La parabola

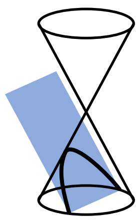
- **Definizione**

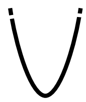
La parabola è il luogo dei punti che hanno la stessa distanza da una retta (detta **direttrice**) e da un punto (detto **fuoco**).

In simboli, è il luogo dei punti P che soddisfano la condizione:

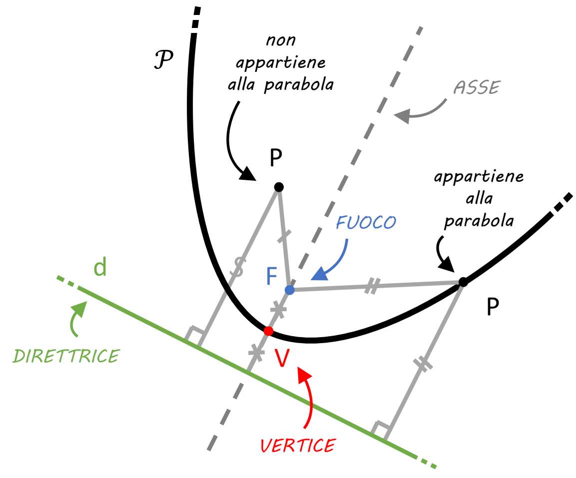
$$d(P,d) = \overline{PF}$$

La parabola è una conica, cioè si può ottenere dall'intersezione tra un cono e un piano.





Parabola



- **Equazione della parabola con asse parallelo all'asse y**

La seguente equazione rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse y:

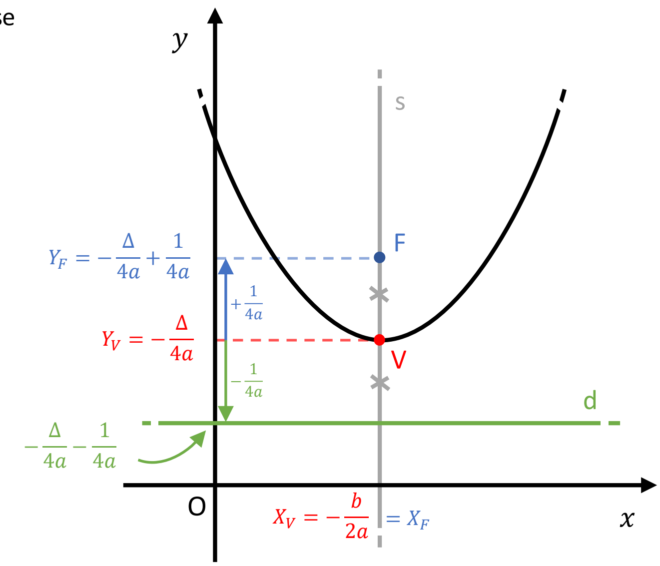
$$y = ax^2 + bx + c$$

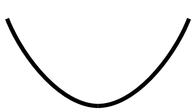
COORDINATE DEL VERTICE $\qquad V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ $\quad \Delta \rightarrow b^2 - 4ac$

COORDINATE DEL FUOCO $\qquad F\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}\right)$

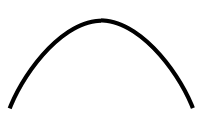
EQUAZIONE DELLA DIRETTRICE $\qquad d\colon\ y = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}$

EQUAZIONE DELL'ASSE $\qquad s\colon\ x = -\frac{b}{2a}$

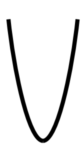




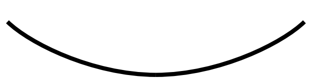
Se $a > 0$ «ride»
(ha concavità rivolta verso l'alto)



Se $a < 0$ «piange»
(ha concavità rivolta verso il basso)

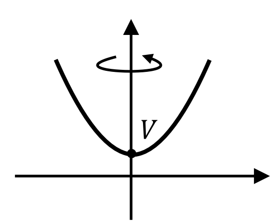


Più a è grande, più la parabola è «stretta»

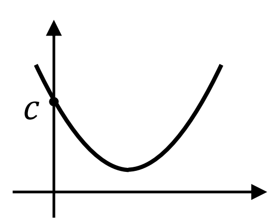


Più a è piccolo, più la parabola è «larga»

Se $b = 0$ è simmetrica rispetto all'asse y, e V appartiene all'asse y



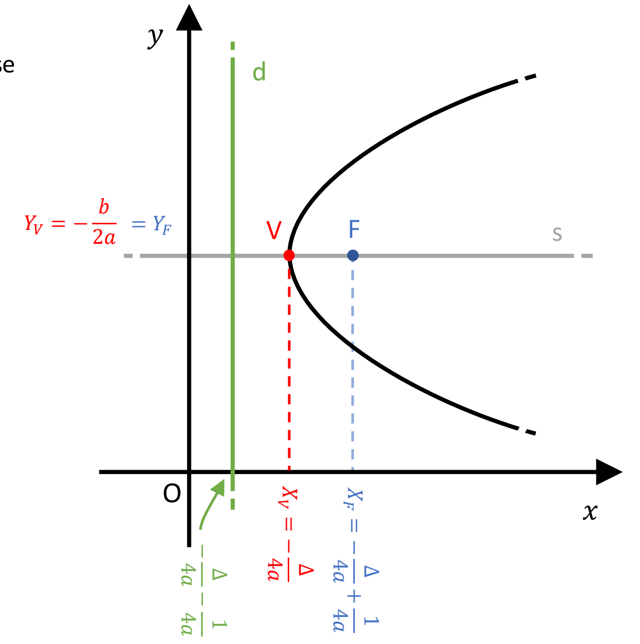
c è l'intercetta, cioè l'ordinata del punto di intersezione con l'asse y



• Equazione della parabola con asse parallelo all'asse x

La seguente equazione rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse x:

$$x = ay^2 + by + c$$

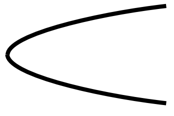


COORDINATE DEL VERTICE $V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$

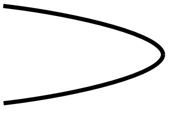
COORDINATE DEL FUOCO $F\left(-\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$

EQUAZIONE DELLA DIRETTRICE $d\colon\ x = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}$

EQUAZIONE DELL'ASSE $s\colon\ y = -\frac{b}{2a}$

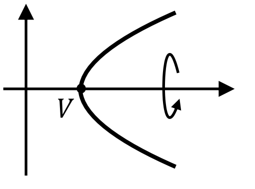


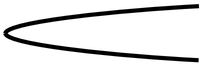
Se $a > 0$ «ride»
(ha concavità rivolta verso destra)



Se $a < 0$ «piange»
(ha concavità rivolta verso sinistra)

Se $b = 0$ è simmetrica rispetto all'asse x,
e V appartiene all'asse x

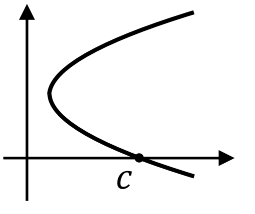




Più a è grande, più la parabola è «stretta»

Più a è piccolo, più la parabola è «larga»

c è l'intercetta,
cioè l'ordinata del punto di intersezione con l'asse x



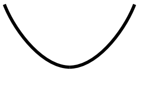
• Come disegnare l'equazione di una parabola

$$y = x^2 - 4x + 3$$

1. CONCAVITÀ

Osserva il segno di a per sapere se la parabola «ride» o «piange».

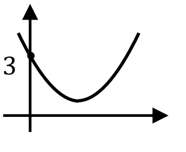
$a > 0 \quad \Rightarrow \quad$ La concavità è rivolta verso l'alto



2. INTERCETTA

Il valore di c ti dice dove la parabola interseca l'asse y.

$c = 3 \quad \Rightarrow \quad$ Interseca l'asse y in $(0; 3)$



3. VERTICE

Determina le coordinate del vertice utilizzando le formule...

$$X_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2 \qquad Y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \cancel{-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{(-4)^2-4(1)(3)}{4(1)}} = -\frac{4}{4} = -1$$

...ma per determinare Y_V è più conveniente sostituire X_V (appena trovata) nell'equazione della parabola:

$$Y_V = (2)^2 - 4(2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

4. INTERSEZIONI CON L'ASSE X

Determina le intersezioni con l'asse x risolvendo il sistema tra l'equazione della parabola e quella dell'asse x:

$$\begin{cases} y = 0 & \leftarrow \textit{Asse } x \\ y = x^2 - 4x + 3 & \leftarrow \textit{Parabola} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow$$

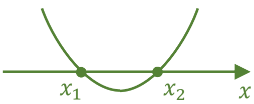
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4 > 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Possono verificarsi tre casi:

Se $\Delta > 0$

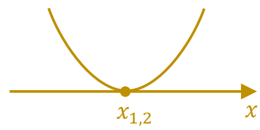
SECANTE



due soluzioni $\longrightarrow$ due intersezioni

Se $\Delta = 0$

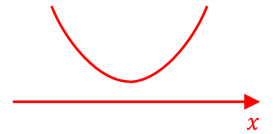
TANGENTE



una soluzione $\longrightarrow$ un'intersezione

Se $\Delta < 0$

ESTERNA



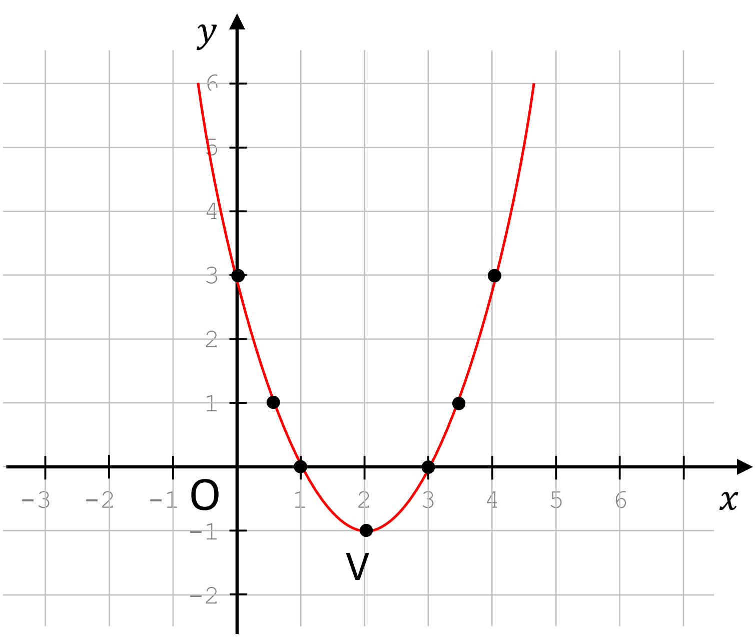
zero soluzioni $\longrightarrow$ zero intersezioni

5. ALTRI PUNTI

Posso determinare altri punti sostituendo valori a mia scelta ad x o ad y nell'equazione della parabola.

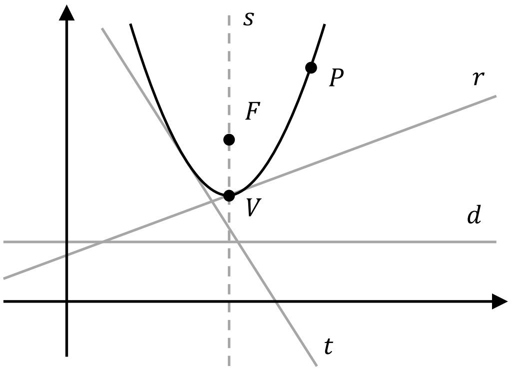
x	y
4	$y = (4)^2 - 4(4) + 3 = 3$
5	$y = (5)^2 - 4(5) + 3 = 8$
$x_{1,2} = \cdots \approx \begin{cases} 0{,}6 \\ 3{,}4 \end{cases}$	1

GRAFICO:



• Come determinare l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y

$$y = ax^2 + bx + c$$



…NOTE LE COORDINATE DEL VERTICE V

$$\left.\begin{array}{l} X_V = 5 \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{b}{2a} = 5 \\[2ex] Y_V = 2 \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{\Delta}{4a} = 2 \end{array}\right\}$$

Se sono note entrambe le coordinate del vertice, spesso conviene rimpiazzare la seconda equazione con la seguente:

$$V(5;2) \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad 2 = a \cdot (5)^2 + b \cdot (5) + c$$

…NOTE LE COORDINATE DEL FUOCO F

$$X_F = 5 \quad \Rightarrow \quad -\frac{b}{2a} = 5$$

$$Y_F = 3 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a} = 3$$

…NOTA L'EQUAZIONE DELLA DIRETTRICE d

$$d\colon\ y = 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a} = 1$$

…NOTA L'EQUAZIONE DELL'ASSE DI SIMMETRIA s

$$s\colon\ x = 5 \quad \Rightarrow \quad -\frac{b}{2a} = 5$$

…NOTO UN PUNTO DI PASSAGGIO P

$$P(7;3) \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad 3 = a \cdot (7)^2 + b \cdot (7) + c$$

…NOTA L'EQUAZIONE DI UNA RETTA r A CUI APPARTIENE IL VERTICE

$$r\colon\ 2x - 3y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{\Delta}{4a}\right) + 1 = 0$$

…NOTA L'EQUAZIONE DI UNA RETTA t TANGENTE ALLA PARABOLA

$$t\colon\ y = -2x + 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta_{EQUAZIONE\ ASSOCIATA} = 0$$