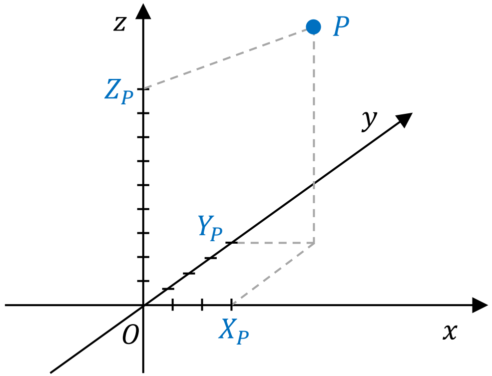
# GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO

- Punti e vettori
- Operazioni con i vettori
  - Prodotto per uno scalare
  - Somma
  - Prodotto scalare
  - Prodotto vettoriale
- Il piano
- La retta
- La sfera

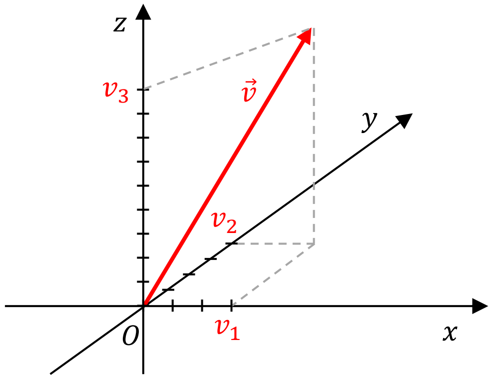
# Punti e vettori






## Coordinate del punto P

$$P = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ascissa} \\ \leftarrow \text{ordinata} \\ \leftarrow \text{quota} \end{matrix}$$

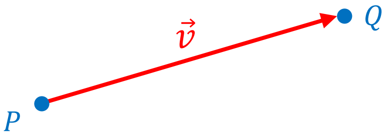



## Coordinate del vettore $\vec{v}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

(se non specificato diversamente, ci immagineremo il vettore applicato nell'origine)

**Nota Bene**




Il vettore avente origine nel punto P e la punta nel punto Q ha coordinate:

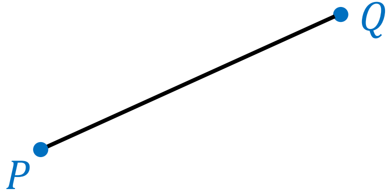
$$\vec{v} = Q - P = \begin{pmatrix} X_Q - X_P \\ Y_Q - Y_P \\ Z_Q - Z_P \end{pmatrix}$$

Il punto Q ottenuto applicando il vettore $\vec{v}$ al punto P ha coordinate:

$$Q = P + \vec{v} = \begin{pmatrix} X_P + v_1 \\ Y_P + v_2 \\ Z_P + v_3 \end{pmatrix}$$

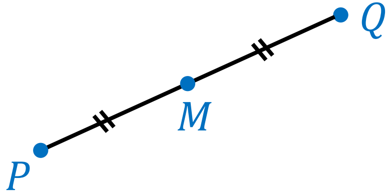
# Punti e vettori





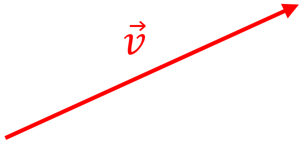

Lunghezza di un segmento PQ

$$\overline{PQ} = \sqrt{(X_Q - X_P)^2 + (Y_Q - Y_P)^2 + (Z_Q - Z_P)^2}$$




Coordinate del punto medio di un segmento PQ

$$X_M = \frac{X_P + X_Q}{2} \qquad Y_M = \frac{Y_P + Y_Q}{2} \qquad Z_M = \frac{Z_P + Z_Q}{2}$$




Lunghezza (o modulo) di un vettore $\vec{v}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$$

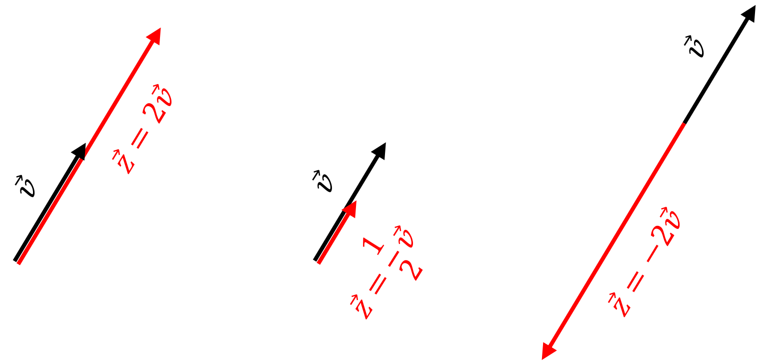
# Operazioni con i vettori



## Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

$$\textcolor{red}{\vec{z}} = k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ k \cdot v_2 \\ k \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

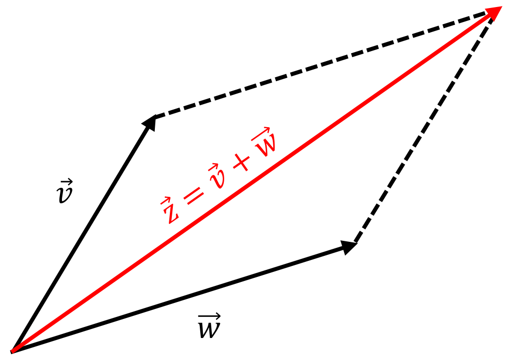
$\vec{z}$ è il vettore avente la stessa direzione di $\vec{v}$, verso concorde se $k > 0$ e discorde se $k < 0$, e modulo pari a $|k| \cdot v$.




## Somma di vettori

$$\textcolor{red}{\vec{z}} = \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{z}$ è il vettore risultante dalla regola del parallelogramma.




Vale la disuguaglianza triangolare: $|\vec{z}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$.

# Operazioni con i vettori

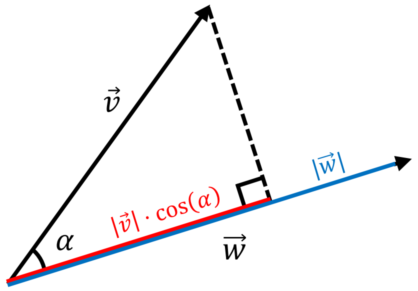


## Prodotto scalare

$$z = \vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$$

$$z = \vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\alpha)$$

Lo scalare $z$ è il prodotto della lunghezza di $\vec{w}$ per la lunghezza della proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$ (o viceversa).




$z = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{w}$
$z > 0 \iff \alpha$ è acuto
$z < 0 \iff \alpha$ è ottuso
$z$ max $\iff \vec{v} \,//\, \vec{w}$ concordi
$z$ min $\iff \vec{v} \,//\, \vec{w}$ discordi

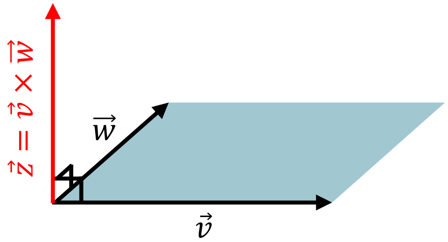
Nota bene: $z$ è uno scalare!
Il prodotto scalare è commutativo: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$.

## Prodotto vettoriale

$$\vec{z} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{z}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\alpha)$$

$\vec{z}$ è il vettore perpendicolare a $\vec{v}$ e $\vec{w}$, il cui verso è individuato dalla regola della mano destra, e la cui intensità è pari all'area del parallelogramma individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$.




$z = 0 \iff \vec{v} \,//\, \vec{w}$
$z$ max $\iff \vec{v} \perp \vec{w}$

Nota bene: $z$ è un vettore!
Il prodotto vettoriale non è commutativo: $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$.

# Vettori perpendicolari e paralleli



**Nota Bene**

Due vettori sono perpendicolari se e solo se il loro prodotto scalare è zero.

$$\vec{v} \perp \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

---

*Esempio*

*Verifica che* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ *sono perpendicolari.*

*Soluzione*

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 6 + 0 \cdot (-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{w}$$

**Nota Bene**

Due vettori sono paralleli se e solo se il loro prodotto vettoriale è zero.

$$\vec{v} \,//\, \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \times \vec{w} = 0$$

Oppure due vettori sono paralleli se e solo se uno è multiplo dell'altro.

$$\vec{v} \,//\, \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = k \cdot \vec{w}$$

---

*Esempio*

*Verifica che* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *e* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ *sono paralleli.*

*Soluzione*

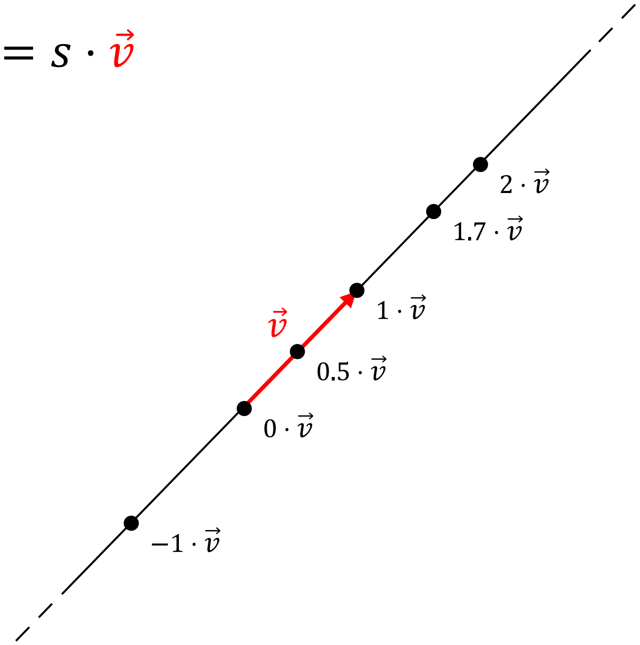
Si noti che $\vec{v} \cdot (-2) = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-2) \\ -1 \cdot (-2) \\ 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \,//\, \vec{w}$

# Combinazioni lineari di vettori



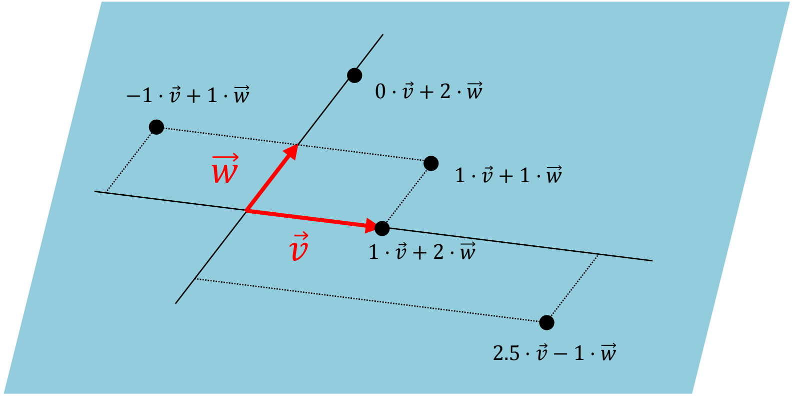
Moltiplicando un vettore $\vec{v}$ per un numero $s \in \mathbb{R}$, al variare di $s$ si ottengono tutti i punti della retta avente come direzione quel dato vettore.

$$X = s \cdot \vec{v}$$




Sommando due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ moltiplicati per due numeri $s, t \in \mathbb{R}$, al variare di $s$ e $t$ si ottengono tutti i punti del piano che giace su quei vettori.

$$X = s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$$



# Rappresentazione di un piano



**FORMA VETTORIALE.** La forma vettoriale descrive i punti X del piano come combinazioni lineari di due vettori generatori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ applicati ad un punto $P \in \pi$.

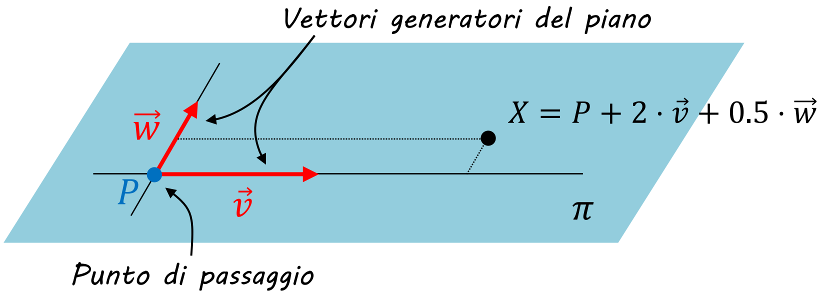
$$\pi:\ X = P + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$$

**FORMA PARAMETRICA.** La forma parametrica esplicita la relazione descritta dalla forma vettoriale, coordinata per coordinata.

$$\pi: \begin{cases} x = X_P + s v_1 + t w_1 \\ y = Y_P + s v_2 + t w_2 \\ z = Z_P + s v_3 + t w_3 \end{cases}$$

**FORMA CARTESIANA.** La forma cartesiana consiste in un'equazione in 3 incognite ($x$, $y$ e $z$) soddisfatta dalle coordinate di tutti e soli i punti del piano.

$$\pi:\ ax + by + cz + d = 0$$

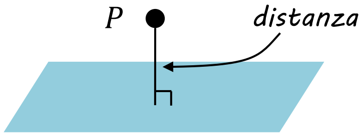



**Nota Bene**
La rappresentazione vettoriale di un piano non è unica: uno stesso piano può essere descritto da diversi punti di passaggio e diversi vettori generatori.

**Nota Bene**
Data la rappresentazione cartesiana di un piano $\pi$: $ax + by + cz + d = 0$, se $d = 0$ il piano passa per l'origine degli assi cartesiani.

**Nota Bene**
Data la rappresentazione cartesiana di un piano $\pi$: $ax + by + cz + d = 0$, la distanza di un punto $P(X_P, Y_P, Z_P)$ dal piano è data da:

$$d(P, \pi) = \frac{|aX_P + bY_P + cZ_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



# Il piano: da una forma all’altra



## da vettoriale a parametrica

V ⟷ P ⟷ C

$$\pi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{array}{c} P \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} + s \begin{array}{c} \vec{v} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array} + t \begin{array}{c} \vec{w} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{\text{Riscrivo la relazione coordinata per coordinata}} \pi: \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 2 - 2s + 2t \end{cases}$$

## da parametrica a vettoriale

V ⟷ P ⟷ C

$$\pi: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -s + t \\ z = -1 + s + 2t \end{cases} \xrightarrow{\text{Separo i termini noti e i coefficienti di } s \text{ e } t} \pi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{array}{c} P \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} + s \begin{array}{c} \vec{v} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} + t \begin{array}{c} \vec{w} \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Il piano: da una forma all'altra

## da parametrica a cartesiana

V ⟷ P ⟷ C

*Faccio sparire s e t*
*(isolo prima una e poi l'altra, sostituendole di volta in volta nelle restanti equazioni)*

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2s + t \\ z = 1 + s - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 - x \\ y = 2(1-x) + t \\ z = 1 + (1-x) - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 - x \\ t = y - 2 + 2x \\ z = 1 + (1-x) - (y - 2 + 2x) \end{cases} \Rightarrow \quad 3x + y + z - 4 = 0$$

## da cartesiana a parametrica

V ⟷ P ⟷ C

*Scelgo due delle tre variabili (x, y, z) e le pongo uguali a s e t, poi isolo la rimanente*

$$\pi: 2\underset{\substack{\downarrow \\ s}}{x} - 3\underset{\substack{\downarrow \\ t}}{y} + z - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = s \\ y = t \\ 2s - 3t + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = -2s + 3t + 2 \end{cases}$$

# Rappresentazione di una retta



**FORMA VETTORIALE.** La forma vettoriale descrive i punti X della retta come combinazioni lineari di un vettore generatore $\vec{v}$ applicato ad un punto $P \in r$.

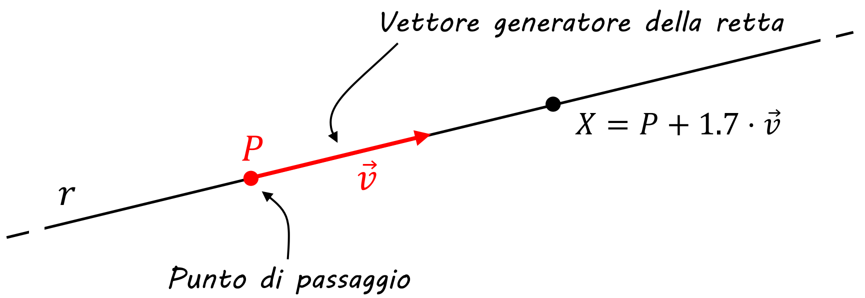
$$r\colon\ X = P + s \cdot \vec{v}$$

**FORMA PARAMETRICA.** La forma parametrica esplicita la relazione descritta dalla forma vettoriale, coordinata per coordinata.

$$r\colon \begin{cases} x = X_P + s v_1 \\ y = Y_P + s v_2 \\ z = Z_P + s v_3 \end{cases}$$

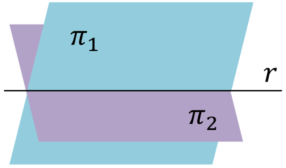
**FORMA CARTESIANA.** La forma cartesiana consiste in 2 equazioni in 3 incognite ($x$, $y$ e $z$), entrambe soddisfatte dalle coordinate di tutti e soli i punti della retta.

$$r\colon \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$




**Nota Bene**
La rappresentazione vettoriale di una retta non è unica: una stessa retta può essere descritta da diversi punti di passaggio e diversi vettori generatori.

**Nota Bene**
L'equazione cartesiana di una retta può essere interpretata come l'intersezione delle equazioni cartesiane dei due piani $\pi_1\colon a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ e $\pi_2\colon a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$.




**Nota Bene**
Per determinare i punti di intersezione tra piano e retta, o tra due rette, è sufficiente risolvere il sistema formato dalle loro equazioni. Nel caso di intersezione tra due rette, il sistema è sovradeterminato perché ha 4 equazioni in 3 incognite.

# La retta: da una forma all'altra



## da vettoriale a parametrica

V ⟷ P ⟷ C

$$r:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overset{P}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}} + s\overset{\vec{v}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow{\text{Riscrivo la relazione coordinata per coordinata}} r:\ \begin{cases} x = 1 - s \\ y = -2 + s \\ z = 1 \end{cases}$$

---

## da parametrica a vettoriale

V ⟷ P ⟷ C

$$r:\ \begin{cases} x = 3 - s \\ y = s \\ z = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{Separo i termini noti e i coefficienti di } s \text{ e } t} r:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overset{P}{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}} + s\overset{\vec{v}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

# La retta: da una forma all'altra



## da parametrica a cartesiana

V ⟷ P ⟷ C

*Faccio sparire s*
*(la isolo e la sostituisco nelle altre due equazioni)*

$$r: \begin{cases} x = 3 - s \\ y = 2s + 1 \\ z = 2 + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = x - 3 \\ y = 2(x-3) + 1 \\ z = 2 + (x-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

---

## da cartesiana a parametrica

V ⟷ P ⟷ C

*Scelgo una delle tre variabili (x, y, z) e la pongo uguale a s, poi esprimo le altre in funzione di s*

$$r: \begin{cases} 2x - \overset{s}{y} - z = 0 \\ 5x - \underset{s}{y} - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = s \\ z = 2x - s \\ 5x - s - 2(2x - s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = s \\ z = 2x - s - 1 \\ x - 3s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3s \\ y = s \\ z = 5s - 1 \end{cases}$$

# Perpendicolarità a piani e rette

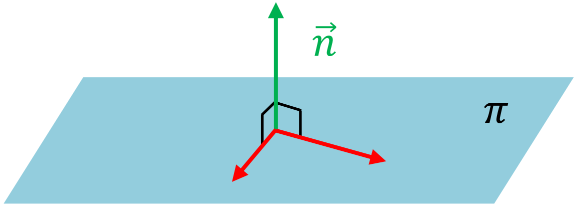


## Nota Bene

Il vettore:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

detto «vettore normale», è perpendicolare al piano di equazione cartesiana $\pi$: $ax + by + cz + d = 0$.




*Dimostrazione*

Dati due punti $P, Q \in \pi$, sia $\vec{v} = Q - P$ un generico vettore che giace sul piano: dimostriamo che $\vec{n}$ è perpendicolare a $\vec{v}$.

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{v} &= a \cdot (X_Q - X_P) + b \cdot (Y_Q - Y_P) + c \cdot (Z_Q - Z_P) = \\ &= aX_Q + bY_Q + cZ_Q - aX_P - bY_P - bZ_P = \\ &= \underbrace{aX_Q + bY_Q + cZ_Q + d}_{= 0 \text{ perché } Q \in \pi} - \underbrace{aX_P - bY_P - bZ_P - d}_{= 0 \text{ perché } P \in \pi} = 0 \end{aligned}$$

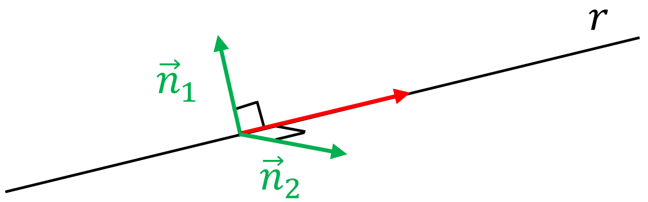
## Nota Bene

I due vettori:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

sono entrambi perpendicolari alla retta di equazioni cartesiane

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}.$$




*Dimostrazione*

I vettori $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ sono perpendicolari rispettivamente al piano $\pi_1$: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e al piano $\pi_2$: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Ma la retta $r$ giace su questi piani (essendo la loro intersezione), quindi è anch'essa perpendicolare a $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$.

# Posizioni reciproche di rette e piani



## Nota Bene

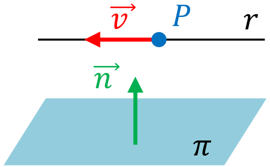
Un piano $\pi$ e una retta $r$ possono essere così posizionati:

- **La retta è parallela al piano**

$$\vec{v} \perp \vec{n} \quad \text{e} \quad P \notin \pi$$

*oppure*

Il sistema tra $\pi$ e $r$ non ha soluzioni.

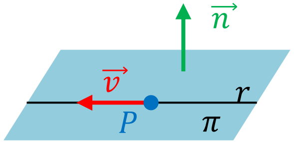



- **La retta giace sul piano**

$$\vec{v} \perp \vec{n} \quad \text{e} \quad P \in \pi$$

*oppure*

Il sistema tra $\pi$ e $r$ ha infinite soluzioni.

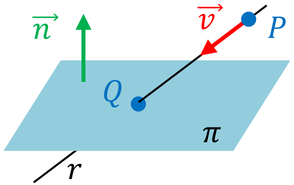



- **Incidenti**

$\vec{v}$ non è perpendicolare a $\vec{n}$

*oppure*

Il sistema tra $\pi$ e $r$ ha una soluzione.




In particolare, $r$ è **perpendicolare** a $\pi$ se $\vec{v} \,//\, \vec{n}$.

Due rette $r_1$ ed $r_2$ possono essere così posizionate:

- **Parallele**

$$\vec{v}_1 \,//\, \vec{v}_2 \quad \text{e} \quad P_1 \notin r_2$$

- **Coincidenti**

$$\vec{v}_1 \,//\, \vec{v}_2 \quad \text{e} \quad P_1 \in r_2$$

- **Sghembe**

$\vec{v}_1$ non è parallelo a $\vec{v}_2$
e il sistema tra $r_1$ ed $r_2$ non ha soluzioni.

- **Incidenti**

$\vec{v}_1$ non è parallelo a $\vec{v}_2$
e il sistema tra $r_1$ ed $r_2$ non ha soluzioni.

In particolare, $r_1$ è **perpendicolare** a $r_2$ se $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ .

Due piani $\pi_1$ e $\pi_2$ possono essere così posizionati:

- **Paralleli**

$$\vec{n}_1 \,//\, \vec{n}_2 \quad \text{e} \quad P_1 \notin \pi_2$$

- **Coincidenti**

$$\vec{n}_1 \,//\, \vec{n}_2 \quad \text{e} \quad P_1 \in \pi_2$$

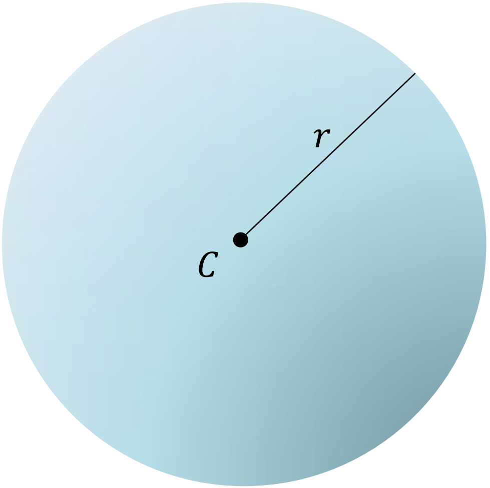
- **Incidenti**

$\vec{n}_1$ non è parallelo a $\vec{n}_2$

In particolare, $\pi_1$ è **perpendicolare** a $\pi_2$ se $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$.

# Equazione della sfera






**FORMA ESPLICITA**

$$\mathcal{S}:\ (x-X_C)^2+(y-Y_C)^2+(z-Z_C)^2=r^2$$

**FORMA IMPLICITA**

$$\mathcal{S}:\ x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

Lunghezza del raggio

$$r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2+\left(-\frac{c}{2}\right)^2-d}$$

Coordinate del centro

$$X_C=-\frac{a}{2}\qquad Y_C=-\frac{b}{2}\qquad Y_C=-\frac{c}{2}$$

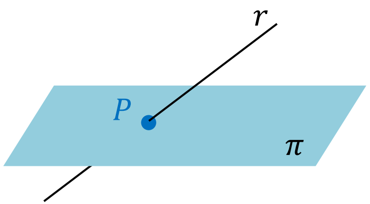
**Nota Bene** La sfera esiste se e solo se è verificata la condizione: $\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2+\left(-\frac{c}{2}\right)^2-d\geq 0$

# Intersezione tra retta e piano



*1. Determina le coordinate del punto di intersezione tra la retta* $r\colon \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$

*e il piano* $\pi\colon \begin{cases} x = 1 - s \\ y = s + t \\ z = t \end{cases}$.




***Soluzione***

Trasformo in forma cartesiana le equazioni che non lo sono (in questo caso, quelle del piano).

$$\pi\colon \begin{cases} x = 1 - s \\ y = s + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 - x \\ y = 1 - x + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 - x \\ t = x + y - 1 \\ z = x + y - 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \pi\colon\ x + y - z - 1 = 0$$

Metto a sistema le equazioni della retta e l'equazione del piano, per trovare la soluzione (il punto) in comune.

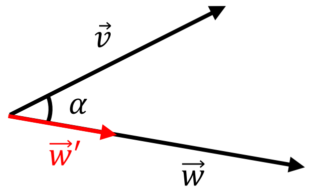
$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + z \\ x - (2x + z) - 2z = 0 \\ x + (2x + z) - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + z \\ x + 3z = 0 \\ 3x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + z \\ z = -\frac{1}{3}x \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{5}{9} \\ z = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

Il punto di intersezione ha coordinate $P\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{9}, -\frac{1}{9}\right)$.

# Angolo tra due vettori



*2. Determina l'ampiezza dell'angolo compreso tra i vettori* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.




***Soluzione***

Sostituisco il vettore $\vec{w}$ con il vettore $\vec{w}' = \frac{1}{5}\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ che ha coordinate più semplici e, essendo parallelo a $\vec{w}$, forma con $\vec{v}$ lo stesso angolo che formano $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Calcolo il prodotto scalare tra $\vec{v}$ e $\vec{w}'$: $\quad \vec{v} \cdot \vec{w}' = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = -2$

Calcolo il modulo di $\vec{v}$ e $\vec{w}'$: $\quad |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$$|\vec{w}'| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

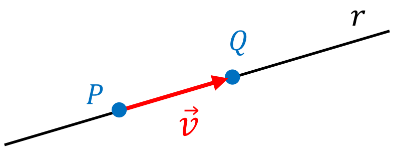
Utilizzo la seconda formula del prodotto scalare:

$$\vec{v} \cdot \vec{w}' = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}'| \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}'}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}'|} = \frac{-2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{12}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125.3°$$

# Determinare l’equazione di una retta

*3. Determina l’equazione cartesiana della retta passante per* $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ *e* $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .




***<u>Soluzione</u>***

Il vettore $\vec{v} = Q - P$ è un generatore della retta: $\vec{v} = Q - P = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-0 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Anche un qualsiasi vettore $k \cdot \vec{v}$ è un generatore della retta, perché moltiplicando un vettore per uno scalare la sua direzione non cambia.

Posso ad esempio utilizzare il vettore $\vec{v}\,' = -\frac{1}{2}\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, che ha coordinate più semplici, come generatore della retta.

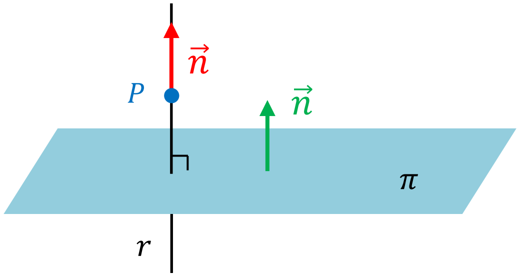
Inoltre si sa che $P$ (o $Q$) è un punto di passaggio. La retta cercata ha quindi equazione:

$$r:\ X = P + s \cdot \vec{v}\,' \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -s \\ z = 5 + 2s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 + y \\ s = y \\ z = 5 + 2y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r: \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 2y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

# Determinare l’equazione di una retta



*4. Determina l’equazione della retta passante per* $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e perpendicolare a* $\pi: x + 2y - 2z + 5 = 0$ .




***Soluzione***

Il vettore normale del piano $\vec{n}$ è un generatore della retta: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

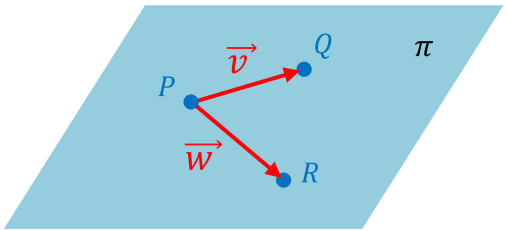
Inoltre si sa che $P$ è un punto di passaggio. La retta cercata ha quindi equazione:

$$r: \; X = P + s \cdot \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = -2s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = x - 1 \\ y = 1 + 2(x-1) \\ z = -2(x-1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r: \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 2x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

# Determinare l'equazione di un piano



*5. Determina l'equazione cartesiana del piano passante per* $P=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ *e* $R=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ .




***Soluzione***

I vettori $\vec{v}=Q-P$ e $\vec{w}=R-P$ (o anche $Q-R$) sono due generatori del piano:

$$\vec{v}=Q-P=\begin{pmatrix}1-(-1)\\2-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{w}=R-P=\begin{pmatrix}0-(-1)\\-1-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

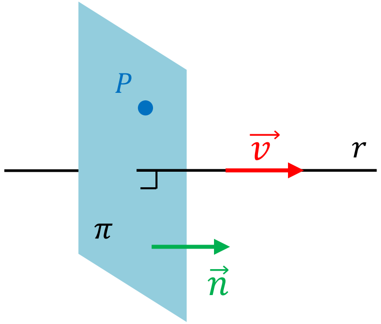
Come nell'es. 3, per comodità sostituisco il vettore $\vec{v}$ con il vettore parallelo $\vec{v}'=\frac{1}{2}\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Inoltre si sa che $P$ (o $Q$, o $R$) è un punto di passaggio. Il piano cercato ha quindi equazione:

$$\pi\colon\ X=P+s\cdot\vec{v}'+t\cdot\vec{w} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x=-1+s+t\\y=s-t\\z=t\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x=-1+s+z\\y=s-z\\z=t\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \pi\colon\ x-y-2z+1=0$$

# Determinare l'equazione di un piano






*6. Determina l'equazione del piano passante per* $P=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ *e perpendicolare a* $r\colon \begin{cases} x-2y+z=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$.

## ***Soluzione***

Determino il vettore $\vec{v}$ generatore della retta, trasformando la sua equazione in forma vettoriale.

$$r\colon \begin{cases} x-2y+z=0 \\ y+z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+s=0 \\ y+s-2=0 \\ z=s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4-3s \\ y=2-s \\ z=s \end{cases} \Rightarrow r\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

Poiché la retta è perpendicolare al piano, possiamo supporre che: $\vec{n}=\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow a=-3, \quad b=-1, \quad c=1$

Determiniamo l'ultimo parametro $d$ nell'equazione cartesiana di $\pi$ imponendo il passaggio del piano per P.

$$\pi\colon\ -3x-y+z+d=0 \quad \Rightarrow \quad -3\cdot(2)-(0)+(1)+d=0 \quad \Rightarrow \quad d=5$$

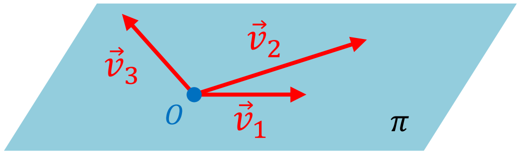
se $P\in\pi$ le sue coordinate devono soddisfare l'eq. di $\pi$

$$\Rightarrow \quad \pi\colon\ -3x-y+z+5=0$$

# Vettori complanari



*7. Stabilisci se i vettori* $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *e* $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ *sono complanari.*




***Soluzione***

Determino l'equazione cartesiana del piano $\pi$ generato da $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e passante per l'origine (in altre parole, l'equazione del piano che contiene tutte le combinazioni lineari di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$).

$$\pi:\; X = O + s \cdot \vec{v}_1 + t \cdot \vec{v}_2 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = s + t \\ y = t \\ z = -2s - t \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} s = x - y \\ t = y \\ z = -2s - t \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} s = x - y \\ t = y \\ z = -2(x-y) - y \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \pi:\; 2x - y + z = 0$$

Verifico se $\vec{v}_3$ appartiene a $\pi$ (in altre parole, verifico se $\vec{v}_3$ è combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$).

Sostituisco le coordinate di $\vec{v}_3$ nell'equazione di $\pi$: $\quad 2 \cdot 3 - 2 + (-4) = 0 \;\checkmark \quad\Rightarrow\quad \vec{v}_3 \in \pi \quad\Rightarrow\quad$ $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ sono complanari.

***Soluzione alternativa***

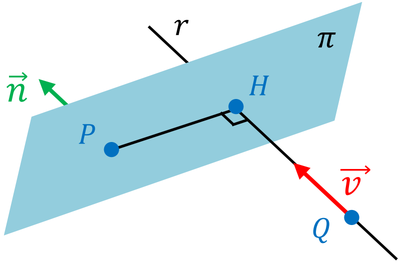
Si riesce a stabilire se $\vec{v}_3$ è combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ ricercando degli opportuni coefficienti $s$ e $t$:

$$1 \cdot \vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{v}_3 \quad\Rightarrow\quad \vec{v}_1,\ \vec{v}_2 \text{ e } \vec{v}_3 \text{ sono complanari.}$$

# Distanza di un punto da una retta



*8. Determina la distanza tra* $P = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ *e* $r\colon \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$.




***Soluzione***

Determino il vettore $\vec{v}$ generatore di $r$, trasformando la sua equazione in forma vettoriale.

$$r\colon \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y + {\color{red}z} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y + s - 1 = 0 \\ z = s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 - s \\ z = s \end{cases} \Rightarrow r\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{Q} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

Determino l'equazione del piano $\pi$, perpendicolare a $r$ e passante per $P$, con il metodo descritto nell'es. 6.

$${\color{green}\vec{n}} = {\color{red}\vec{v}} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \pi\colon\ x - y + z + {\color{red}d} = 0 \Rightarrow (1) - (2) + (0) + {\color{red}d} = 0 \Rightarrow {\color{red}d} = 1 \Rightarrow \pi\colon\ x - y + z + 1 = 0$$

Interseco $\pi$ e $r$ per trovare le coordinate di $H$, punto di minima distanza tra $P$ e $r$.

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ y + z - 1 = 0 \\ (2 - y) - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ y + z - 1 = 0 \\ 3 - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ z = 1 - y \\ 3y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Calcolo la lunghezza del segmento $PH$.

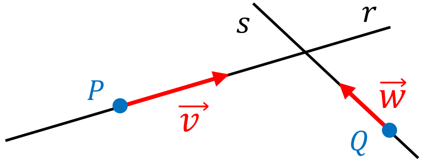
$$\overline{PH} = \sqrt{\left(1 - \tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(2 + \tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(0 - \tfrac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{7}{3}\right)^2 + \left(-\tfrac{4}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{66}}{3}$$

# Posizione reciproca di rette



*9. Stabilisci se le seguenti rette sono parallele, incidenti o sghembe:*

$$r: \begin{cases} x+z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases} \qquad s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \underset{\vec{w}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$




***<u>Soluzione</u>***

Determino il vettore generatore di $r$.

$$r: \begin{cases} x+z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+s=1 \\ x-y-s=0 \\ z=s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-s \\ y=1-2s \\ z=s \end{cases} \Rightarrow r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \underset{\vec{v}}{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Siccome il vettore $\vec{v}$ non è multiplo di $\vec{w}$, i vettori (e quindi anche le rette $r$ ed $s$) non sono paralleli.

Risolvo il sistema tra le equazioni di $r$ ed $s$ per vedere se hanno soluzioni in comune. Per ottenere un sistema semplice da risolvere, conviene utilizzare le equazioni in forma parametrica: il parametro $s$ può però assumere valori diversi nelle equazioni delle due rette. Utilizzo quindi due variabili diverse, $h$ e $k$, al posto di $s$.

$$\begin{cases} 1-h=1-k \\ 1-2h=2k \\ h=2-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=k \\ 1-2k=2k \\ k=2-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=k \\ 4k=1 \\ 2k=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=k \\ k=\frac{1}{4} \\ k=1 \end{cases}$$

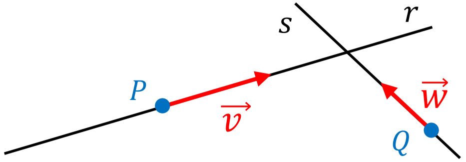
Il sistema è impossibile (le ultime due equazioni non sono compatibili). Non essendoci punti in comune, le rette sono sghembe.

# Distanza tra due rette sghembe



*10. Determina la distanza tra le due rette sghembe aventi equazione vettoriale:*

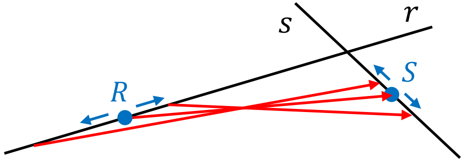
$$r\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P} + h \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \qquad s\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{Q} + k \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}}$$




***<u>Soluzione</u>***

Determino le coordinate di due generici punti $R \in r$ e $S \in s$, e del vettore $\overrightarrow{RS}$:

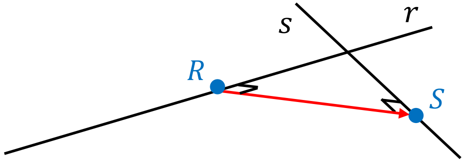
$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+h \\ h \end{pmatrix} \in r \qquad S = \begin{pmatrix} 2k \\ 0 \\ 1+k \end{pmatrix} \in s \qquad \overrightarrow{RS} = S - R = \begin{pmatrix} 2k-1 \\ -1-h \\ 1+k-h \end{pmatrix}$$




Il segmento di minima distanza tra le due rette è quello perpendicolare ad entrambe.

Impongo allora che il vettore $\overrightarrow{RS}$ sia perpendicolare sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot \vec{v} = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \cdot (2k-1) + 1 \cdot (-1-h) + 1 \cdot (1+k-h) = 0 \\ 2 \cdot (2k-1) + 0 \cdot (-1-h) + 1 \cdot (1+k-h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{1}{9} \\ k = \frac{2}{9} \end{cases}$$




Coi valori di $h$ e $k$ trovati, sono determinati i punti $R$ ed $S$ di minima distanza.

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{10}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ 0 \\ \frac{11}{9} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{RS} = \sqrt{\left(\frac{4}{9} - 1\right)^2 + \left(0 - \frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{11}{9} - \frac{1}{9}\right)^2} = \frac{15}{9}$$