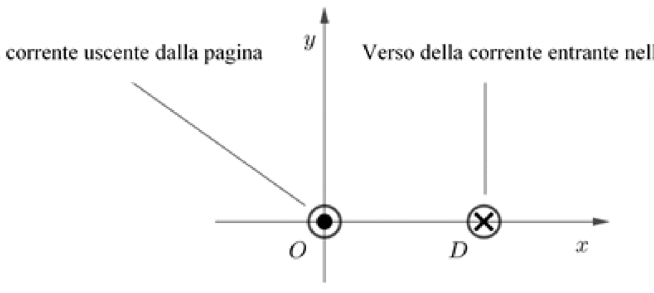
SIMULAZIONE SECONDA PROVA SCRITTA – 02 APRILE 2019

Tema di MATEMATICA e FISICA

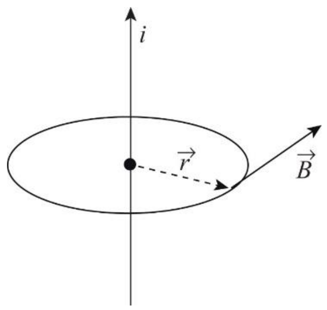
PROBLEMA 1

Due fili rettilinei paralleli vincolati a rimanere nella loro posizione, distanti 1 m l'uno dall'altro e di lunghezza indefinita, sono percorsi da correnti costanti di pari intensità ma verso opposto; si indichi con i l'intensità di corrente, espressa in ampere (A). Si consideri un piano perpendicolare ai due fili sul quale è fissato un sistema di riferimento ortogonale Oxy, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), in modo che i due fili passino uno per l'origine O e l'altro per il punto $D(1,0)$, *come mostrato in figura.*



Per la legge di Biot-Savart, in un punto a distanza r da un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente elettrica di intensità i si genera un campo magnetico $\vec{B}$ di intensità:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \;, con \;\; \mu_0 = 4\pi\, 10^{-7} \frac{N}{A^2} = T \cdot \frac{m}{A}$$



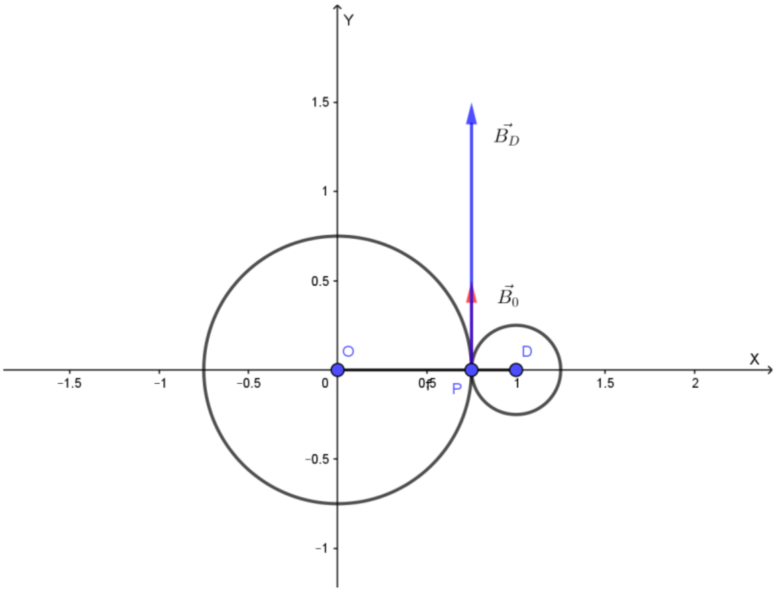
1)

Verificare che l'intensità del campo magnetico $\vec{B}$, *espresso in tesla (T), in un punto* $P(x,0)$, *con* $0 < x < 1$, *è data dalla funzione* $B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$, *dove* K *è una costante positiva della quale si richiede l'unità di misura. Stabilire quali sono la direzione e il verso del vettore* $\vec{B}$ *al variare di* x *nell'intervallo* $(0,1)$. *Per quale valore di* x *l'intensità di* $\vec{B}$ *è minima?*

Nel punto P i campi magnetici generati dai due fili hanno intensità rispettivamente:

$$B_0 = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \quad , \quad diretto\ nel\ verso\ positivo\ dell'asse y$$

$$B_D = \frac{\mu_0 i}{2\pi(1-x)} \quad , \quad diretto\ nel\ verso\ positivo\ dell'asse y$$



Il campo totale in P, diretto nel verso positivo dell'asse y, ha intensità:

$$B(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(1-x)} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = k\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) \quad , \qquad 0 < x < 1,\ \ k = \frac{\mu_0 i}{2\pi}$$

L'unità di misura di k è: $\frac{N}{A^2} \cdot A = \frac{N}{A} = \left(T \cdot \frac{m}{A}\right) \cdot A = T \cdot m$

B è minimo quando lo è $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)}$; questa espressione è minima quando z=x(1-x) è massima. Essendo x+(1-x)=1=costante, ricordando che il prodotto di due grandezze positive a somma costante è massimo quando le due grandezze sono uguali, z=x(1-x) è massimo quando $x = 1 - x,\ \ x = \frac{1}{2}$: $y\ (e\ quindi\ B)è\ minima\ se\ x = \frac{1}{2}$. Oppure: $z' = -2x + 1 \geq 0\ \ se\ x \leq \frac{1}{2}$ quindi z cresce se 0<x<1/2 e decresce se 1/2<x<1: z è massima se x=1/2 e quindi y e B sono minimi se x=1/2.

Lo stesso risultato si ottiene studiando la derivata prima di y:

$$y = \frac{1}{x(1-x)}\ , \dots , \qquad y' = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2} \geq 0\ \ se \quad \frac{1}{2} \leq x < 1$$

Quindi y è crescente per $\frac{1}{2} < x < 1$ e decrescente per 0$< x < \frac{1}{2}$: y è minima quando $x = \frac{1}{2}$.

L'intensità di $\vec{B}$ in P è minima quando $x = \frac{1}{2}$ $\ (B_{minimo} = 4k)$.

2)

Nella zona di spazio sede del campo $\vec{B}$, una carica puntiforme q transita, ad un certo istante, per il punto $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, con velocità di modulo v_0 nella direzione della retta di equazione $x = \frac{1}{2}$. Descriverne il moto in presenza del solo campo magnetico generato dalle due correnti, giustificando le conclusioni.

Stabilire intensità, direzione e verso del campo magnetico $\vec{B}$ nei punti dell'asse x esterni al segmento OD. Esistono punti sull'asse x dove il campo magnetico $\vec{B}$ è nullo?

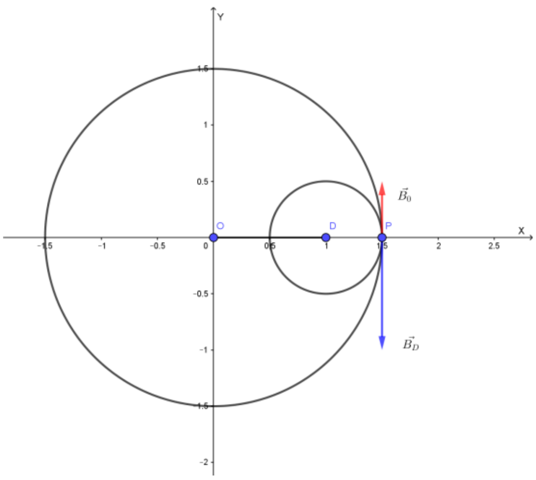
La carica è immessa in un campo magnetico nella stessa direzione del campo, quindi per la legge di Lorentz è soggetta alla forza: $\vec{F} = q\,\vec{v_0} \wedge \vec{B}$ la cui intensità è nulla, essendo:
$F = qv_0 B\, sen\alpha = 0\,,\ \ perch\grave{e}\ \ \alpha = 0\ \ oppure\ \ \alpha = \pi.$

La carica si muove quindi lungo la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$ con velocità costante v_0 .

In un punto a destra di D (x>1), il campo generato dalla corrente uscente da O è diretto nel verso positivo dell'asse y e quello generato dalla corrente entrante in D è diretto nel verso negativo dell'asse y e risulta: $B_D > B_0$ (essendo l'intensità della corrente uguale e la distanza da O maggiore della distanza da D). Quindi:

a destra di D si ha un campo diretto nel verso negativo dell'asse y, di modulo:

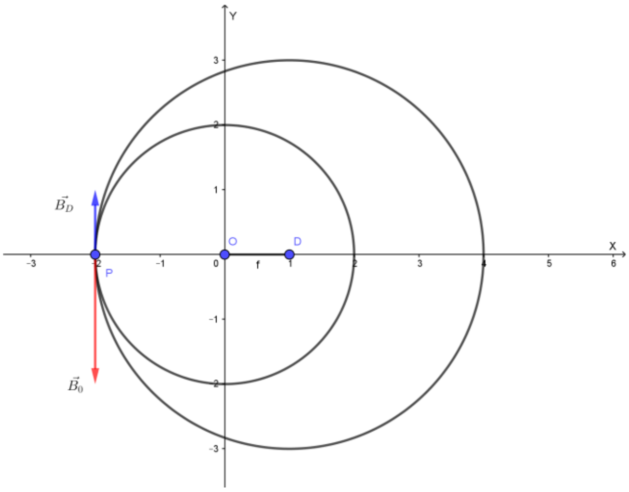
$$B = B_D - B_0 = \frac{k}{x-1} - \frac{k}{x} = \frac{k}{x(x-1)}\ \ ,\ \ con\ \ x > 1\,.$$



In un punto a sinistra di O (x<0), il campo generato dalla corrente uscente da O è diretto nel verso negativo dell'asse y e quello generato dalla corrente entrante in D è diretto nel verso positivo dell'asse y e risulta: $B_D < B_0$ (essendo l'intensità della corrente uguale e la distanza da O minore della distanza da D). Quindi:

a sinistra di O si ha un campo diretto nel verso negativo dell'asse y, di modulo:

$$B = B_0 - B_D = \frac{k}{-x} - \frac{k}{1-x} = \frac{k}{x(x-1)} \quad , \quad con \;\; x < 0 \, .$$



Quindi esternamente al segmento OD il campo è sempre diretto nel verso negativo dell'asse y ed ha intensità:

$$B = \frac{k}{x(x-1)} \;, \quad con \;\; x < 0 \;\; oppure \; x > 1$$

Da tale espressione si deduce che NON ESISTONO punti esterni ad OD in cui il campo è nullo (è sempre diretto nel verso negativo dell'asse y e non ha mai modulo nullo).

Internamente al segmento OD abbiamo visto che il campo è sempre diretto nel verso positivo dell'asse y ed il suo modulo (MAI NULLO) è:

$$B = k\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{k}{x(1-x)} \;, \qquad con \; 0 < x < 1$$

Non esistono quindi punti dell'asse x in cui il campo sia nullo.

3)

Indipendentemente da ogni riferimento alla fisica, studiare la funzione $f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$ *dimostrando, in particolare, che il grafico di tale funzione non possiede punti di flesso. Scrivere l'equazione della retta* r *tangente al grafico di* f *nel suo punto di ascissa* $\frac{1}{3}$ *e determinare le coordinate dell'ulteriore punto d'intersezione tra* r *e il grafico di* f.

$$\boldsymbol{y = f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = k\frac{1}{x(1-x)}}$$

Dominio: $-\infty < x < 0, \;\; 0 < x < 1, \;\; 1 < x < +\infty$

La funzione è continua e derivabile per ogni x diversa da 0 e 1 e, visto il dominio, non può essere né pari né dispari. Non ci sono intersezioni con gli assi e risulta:

$y > 0 \quad se \quad x(1-x) > 0, \quad 0 < x < 1$

Limiti:

$$\lim_{x \to \mp\infty} k \frac{1}{x(1-x)} = 0^- \quad : \quad y = 0 \;\; asintoto\; per\; x \to \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 0^\pm} k \frac{1}{x(1-x)} = \pm\infty \quad : \quad x = 0 \; asintoto$$

$$\lim_{x \to 1^\pm} k \frac{1}{x(1-x)} = \mp\infty \quad : \quad x = 1 \; asintoto$$

Abbiamo già studiato la derivata:

$$y' = k \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2} \geq 0 \;\; se \;\; x \geq \frac{1}{2} \;\; , \;\; x \neq 1$$

Quindi y è crescente per $\frac{1}{2} < x < 1 \;\; e \;\; x > 1$ e decrescente per $x < 0 \;\; e \; 0 < x < \frac{1}{2}$: y è minima quando $x = \frac{1}{2}$ ed il minimo è: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4k$.

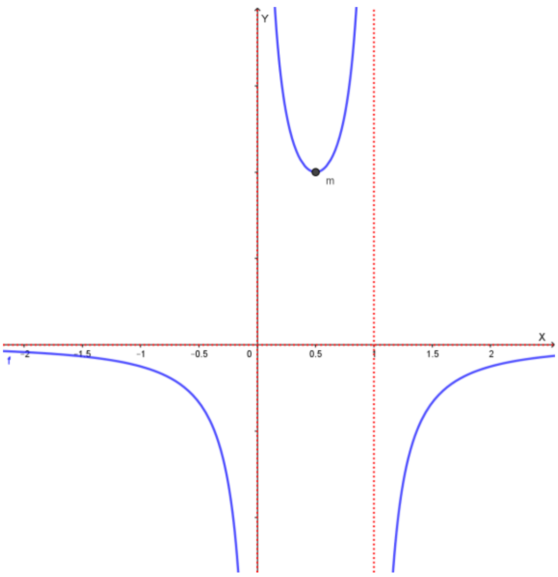
Studio derivata seconda. Risulta:

$$y'' = k \frac{2x(1-x)(3x^2-3x+1)}{x^4(1-x)^4}$$

Essendo $3x^2 - 3x + 1 > 0 \; per \; ogni \; x$, nel dominio si ha $y'' \geq 0 \;\; se \;\; x(1-x) > 0, \;\; 0 < x < 1$

Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto se 0<x<1 e verso il basso se x<0 e x>1 .
Non esistono flessi.

Il grafico della funzione è quindi il seguente:



Cerchiamo ora la tangente nel punto di ascissa x=1/3.

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}k \ , \quad f'\left(\frac{1}{3}\right)=k\frac{\frac{2}{3}-1}{\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{27}{4}k$$

La retta r ha quindi equazione:

$$r:\ y-\frac{9}{2}k=-\frac{27}{4}k\left(x-\frac{1}{3}\right), \quad y=-\frac{27}{4}kx+\frac{27}{4}k \quad , \qquad y=-\frac{27}{4}k(x-1).$$

Ulteriore intersezione di r con il grafico di f:

$$\begin{cases} y=-\frac{27}{4}k(x-1) \\ y=k\frac{1}{x(1-x)} \end{cases} , \quad k\frac{1}{x(1-x)}=-\frac{27}{4}k(x-1)\ , \qquad 4=27x(x-1)^2\ ,$$

$27x^3-54\,x^2+27\,x-4=0$

Abbassando di grado due volte con x=1/3 (radice doppia), si ha:

$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2(27x-36)=0$. Quindi l'intersezione richiesta ha ascissa $x=\frac{36}{27}=\frac{4}{3}$. E risulta:

$f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{9}{4}k$: ulteriore intersezione di r col grafico di f $\left(\frac{4}{3};\ -\frac{9}{4}k\right)$.

4)

Calcolare il valore dell'integrale

$$\int_{1/4}^{3/4} f(x)\,dx$$

ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto. Esprimere, per $t\geq 2$, *l'integrale*

$$g(t)=\int_2^t |f(x)|\,dx$$

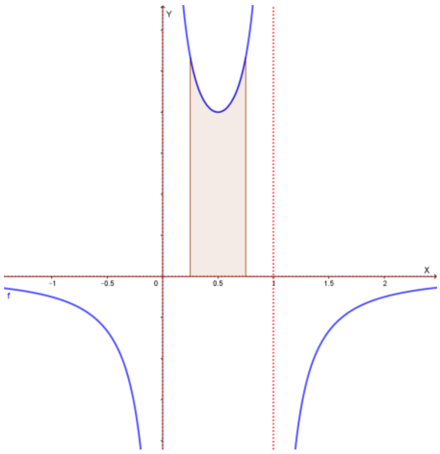
e calcolare $\lim_{t\to+\infty} g(t)$. *Qual è il significato di tale limite?*

$$\int_{1/4}^{3/4} f(x)\,dx=\int_{1/4}^{3/4} k\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{(1-x)}\right)dx=k\int_{1/4}^{3/4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$= k[ln|x| - ln|x-1|]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = k\left[ln\left(\frac{3}{4}\right) - ln\left(\frac{1}{4}\right) - \left(ln\left(\frac{1}{4}\right) - ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)\right] =$$

$$= k\left[2\,ln\left(\frac{3}{4}\right) - 2ln\,\left(\frac{1}{4}\right)\right] = 2k\left(ln\left(\frac{3}{4}\right) - ln\left(\frac{1}{4}\right)\right) = 2k\left(ln\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}\right) = 2kln(3)$$

Tale valore rappresenta l'area del trapezoide compreso fra il grafico di f, le rette x=1/4 e x=3/4 e l'asse x.



Calcoliamo ora, per $t \geq 2,$ l'integrale:

$$g(t) = \int_2^t |f(x)|\,dx$$

Notiamo che se t=2 risulta g(2)=0.

Osserviamo poi che per $x \geq 2\ \ risulta\ f(x) < 0$, quindi (per t>2):

$$g(t) = \int_2^t \big(-f(x)\big)dx = -k\int_2^t \frac{1}{x(1-x)}\,dx = -k[ln|x| - ln|1-x|]_2^t =$$

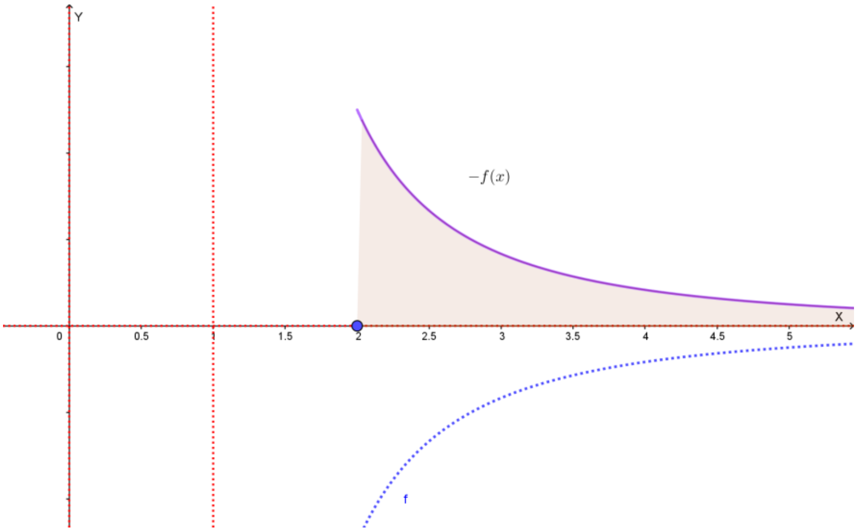
$$= -k[lnt - ln(t-1) - ln2 + 0] = -k\,ln\frac{t}{2(t-1)} = g(t)$$

(Osserviamo che in tale espressione si ritrova g(t)=0 se t=2).

Risulta:

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty}\left[-k\,ln\frac{t}{2(t-1)}\right] - kln\left(\frac{1}{2}\right) = kln(2)$$

Tale limite rappresenta l'area della regione illimitata compresa fra il grafico di y=-f(x), la retta x=2 e l'asse delle ascisse:



Con la collaborazione di Angela Santamaria

SIMULAZIONE SECONDA PROVA SCRITTA – 02 APRILE 2019

Tema di MATEMATICA e FISICA

PROBLEMA 2

Assegnato un numero reale positivo k, considerare le funzioni f e g così definite:

$$f(x) = \sqrt{x}\,(k - x) \qquad\qquad g(x) = x^2(x - k).$$

1)

Provare che, qualunque sia $k > 0$, nell'intervallo $[0, k]$ il grafico di f ha un unico punto di massimo $F(x_F\,, y_F)$ ed il grafico di g ha un unico punto di minimo $G(x_G\,, y_G)$. Verificare che si ha $x_G = 2x_F$ e $y_G = -(y_F)^2$.

Risulta:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(k - x) - \sqrt{x} = \frac{k - x - 2x}{2\sqrt{x}} = \frac{k - 3x}{2\sqrt{x}} \geq 0 \;\; se \;\; x \leq \frac{k}{3}, \qquad con\ x \neq 0.$$

Quindi la funzione è crescente per $0 < x < \frac{k}{3}$ e decrescente per $\frac{k}{3} < x \leq k$: la funzione f ha quindi un massimo (unico) per $x = \frac{k}{3}$ con $f\left(\frac{k}{3}\right) = \frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}}$, quindi $F = \left(\frac{1}{3}k;\ \frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$.

Analizziamo la funzione g:

$$g'(x) = 2x(x - k) + x^2 = 3x^2 - 2kx \geq 0 \;\; se \;\; x \leq 0 \;\; vel \;\; x \geq \frac{2}{3}k$$

La funzione g, nell'intervallo $[0, k]$, è quindi decrescente per $0 < x < \frac{2}{3}k$ e crescente per $\frac{2}{3}k < x \leq k$: g ha quindi un minimo (unico) per $x = \frac{2}{3}k$ con $g\left(\frac{2}{3}k\right) = -\frac{4}{27}k^3$:

$$G\left(\frac{2}{3}k;\ -\frac{4}{27}k^3\right).$$

Quindi: $x_G = \frac{2}{3}k = 2x_F = 2\left(\frac{1}{3}k\right)$, $\quad y_F^2 = \frac{4}{9}k^2 \cdot \frac{k}{3} = \frac{4}{27}k^3, perciò$: $y_G = -\frac{4}{27}k^3 = -y_F^2$

2)

Verificare che, qualunque sia $k > 0$, i grafici delle due funzioni sono ortogonali nell'origine, vale a dire che le rispettive rette tangenti in tale punto sono tra loro ortogonali. Determinare per quale valore positivo di k i due grafici si intersecano ortogonalmente anche nel loro ulteriore punto comune.

Risulta: $f'_+(0) \to +\infty$ (tangente verticale), $g'(0) = 0$ (tangente orizzontale): quindi le tangenti nell'origine sono ortogonali.

Cerchiamo l'ulteriore intersezione tra i grafici di f e g:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x}\,(k-x) \\ y = x^2(x-k) \end{cases}, \quad \sqrt{x}\,(k-x) = x^2(x-k), da\ cui, oltre\ a\ x = 0, troviamo\ x = k$$

Oltre che nell'origine quindi i grafici di f e g si intersecano nel punto A=(k; 0). Risulta:

$f'(k) = -\sqrt{k}$, $g'(k) = k^2$. Deve essere $f'(k) \cdot g'(k) = -1$, $quindi$: $\left(-\sqrt{k}\right)(k^2) = -1$, $k^5 = 1$, $pertanto$ $k = 1$ (per tale valore di k i grafici di f e g sono ortogonali in A).

D'ora in avanti, assumere $k = 1$. *In un riferimento cartesiano, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), l'unione degli archi di curva di equazioni* $y = f(x)$ *e* $y = g(x)$, *per* $x \in [0,1]$, *rappresenta il profilo di una spira metallica. Sia S la regione piana delimitata da tale spira.*

Per k=1 si ha:

$$f(x) = \sqrt{x}\,(1-x) \qquad e \qquad g(x) = x^2(x-1) \quad , \quad intervallo\ [0;1]$$

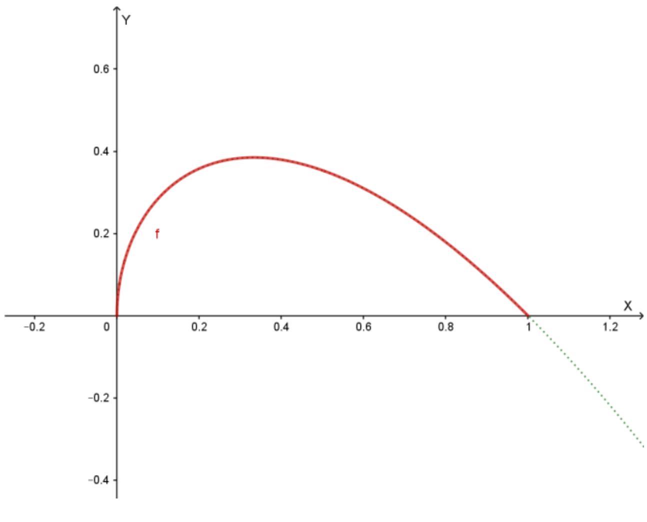
Studiamo sommariamente le due funzioni nell'intervallo richiesto.

$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}\,(1-x)}$, $\mathbf{0 \le x \le 1}$

Nell'intervallo richiesto la funzione è sempre non negativa ed è: $f(0) = f(1) = 0$.

La funzione è continua, non derivabile in x=0 come già visto, ed è $f'_+(0) \to +\infty$ (tangente verticale); risulta poi: $f'(x) = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}}$, $f'(1) = -1$. Come già visto con k generico, f ha un massimo in $F = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$. Derivata seconda: $f''(x) = \frac{-3x-1}{4x\sqrt{x}} < 0\ \ in\ (0;1]$.

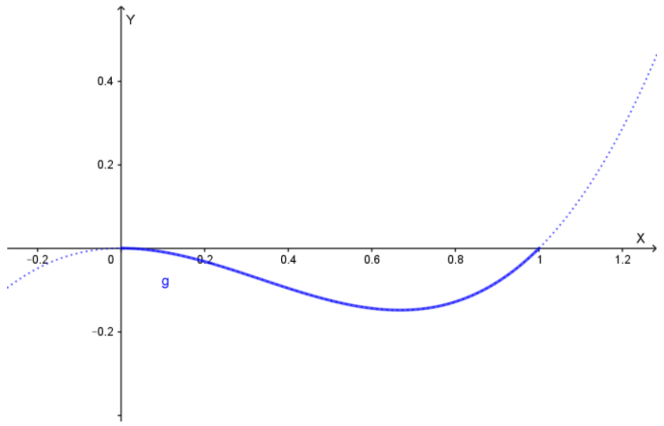
Il grafico di f è quindi del tipo:



$\boldsymbol{g(x) = x^2(x-1)\,,\quad 0 \le x \le 1}$

Si tratta di una cubica, continua e derivabile su tutto R, con $g(0) = g(1) = 0$; come già visto con k generico, si ha: $g'(x) = 3x^2 - 2x\,,\ g'(0) = 0,\ g'(1) = 1\,,\ minimo\ in\ \ G = \left(\frac{2}{3};\ -\frac{4}{27}\right)$. Derivata seconda: $g''(x) = 6x - 2 \ge 0\ \ per\ \ x \ge \frac{1}{3}\,,\ \ x = \frac{1}{3}\ punto\ di\ flesso:\ \left(\frac{1}{3};\ -\frac{1}{27}\right)$.

Grafico di g:



Il profilo della spira è quindi il seguente:

Calcoliamo l'area della spira:

$$Area(S) = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^1 \left[\sqrt{x}\,(1-x)\ - x^2(x-1)\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\sqrt{x} + x^2 - x\sqrt{x} - x^3\right] dx = \int_0^1 \left[x^{\frac{1}{2}} + x^2 - x^{\frac{3}{2}} - x^3\right] dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20} = (0.35)\ m^2 = Area(S)$$

3)

Supponendo che nella regione S sia presente un campo magnetico uniforme, perpendicolare al piano di S, avente intensità $B_0 = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\ T$, verificare che il valore assoluto del flusso di tale campo attraverso S è pari a $7{,}0 \cdot 10^{-3}\ Wb$.

Il valore assoluto del flusso attraverso S è dato da:

$$\Phi_S(\overrightarrow{B_0}) = B_0\ Area(S) = B_0 S = (2{,}0 \cdot 10^{-2}\ T)(0.35\ m^2) = 7{,}0 \cdot 10^{-3}\ Wb$$

4)

Supporre che la spira abbia resistenza elettrica R pari a $70\ \Omega$ e che il campo magnetico, rimanendo perpendicolare al piano di S, a partire dall'istante $t_0 = 0\ s$, inizi a variare secondo la legge:

$$B(t) = B_0\ e^{-\omega t} cos(\omega t),\ \ con\ \ \omega = \pi\ rad/s$$

e $t \geq 0$ espresso in secondi (s). Esprimere l'intensità della corrente indotta nella spira in funzione di t, specificando in quale istante per la prima volta la corrente cambia verso.
Qual è il valore massimo di tale corrente per $t \geq 0$? Spiegare quale relazione esiste tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta.

Per la legge di Fraday- Neumann-Lenz si ha:

$$i(t) = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi(B(t))}{dt}$$

Risulta:

$$\frac{d\Phi(B(t))}{dt} = \frac{d}{dt}(B_0 S\ e^{-\omega t} cos(\omega t)) = -\omega B_0 S\ e^{-\omega t} cos(\omega t) - \omega B_0 S\ e^{-\omega t} sen(\omega t) =$$

$$= -\omega B_0 S\ e^{-\omega t}\big(cos(\omega t) + sen(\omega t)\big) = -\omega B_0\ e^{-\omega t}\left(\sqrt{2} sen(\omega t + \frac{\pi}{4})\right)$$

Quindi:

$$i(t) = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi(B(t))}{dt} = \frac{1}{70} \cdot \omega B_0 S\ e^{-\omega t}\left(\sqrt{2} sen\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

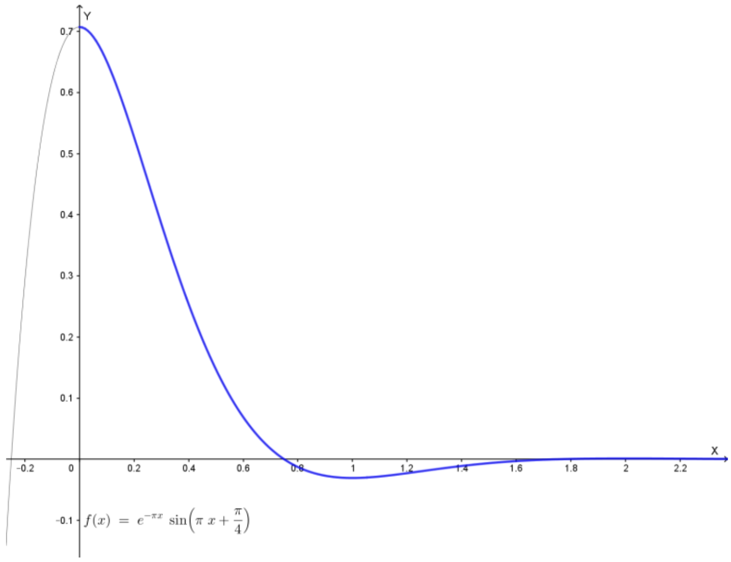
$$= \frac{\pi}{70} \cdot\ 7{,}0 \cdot 10^{-3}\ e^{-\pi t}\left(\sqrt{2} sen\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right) = (\pi \cdot 10^{-4})\ e^{-\pi t}\left(\sqrt{2} sen\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= (\pi \cdot 10^{-4})\ e^{-\pi t}\big(cos(\pi t) + sen(\pi t)\big)$$

La corrente cambia il verso la prima volta nel primo istante in cui si annulla, cioè quando:

$sen\left(\pi t+\frac{\pi}{4}\right)=0, \qquad \pi t+\frac{\pi}{4}=k\pi, \quad t=k-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0.75\ s$
$(prendendo\ k=1\ si\ ha\ il\ primo\ valore\ positivo\ di\ t)$

Osserviamo che (a meno di una costante moltiplicativa positiva) il grafico di i(t) è simile a quello della funzione $f(x)=e^{-\pi x}\ sen\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$ che è il seguente:



Per trovare il valore massimo di i cominciamo con osservare che i(t) ha infiniti massimi ed infiniti minimi relativi per effetto del fattore "smorzante" $e^{-\pi t}$ (che tende a zero per t che tende a $+\infty$): i massimi vanno diminuendo ed i minimi vanno aumentando. Il massimo di i sarà quindi il primo dei massimi relativi che si ha per t=0. Quindi:

$i_{massima}=i(0)=\ (\pi^2\cdot 10^{-4})\ A$

Studiamo la derivata prima di $i(t)=(\pi\cdot 10^{-4})\ e^{-\pi t}\big(cos(\pi t)+sen(\pi t)\big)$.

$i'(t)=(\pi\cdot 10^{-4})\big[-\pi\ e^{-\pi t}\big(cos(\pi t)+sen(\pi t)\big)+\ e^{-\pi t}(-\pi sen(\pi t)+\pi cos(\pi t))\big]=$

$=(\pi^2\cdot 10^{-4})\ e^{-\pi t}[-2sen(\pi t)]=(-2\pi^2\cdot 10^{-4})\ e^{-\pi t}sen(\pi t)\geq 0\ \ se\ \ sen(\pi t)\leq 0\,,$

$sen(\pi t)\leq 0:\quad \pi+2k\pi\leq\pi t\leq 2\pi+2k\pi,\quad 1+2k\leq t\leq 2+2k:$

se k=0: $1\leq t\leq 2$, se k=-1: -1$\leq t\leq 0$, se k=1: $3\leq t\leq 4$

Quindi, ricordando che $t\geq 0$, risulta:
$i'(t)>0$ per $1<t<2\ \ e\ \ i'(t)\leq 0\ \ per\ \ 0\leq t\leq 1$ quindi:
i(t) è decrescente da 0 a 1 e crescente da 1 a 2: il primo massimo (che è il massimo assoluto, come notato prima) si ha perciò per $t=0$, ed è $i_{massima}=i(0)=\ (\pi^2\cdot 10^{-4})\ A$.

Relazione tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta:

Se il campo aumenta, aumenta il flusso quindi, per la legge di Lenz, il verso della corrente indotta è tale da opporsi a tale aumento: il suo verso è tale da produrre un campo magnetico che ha verso opposto a quello del campo che l'ha generata. Se il campo diminuisce, diminuisce il flusso quindi, sempre per la legge di Lenz, il verso della corrente indotta è tale da opporsi a tale diminuzione: il suo verso è tale da produrre un campo magnetico che ha lo stesso verso del campo magnetico che l'ha generata.

Con la collaborazione di Angela Santamaria

SIMULAZIONE SECONDA PROVA SCRITTA – 02 APRILE 2019

Tema di MATEMATICA-FISICA

Q 1

Assegnato $k \in \mathbb{R}$, *si consideri la funzione così definita:* $g(x) = \frac{(k-1)x^3+kx^2-3}{x-1}$.

- *Come va scelto il valore di k affinché il grafico di g non abbia asintoti?*
- *Come va scelto il valore di k affinché il grafico di g abbia un asintoto obliquo?*

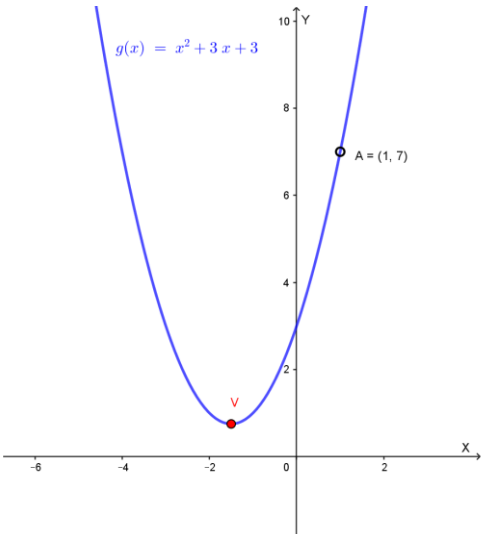
Giustificare le risposte e rappresentare, nei due casi, i grafici delle funzioni ottenute.

a) Il grafico di g non ha asintoti verticali se il limite per x che tende a 1 NON è infinito. Affinchè accada ciò è necessario che il numeratore si annulli per x=1, quindi: k-1+k-3=0, k=2.
Se k=2 la funzione diventa:

$g(x) = \frac{x^3+2x^2-3}{x-1}$
Abbassando di grado il numeratore con la regola di Ruffini e la radice x=1 abbiamo:

$$g(x) = \frac{(x-1)(x^2+3x+3)}{x-1} = x^2+3x+3 \quad con\ x \neq 1$$

Questa funzione (parabola privata del punto (1; 7)) non ha asintoti verticali, né orizzontali, né obliqui. Il vertice è $V = \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$ e la parabola taglia l'asse y in (0; 3):



b) La funzione ha un asintoto obliquo se il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore, quindi deve essere k=1. La funzione ha equazione:

$g(x) = \frac{x^2-3}{x-1}$; questa funzione (con un asintoto verticale ed uno obliquo) è un'iperbole, essendo riconducile a $y(x-1) = x^2 - 3$, che è una conica.

L'asintoto verticale ha equazione x=1. Cerchiamo l'asintoto obliquo:

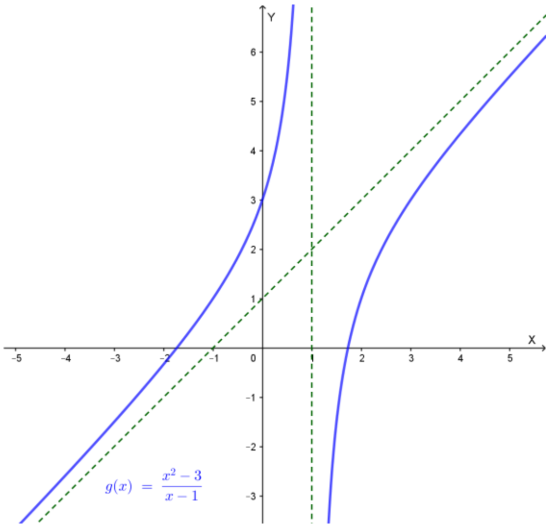
$m = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{x^2-x} = 1\,,\quad q = \lim_{x\to\infty}(g(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x-1}\right) = 1$

Asintoto obliquo: $y = x + 1$. Per x=0 si ha y=3 e per y=0 si ha $x = \pm\sqrt{3}$.

$y' = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2} > 0$ $per\ ogni\ x \neq 1; non\ ci\ sono\ massimi\ n\grave{e}\ minimi$

$y'' = -\frac{4}{(x-1)^3} > 0\ per\ \ x < 1$: concavità verso l'alto per x<1, verso il basso per x>1, nessun flesso.

Grafico:



Q 2

Sia f una funzione pari e derivabile in $\mathbb{R}$, sia g una funzione dispari e derivabile in $\mathbb{R}$. Dimostrare che la funzione f' è dispari e che la funzione g' è pari. Fornire un esempio per la funzione f ed un esempio per la funzione g, verificando quanto sopra.

Se f è pari si ha: $f(-x) = f(x)$. Dobbiamo dimostrare che la sua derivata prima è dispari, cioè che: $f'(x) = -f'(-x)$.

Ma risulta: $f'(x) = \big(f(-x)\big)' = f'(-x)(-1) = -f'(-x) \quad c.v.d$

Se g è dispari risulta: $g(x) = -g(-x)$; quindi: $g'(x) = -\big(g'(-x)(-1)\big) = g'(-x)$ quindi g' è pari.

Esempi: $f(x) = x^2,\ f'(x) = 2x\ ; \quad g(x) = x^3, \quad g'(x) = 3x^2$

Q 3

Si consideri la funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ *così definita:*

$$f(x) = \int_1^x \frac{cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t}\, dt$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f *nel suo punto di ascissa* 1.

Il punto di ascissa 1 ha ordinata $f(1) = \int_1^1 \frac{cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t}\, dt = 0$.

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha:

$$f'(x) = \frac{cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{x}$$

Quindi il coefficiente angolare della tangente è: $m = f'(1) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
Equazione tangente: $y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1)$, $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Q 4

Nello spazio tridimensionale, sia r *la retta passante per i punti* $A(-2,\ 0,\ 1)$ *e* $B(0,\ 2,\ 1)$. *Determinare le coordinate di un punto appartenente alla retta* r *che sia equidistante rispetto ai punti* $C(5,\ 1, -2)$ *e* $D(1,\ 3,\ 4)$.

I parametri direttori della retta sono: $a = 0 + 2 = 2, b = 2 - 0 = 2, c = 1 - 1 = 0$. La retta AB ha quindi equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 0 \cdot t \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Il generico punto P di r ha coordinate: $P = (-2 + 2t; 2t; 1)$. Deve essere PC=PD:

$$\sqrt{(-7 + 2t)^2 + (2t - 1)^2 + 9} = \sqrt{(-3 + 2t)^2 + (2t - 3)^2 + 9}$$

Elevando al quadrato e semplificando si ha: $t = 4$. Quindi: il punto richiesto è $P = (6; 8; 1)$.

Q 5

Emma fa questo gioco: lancia un dado con facce numerate da 1 a 6; se esce il numero 3 guadagna 3 punti, altrimenti perde 1 punto. Il punteggio iniziale è 0.

- *Qual è la probabilità che, dopo 4 lanci, il suo punteggio sia ancora 0?*
- *Qual è la probabilità che, in una sequenza di 6 lanci, il punteggio non scenda mai sotto lo 0?*

a) Affinchè il punteggio dopo 4 lanci sia 0 deve uscire una sola volta il 3, quindi si tratta di calcolare la probabilità di avere 1 successo (di probabilità 1/6) su 4 prove ripetute:

$$p = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4\cdot\frac{5^3}{6^4} = \frac{125}{324} \cong 0.386 = 38.6\ \%$$

b) Il punteggio scende sotto lo 0 se al primo lancio NON esce il 3 (probabiltà 5/6). Se al primo lancio esce il 3 (probabilità 1/6), per avere un punteggio negativo nei 4 lanci successivi deve uscire un numero diverso da 3 (probabilità $\left(\frac{5}{6}\right)^4$).

Quindi la probabilità che il punteggio scenda sotto lo 0 è: $\frac{5}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4$.

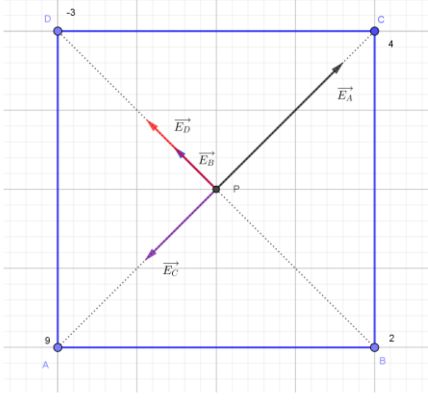
La probabilità che il punteggio NON SCENDA MAI sotto 0 è perciò:

$$p = 1-\left[\frac{5}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4\right] = 1-\frac{7105}{7776} = \frac{671}{7776} \cong 0.086 = 8{,}6\ \%.$$

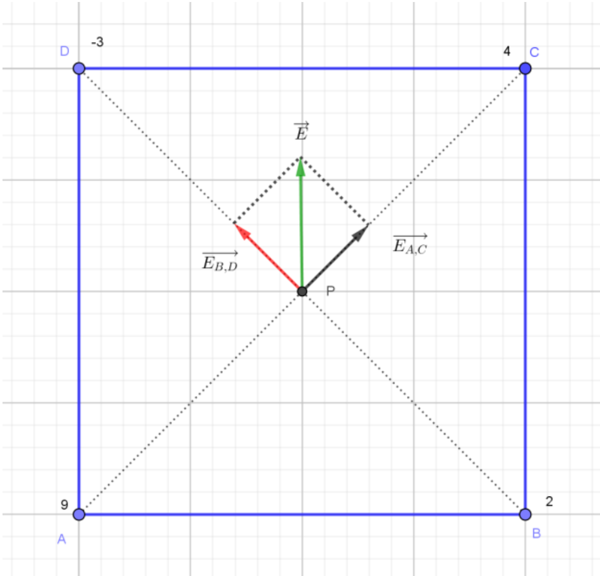
Q 6

Ai vertici di un quadrato $ABCD$, di lato 2 m, sono fissate quattro cariche elettriche. La carica in A è pari a 9 nC, la carica in B è pari a 2 nC, la carica in C è pari a 4 nC, la carica in D è pari a -3 nC. Supponendo che le cariche si trovino nel vuoto, determinare intensità, direzione e verso del campo elettrostatico generato dalle quattro cariche nel centro del quadrato.

Rappresentiamo i vettori relativi ai quattro campi elettrostatici nel centro P del quadrato (i valori indicati per le cariche sono in nC):



Osserviamo che, essendo $q_A - q_C = q_B + |q_D|$, il modulo $E_{A,C}$ del campo generato dalle cariche in A e C (diretto da P verso C) è uguale a quello, $E_{B,D}$, del campo generato da B e D (diretto da P verso D). Il campo risultante $\vec{E}$ è indicato nella figura seguente (diretto da P verso l'alto):



Indicata con r la distanza dei vertici dal centro del quadrato ($r = \frac{2}{\sqrt{2}}\, m = \sqrt{2}\, m$ e con k la costante di Coulomb ($k = 9 \cdot 10^9\ N \cdot \frac{m^2}{C^2}$), i moduli dei campi generati dalle quattro cariche sono:

$$E_A = k\frac{q_A}{r^2}\ ,\ E_B = k\frac{q_B}{r^2}\ ,\ E_C = k\frac{q_C}{r^2}\ ,\ E_D = k\frac{q_D}{r^2}$$

Quindi:

$$E_{A,C} = \frac{k}{r^2}(q_A - q_C)\ ,\ E_{B,D} = \frac{k}{r^2}(q_B + |q_D|)$$

Pertanto:

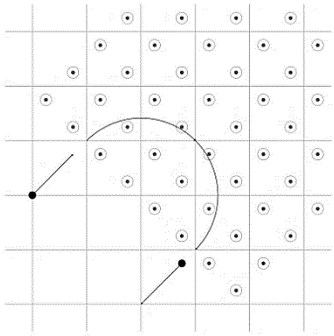
$$E = E_{A,C} \cdot \sqrt{2} = \frac{k \cdot \sqrt{2}}{r^2}(q_A - q_C) = \frac{9 \cdot 10^9\ N \cdot \frac{m^2}{C^2} \cdot \sqrt{2}}{2\ m^2}(9 \cdot 10^{-9}\ C - 4 \cdot 10^{-9} C) =$$

$$= \frac{45\sqrt{2}}{2}\ \frac{N}{C} \cong 31.8\ \frac{N}{C}\ .$$

Q 7

1. *Un protone, inizialmente in quiete, viene accelerato da una d.d.p. di 400 V ed entra, successivamente, in una regione che è sede di un campo magnetico uniforme e perpendicolare alla sua velocità.*

   La figura illustra un tratto semicircolare della traiettoria descritta dal protone (i quadretti hanno lato 1,00 m). Determinare l'intensità di $\vec{B}$.



Calcoliamo l'accelerazione del protone (carica q $= 1.602 \cdot 10^{-19}\ C$, diagonale di un quadratino $d = \sqrt{2}\, m$):

$$ma = qE = \frac{qV}{d}\ , \qquad a = \frac{q\,V}{d\,m}$$

Dalla legge di Lorentz otteniamo il legame fra il modulo del campo magnetico B con la massa della carica, la sua velocità ed il raggio R=d della traiettoria circolare:

$$qvB = m\frac{v^2}{R}\ , \qquad B = \frac{mv}{qR} \quad (con\ m\ massa\ del\ protone, \qquad m = 1.673\ \cdot\ 10^{-27}\ kg)$$

Resta da calcolare la velocità con cui il protone entra nel campo magnetico. Trattandosi di un moto uniformemente accelerato si ha:

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2\frac{q\,V}{d\,m}d} = \sqrt{2\frac{q\,V}{m}}$$

Quindi:

$$B = \frac{mv}{qR} = \frac{m}{qR}\sqrt{2\frac{q\,V}{m}} = \sqrt{2\frac{m\,V}{qR^2}} = \sqrt{2 \cdot \frac{(1.673\ \cdot\ 10^{-27}\ kg)\,(400\,V)}{(1.602\ \cdot 10^{-19}\ C)(2\,m^2)}} \cong 0.00204\,T =$$
$$= 2.04 \cdot 10^{-3}\,T = B.$$

Q 8

Si vuole ottenere l'emissione di elettroni da lastre metalliche di materiali diversi su cui incide una radiazione di frequenza $7{,}80\ \cdot 10^{14}$ Hz. Determinare, motivando la risposta, quale tra i materiali in elenco è l'unico adatto allo scopo.

Materiale	**Lavoro di estrazione**
Argento	4,8 eV
Cesio	1,8 eV
Platino	5,3 eV

Individuato il materiale da utilizzare, determinare la velocità massima che può avere un elettrone al momento dell'emissione.

Ricordiamo che per avere emissione di elettroni la radiazione incidente deve avere un'energia superiore al lavoro di estrazione W tipico del metallo in questione. Detta ν la frequenza della radiazione incidente e h la costante di Planck, deve essere:

$$h\nu > W$$

Nel nostro caso si ha:

$$h\nu = (6.626 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s)(7.80 \cdot 10^{14}\ s^{-1}) = 5.168 \cdot 10^{-19}\,J = \frac{5.168 \cdot 10^{-19}\,J}{1,602 \cdot 10^{-19}C} \cong 3.2\ eV$$

Osservando la tabella allegata, risulta $h\nu > W$ per il Cesio.

Determiniamo ora la velocità massima che può avere un elettrone al momento dell'emissione.

Detta K l'energia cinetica massima e v la velocità massima al momento dell'emissione dell'elettrone di massa m, indicata con ν_0 la "frequenza di soglia" del cesio (legata al lavoro di estrazione dalla relazione $W = h\nu_0$), risulta:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = h\nu - h\nu_0 = h\nu - W(cesio) = 3.2\ eV - 1.8eV = 1.4\ eV =$$

$$= \left(1.4\ \frac{J}{C}\right)(1,602 \cdot 10^{-19}C\ ) = 2.24 \cdot 10^{-19}\,J$$

La velocità massima richiesta è quindi:

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(2.24 \cdot 10^{-19}\,J)}{9,109 \cdot 10^{-31}\ kg}} \cong 0.701 \cdot 10^{6}\,\frac{m}{s} = 7.01 \cdot 10^{5}\,\frac{m}{s} = velocità\ massima$$

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1,602 \cdot 10^{-19}$ C
costante di Planck	h	$6,626 \cdot 10^{-34}$ J · s
costante dielettrica nel vuoto	ε_0	$8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m
massa dell'elettrone	m_e	$9,109 \cdot 10^{-31}$ kg
massa del protone	m_p	$1,673 \cdot 10^{-27}$ kg

Con la collaborazione di Angela Santamaria