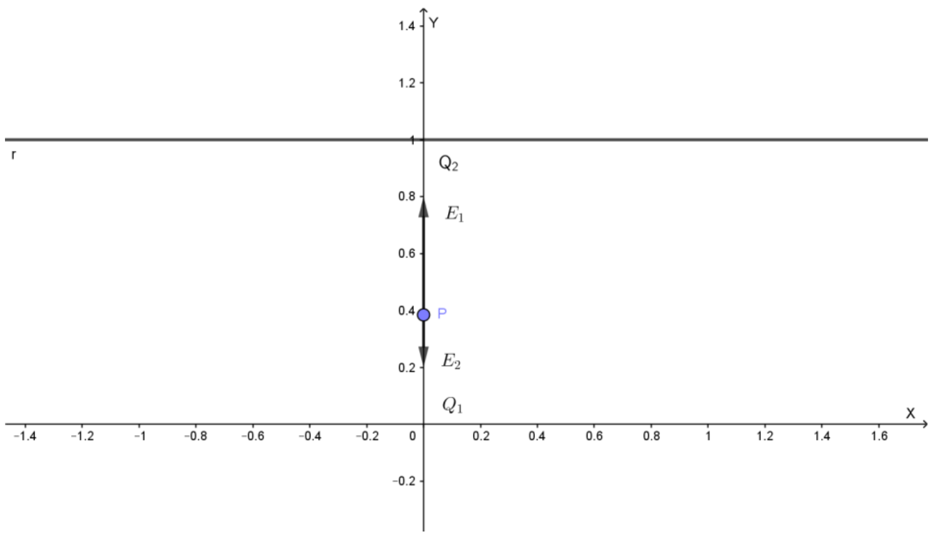
### Tema di MATEMATICA e FISICA

### PROBLEMA 2

*Una carica elettrica puntiforme $Q_1 = 4q$ (con q positivo) è fissata nell'origine $O$ di un sistema di riferimento nel piano $Oxy$ (dove x e y sono espressi in m). Una seconda carica elettrica puntiforme $Q_2 = q$ è vincolata a rimanere sulla retta $r$ di equazione $y = 1$.*

### 1)

*Supponendo che la carica $Q_2$ sia collocata nel punto $A(0,1)$, provare che esiste un unico punto $P$ del piano nel quale il campo elettrostatico generato dalle cariche $Q_1$ e $Q_2$ è nullo. Individuare la posizione del punto $P$ e discutere se una terza carica collocata in $P$ si trova in equilibrio elettrostatico stabile oppure instabile.*

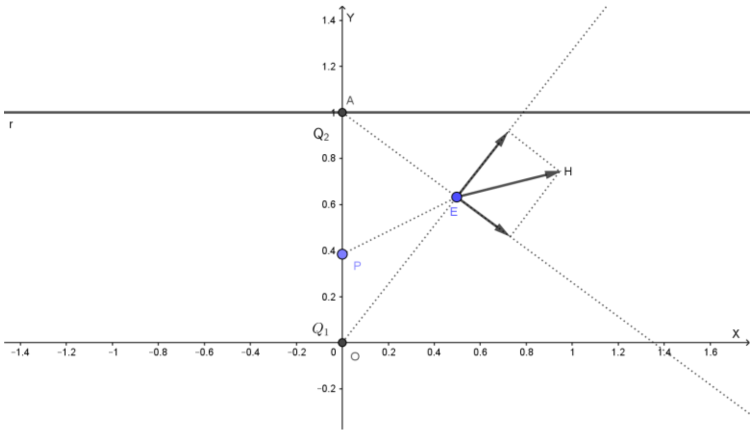



Osservando il verso dei campi generati dalle due cariche, il punto P deve trovarsi sull'asse y fra O ed A; detta y la sua ordinata deve essere:

$$E_1(P) = E_2(P),\quad \frac{kQ_1}{y^2} = \frac{kQ_2}{(1-y)^2}\ ,\quad \frac{k4q}{y^2} = \frac{kq}{(1-y)^2}\ ,\qquad 4(1-y^2) = y^2,$$

$$3y^2 - 8y + 4 = 0:\quad y = 2\ (non\ accettabile)\ e\quad y = \frac{2}{3}\ ,unica\ soluzione\ accettabile\ .$$

Collochiamo ora in P una terza carica $Q_3$ (supponiamo positiva). Tale carica è in equilibrio elettrostatico **instabile.** Infatti se spostiamo la carica da P verso un punto E, la risultante delle forze esercitate da $Q_1$ *e* $Q_2$ tende ad allontanare la carica da P come si può vedere nella figura seguente:

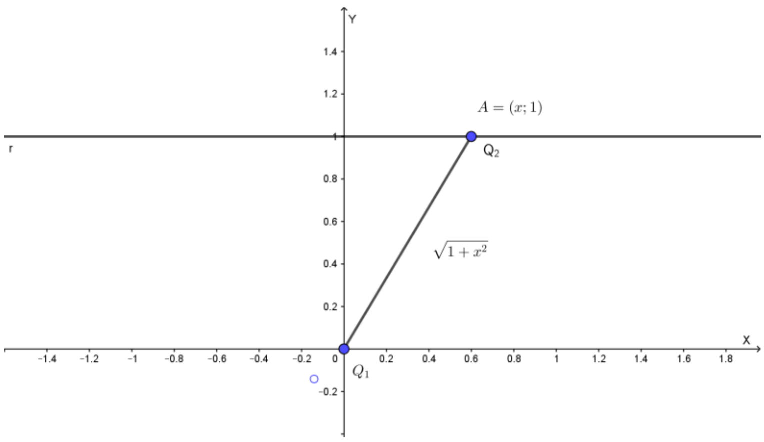



## *2)*

*Verificare che, se la carica $Q_2$ si trova nel punto della retta $r$ avente ascissa $x$, l'energia potenziale elettrostatica del sistema costituito da $Q_1$ e $Q_2$ è data da*

$$U(x) = k\,\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

*dove $k$ è una costante positiva (unità di misura: $N \cdot m^2/C^2$).*




Risulta:

$$U(x) = \frac{kQ_1Q_2}{OA} = \frac{k4q^2}{OA} = k\,\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}} = U(x)$$

## 3)

*Studiare la funzione $U(x)$ per $x \in R$, specificandone eventuali simmetrie, asintoti, massimi o minimi, flessi. Quali sono i coefficienti angolari delle tangenti nei punti di flesso?*

$$\boldsymbol{U(x) = 4kq^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

Osserviamo che la funzione, a meno della costante moltiplicativa positiva $4kq^2$, è

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Si tratta di una funzione definita, continua e derivabile su tutto R, sempre positiva, pari (simmetria rispetto all'asse delle ordinate); i limiti all'infinito sono uguali a $0^+$ (y=0 asintoto orizzontale).

Studiamo la derivata prima:

$y' = -\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \geq 0 \;\; se \; x \leq 0;$ $massimo\ relativo\ (ed\ assoluto)\ per\ x = 0$; U(max)= $4kq^2$

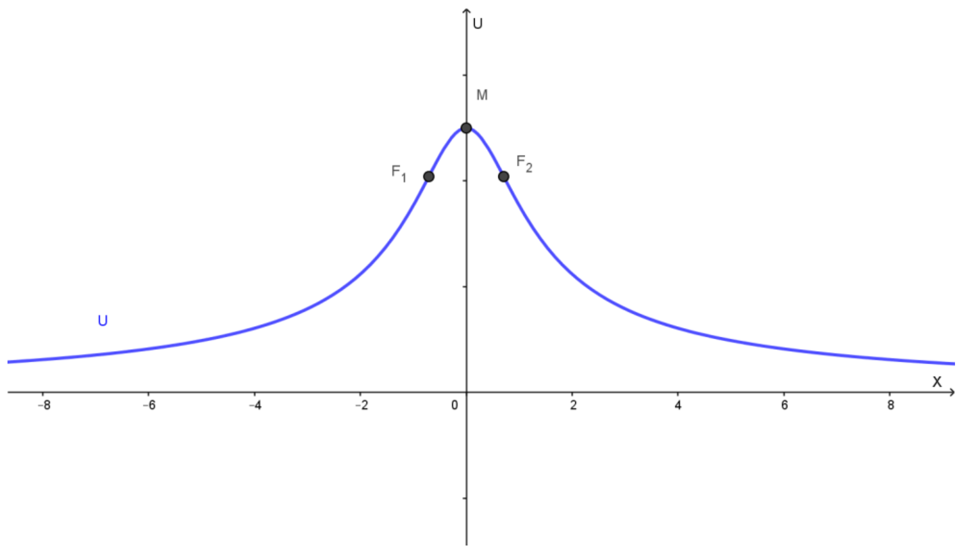
Studiamo la derivata seconda:

$$y'' = \frac{3x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1+2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \geq 0 \;\; se \;\; x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \;,\;\; or \;\; x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Abbiamo quindi due flessi per la U(x):

$$F_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4kq^2\sqrt{6}}{3}\right), \quad F_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4kq^2\sqrt{6}}{3}\right)$$

Il grafico di U(x) è del tipo:



Il coefficiente angolare della tangente in $F_2$ è $U'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\cdots=-\frac{8}{9}kq^2\sqrt{3}$ ; il coefficiente angolare della tangente in $F_1$ è $U'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\cdots=\frac{8}{9}kq^2\sqrt{3}$ ;

## 4)

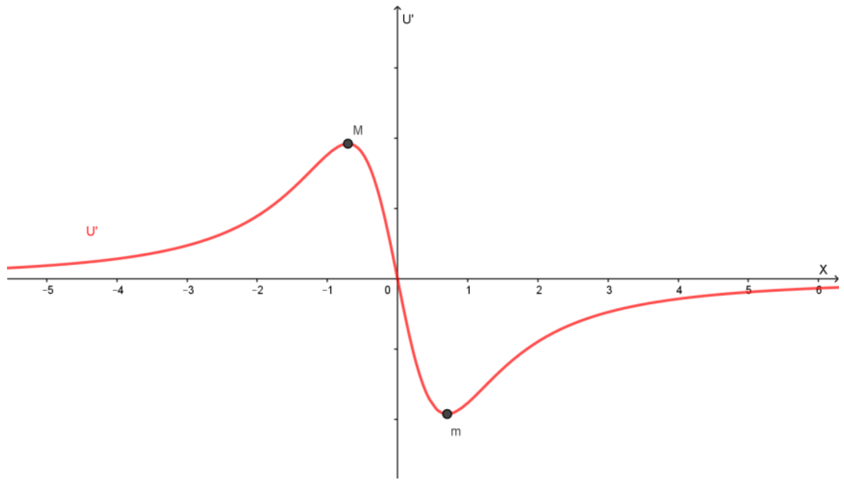
*A partire dal grafico della funzione $U$, tracciare il grafico della funzione $U'$, specificandone le eventuali proprietà di simmetria. Determinare il valore di $\int_{-m}^{m}U'(x)\,dx$ (dove $m>0$ indica l'ascissa del punto di minimo di $U'$).*

Dal grafico di U(x) deduciamo le seguenti proprietà di U'(x):

U è sempre derivabile, quindi U' è definita su tutto R.
Essendo U pari, U' sarà dispari (grafico simmetrico rispetto all'origine).
U cresce per x<0 (U' positiva) e decresce per x>0 (U' negativa); U'=0 per x=0.
U''>0 per $x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ , $or$ $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$: U' crescente; U''<0 per $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$: U' decrescente.
Quindi $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ punto di massimo e $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ punto di minimo.

Osservando l'andamento della tangente al grafico di U(x) deduciamo che per $x\to+\infty$ il coefficiente angolare tende a $0^-$ (tale è anche il limite della U'); per $x\to-\infty$ il coefficiente angolare tende a $0^+$ (tale è anche il limite della U').

Grafico qualitativo di U'(x):




Risulta:

*$\int_{-m}^{m}U'(x)\,dx$=0, poiché $U'(x)$ è dispari.*

*Con la collaborazione di Angela Santamaria*

## SIMULAZIONE SECONDA PROVA SCRITTA – 28 FEBBRAIO 2019

### Tema di MATEMATICA-FISICA

### Q 1

*Determinare i valori di a e b in modo che la funzione* $g: R - \{3\} \to R$

$$g(x) = \{3 - a\,x^2 \quad per\ x \le 1 \quad \frac{b}{x-3} \quad per\ x > 1$$

*sia derivabile in tutto il suo dominio. Tracciare i grafici delle funzioni* $g$ *e* $g'$.

La funzione è continua e derivabile in tutto il dominio escluso x=1 che va analizzato separatamente.

Per essere derivabile in x=1 deve essere necessariamente continua, quindi:

$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} (3 - ax^2) = 3 - a = g(1) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{b}{x-3} = -\frac{1}{2}b$ . Quindi:

$$3 - a = -\frac{1}{2}b\,, \qquad b = 2a - 6$$

Risulta poi:

$$g'(x) = \begin{cases} -2ax & se\ \ x < 1 \\ -\dfrac{b}{(x-3)^2} & se\ \ x > 1 \end{cases}$$

$g'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} (-2ax) = -2a\,,\ \ g'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \left[-\frac{b}{(x-3)^2}\right] = -\frac{1}{4}b\,.$ *Quindi*:

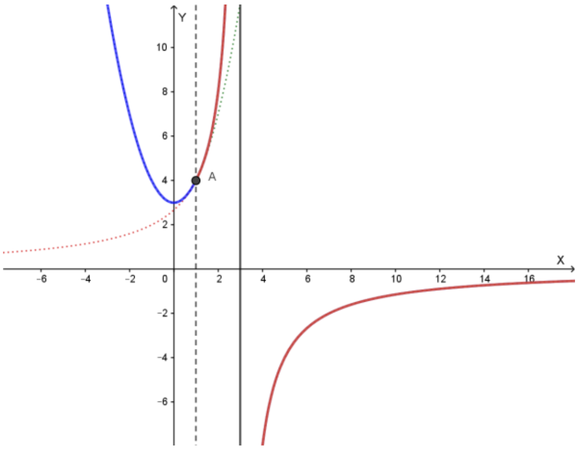
$-2a = -\frac{1}{4}b\,,\ \ b = 8a$ . Deve pertanto essere:

$$\begin{cases} b = 2a - 6 \\ b = 8a \end{cases};\quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -8 \end{cases}$$

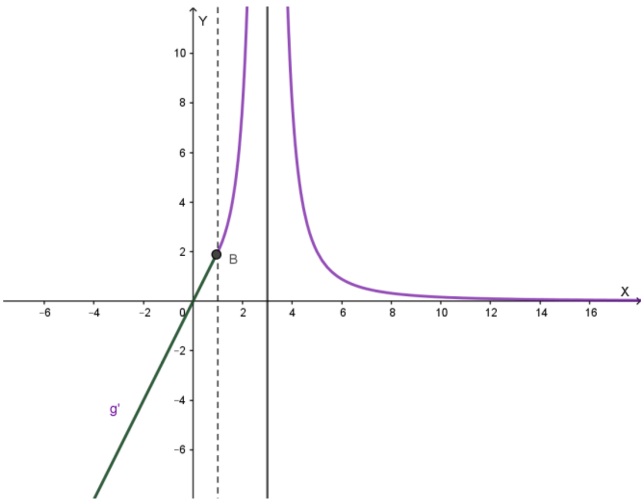
Perciò:

$$g(x) = \begin{cases} 3 + x^2 & se\ \ x \le 1 \\ \dfrac{-8}{x-3} & se\ \ x > 1 \end{cases} \quad ; \quad g'(x) = \begin{cases} 2x & se\ \ x \le 1 \\ \dfrac{8}{(x-3)^2} & se\ \ x > 1 \end{cases}$$

Il grafico di g(x) è immediato, essendo una parte di parabola ed una parte di funzione omografica:




Il grafico di g'(x) è in parte una retta (per $x \leq 1$) ed in parte la funzione di equazione:
$y = \frac{8}{(x-3)^2}$ , $se\ x > 1$ .
Studiamo qualitativamente questa funzione:
E' sempre positiva, ha asintoto verticale x=3, per x che tende a più infinito tende a $0^+$, si congiunge alla retta in B(1;2):



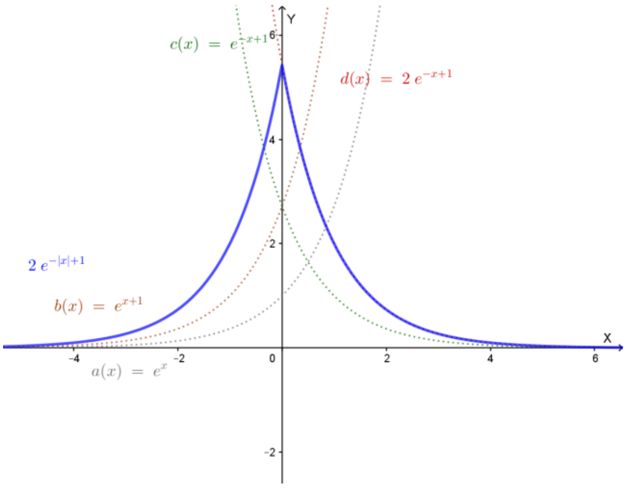

**Q 2**

*Sia R la regione piana compresa tra l'asse $x$ e la curva di equazione $y = 2e^{1-|x|}$. Provare che, tra i rettangoli inscritti in R e aventi un lato sull'asse $x$, quello di area massima ha perimetro minimo ed è un quadrato.*

Il grafico di $y = 2e^{1-|x|}$ si ottiene a partire dal grafico di $y = e^x$ mediante le seguenti trasformazioni:
$y = e^{1+x}$ $\quad traslazione\ di\ vettore\ (-1; 0)$
$y = e^{1-x}$ $\quad simmetria\ rispetto\ all'assey$

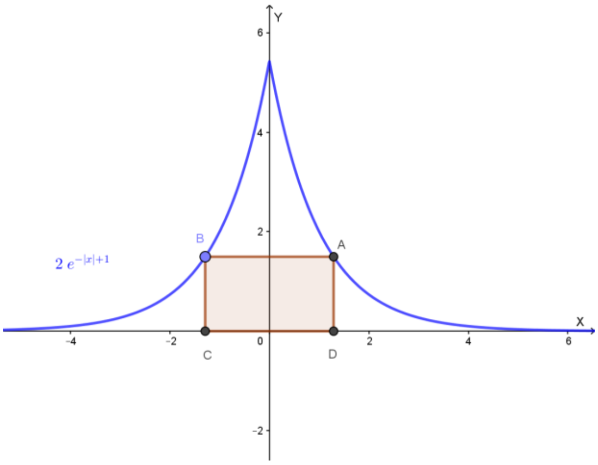
$y = 2\,e^{1-x}$ dilatazione verticale di fattore 2

$y = 2\,e^{1-|x|}$ si conferma la parte a destra dell'asse y della precedente funzione e si ribalta questa parte rispetto all'asse y:




Consideriamo il rettangolo ABCD e indichiamo con x l'ascissa di A (x>0); risulta:
$AD = y_A = 2\,e^{1-x}$ , $AB = 2x$ . Quindi:

$S = Area(R) = 2x(2\,e^{1-x}) = 4x\,e^{1-x}$ , $x > 0$ .
$S' = 4\,e^{1-x}(1-x) \geq 0$ $se$ $x \leq 1$ : S cresce se 0<x<1 e decresce se x>1 : S è massima se x=1.
Quindi: AB=2x=2 e AD=2 $e^{1-x} = 2$: il rettangolo di area massima è un quadrato.




Analizziamo ora il perimetro. Si ha:
$2p = 4x + 4\,e^{1-x} = min$ $se\ lo$ è $y = x + e^{1-x}$; $ma\ risulta$: $y' = 1 - e^{1-x} \geq 0$ $se$

$e^{1-x} \leq 1$ , $1 - x \leq 0$, $x \geq 1$ : il perimetro cresce per x>1 e decresce per 0<x<1: esso è minimo se x=1, quindi il rettangolo di perimetro minimo è un quadrato, lo stesso che ha area massima.

## Q 3

*Una scatola contiene 16 palline numerate da 1 a 16.*

- *Se ne estraggono 3, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 10 e gli altri due minori di 10?*
- *Se ne estraggono 5 contemporaneamente. Qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia uguale a 13?*

a) La probabilità che il primo estratto sia 10 è $p_1 = \frac{1}{16}$, la probabilità che il secondo estratto sia minore di 10 è $p_2 = \frac{9}{16}$, uguale alla probabilità $p_3$ che sia minore di 10 anche il terzo estratto. Quindi la probabilità $p$ richiesta è:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{81}{4096} \cong 0.0198 = 1.98\ \%$$

b) Le cinquine favorevoli sono quelle che contengono il 13 e quattro fra i numeri da 1 a 12, quindi sono tante quante le combinazioni di 12 oggetti a 4 a 4 : $\binom{12}{4}$.

Le cinquine possibili sono tante quante le combinazioni di 16 oggetti a 5 a 5: $\binom{16}{5}$.
La probabilità richiesta è quindi:

$$p = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{16}{5}} = \frac{495}{4368} \cong 0.113 = 11.3\ \%$$

## Q 4

*Scrivere, giustificando la scelta effettuata, una funzione razionale $y = \frac{s(x)}{t(x)}$, dove $s(x)$ e $t(x)$ sono polinomi, tale che il grafico della funzione:*

- *incontri l'asse $x$ nei punti di ascissa $-1$ e $2$ e sia ad esso tangente in quest'ultimo punto;*
- *abbia asintoti verticali di equazioni $x = -3$ e $x = 1$;*
- *passi per il punto $P(7, 10)$.*

*Rappresentare, qualitativamente, il grafico della funzione trovata.*

La funzione richiesta ha equazione del tipo:

$$y = a \cdot \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)}$$

Questa funzione infatti taglia l'asse x in -1 e 2 ed in quest'ultimo ha una radice doppia (quindi grafico tangente all'asse x). Inoltre i limiti per x che tende a -3 oppure ad 1 sono uguali ad infinito, perciò x=-3 e x=1 sono asintoti verticali.

Imponiamo il passaggio per il punto $P(7, 10)$:

$$10 = a \cdot \frac{(8)(25)}{(10)(6)} = \frac{10}{3}\, a\,, \quad a = 3$$

Quindi una funzione che soddisfa le condizioni richieste è:

$$y = 3 \cdot \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)}$$

Calcoliamo i limiti alla frontiera del dominio:

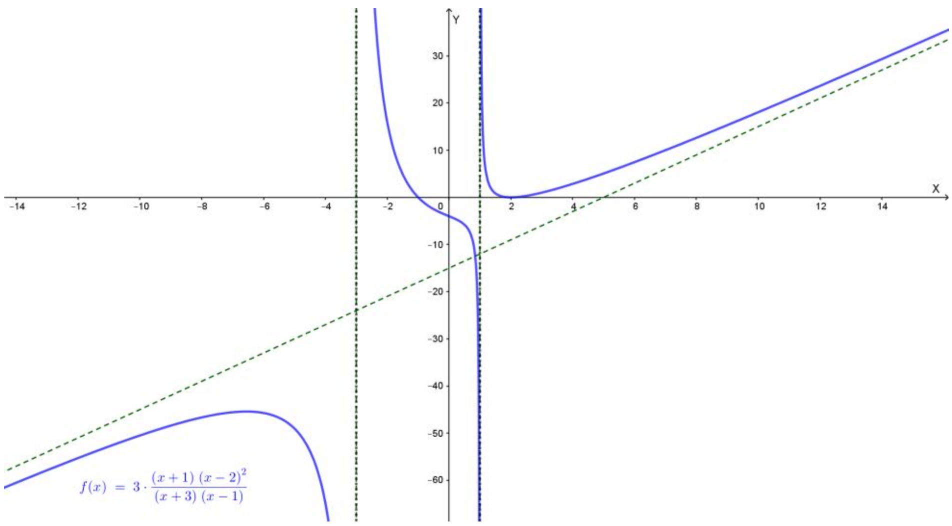
$$\lim_{x \to \mp\infty} 3 \cdot \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x \to -\infty} 3 \cdot \frac{x^3}{x^2} = \mp\infty$$

(si avrà un asintoto obliquo poiché il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore)

$$\lim_{x \to (-3)^{\mp}} 3 \cdot \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)} = 3 \lim_{x \to (-3)^{\mp}} \frac{(-2)(25)}{(x+3)(-4)} = \mp\infty$$

$$\lim_{x \to (1)^{\mp}} 3 \cdot \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)} = 3 \lim_{x \to (-3)^{\mp}} \frac{(2)(1)}{(4)(x-1)} = \mp\infty$$

Il grafico qualitativo è quindi del tipo:




**Q 5**

*Si consideri la superficie sferica S di equazione* $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0$.

- *Dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio, verificare che il piano* $\pi$ *di equazione* $3x - 2y + 6z + 1 = 0$ *e la superficie S sono secanti.*
- *Determinare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando* $\pi$ *e S.*

Il centro ha coordinate $C = (1; 0; -3)$ . Il raggio è:

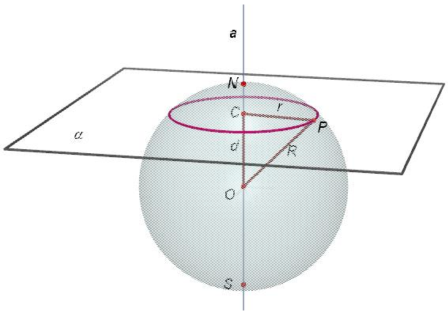
$$R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d} = \sqrt{10} = R$$

Il piano è secante se la distanza d del centro della sfera dal piano è minore del raggio:

$$d = \frac{|ax_C + by_C + z_C + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|3 - 18 + 1|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = 2 < \sqrt{10} \ : piano\ e\ sfera\ sono\ secanti.$$

Detto r il raggio della circonferenza sezione, R il raggio della sfera e d la distanza del centro della sfera dal piano si ha:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{10 - 4} = \sqrt{6} : raggio\ circonferenza\ .$$




**Q 6**

*Un punto materiale si muove di moto rettilineo, secondo la legge oraria espressa, per* $t \geq 0$, *da* $x(t) = \frac{1}{9}t^2\left(\frac{1}{3}t + 2\right)$, *dove* $x(t)$ *indica (in m) la posizione occupata dal punto all'istante* $t$ *(in s). Si tratta di un moto uniformemente accelerato? Calcolare la velocità media nei primi 9 secondi di moto e determinare l'istante in cui il punto si muove a questa velocità.*

Il moto non è uniformemente accelerato, perché la legge oraria dovrebbe essere del tipo:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Calcoliamo la velocità media nei primi 9 secondi:

$$x(9) = 45, \qquad x(0) = 0, \qquad v_M = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{45}{9}\frac{m}{s} = 5\ m/s$$

Cerchiamo la velocità in funzione di t:

$$v = x'(t) = \frac{2}{9}t\left(\frac{1}{3}t + 2\right) + \frac{1}{9}t^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}(t^2 + 4t) = 5, \quad t^2 + 4t - 45 = 0:$$

$$t = -2 \pm 7; \;\; valore\ accettabile\ \ t = 5\ s\ .$$

La velocità media dei primi 9 secondi si ha all'istante $t = 5\ s$ .

## Q 7

*Una sfera di massa $m$ urta centralmente a velocità $v$ una seconda sfera, avente massa $3m$ ed inizialmente ferma.*

a. *Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che tale urto sia perfettamente elastico.*
b. *Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che esso sia completamente anelastico. Esprimere, in questo caso, il valore dell'energia dissipata.*

Indichiamo con $v_A'$ $e$ $v_B'$ le velocità della prima e della seconda pallina dopo l'urto; applicando il principio di conservazione della quantità di moto ed il principio di conservazione dell'energia cinetica (essendo l'urto elastico), abbiamo:

$$\begin{cases} mv = mv_A' + 3mv_B' \\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_A')^2 + \frac{1}{2}(3m)(v_B')^2 \end{cases} ; \; \begin{cases} v = v_A' + 3v_B' \\ v^2 = (v_A')^2 + 3(v_B')^2 \end{cases} ; (v_A' + 3v_B')^2 = (v_A')^2 + 3(v_B')^2$$

$$6v_A'v'_B + 6(v_B')^2 = 0 \;,\;\; v_B' = 0 \;\; oppure \;\; v_B' = -v_A'$$

La prima soluzione non è accettabile, quindi:

$$\begin{cases} v_B' = -v_A' \\ v = v_A' + 3v_B' = v_A' - 3v_A' = -2v_A' \end{cases} ; \; \begin{cases} v_A' = -\frac{1}{2}v \\ v_B' = \frac{1}{2}v \end{cases}$$

Analizziamo ora il caso dell'urto completamente anelastico (dopo l'urto avremmo un unico corpo di massa $4m$); in questo caso si conserva solo la quantità di moto. Indichiamo con $v'$ la velocità dopo l'urto (comune ai due corpi):

$$mv = (m + 3m)v' \;,\;\; v' = \frac{1}{4}v$$

Cerchiamo infine la perdita di energia (data dalla differenza fra l'energia cinetica iniziale e quella finale):

$$E_i - E_f = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(4m)(v')^2 = \frac{1}{2}m(v^2 - 4v'^2) = \frac{1}{2}m\left(v^2 - \frac{1}{4}v^2\right) = \frac{3}{8}mv^2$$

## Q 8

*Un campo magnetico, la cui intensità varia secondo la legge* $B(t) = B_0(2 + sen(\omega t))$*, dove* $t$ *indica il tempo, attraversa perpendicolarmente un circuito quadrato di lato* $l$*. Detta* $R$ *la resistenza presente nel circuito, determinare la forza elettromotrice e l'intensità di corrente indotte nel circuito all'istante* $t$*. Specificare le unità di misura di tutte le grandezze coinvolte.*

$$fem = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d\left(B_0\left(2 + sen(\omega t)\right) \cdot l^2\right)}{dt} = -B_0 l^2(\omega\, cos(\omega t) = -\omega l^2 B_0\, cos(\omega t)$$

Calcoliamo l'intensità della corrente indotta:

$$i = \frac{fem}{R} = \left(-\frac{\omega l^2 B_0}{R}\right) cos(\omega t)$$

Unità di misura delle grandezze coinvolte:

$B, B_0$: *tesla* $(T)$, $\omega$: *radianti al secondo, rad/s*, $t$: *secondi* $(s)$, $fem$: *volt* $(V)$,

$\Phi(\vec{B})$: *tesla per metri quadrati = weber* $(Wb)$, $i$: *ampere* $(A)$, $l$: *metri* $(m)$,

$R$: *ohm* $(\Omega)$.

*Con la collaborazione di Angela Santamaria*