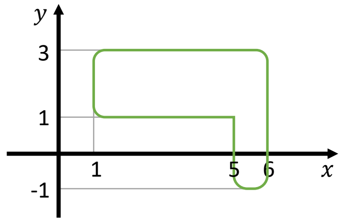
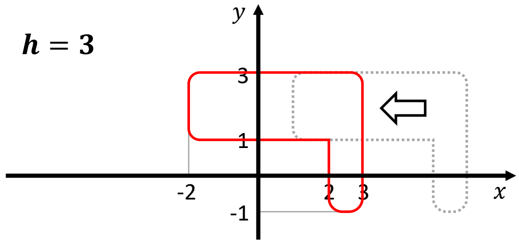
# Trasformazioni e curve implicite




## TRASLAZIONI $(h > 0)$

### $x \longmapsto x + h$

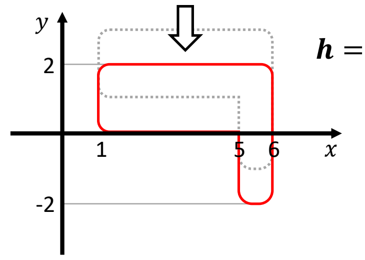
$h = 3$




Si trasla a sinistra sottraendo $h$ a tutte le ascisse
($x \longmapsto x - h$ è una traslazione verso destra)

### $y \longmapsto y + h$

$h = 1$

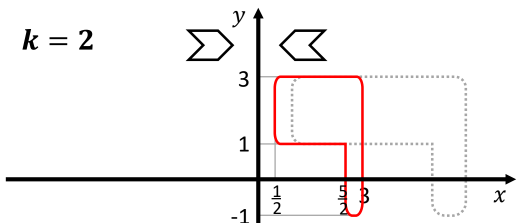



Si trasla verso il basso sottraendo $h$ a tutte le ordinate
($y \longmapsto y - h$ è una traslazione verso l'alto)

## DILATAZIONI $(k > 0)$

### $x \longmapsto k \cdot x$

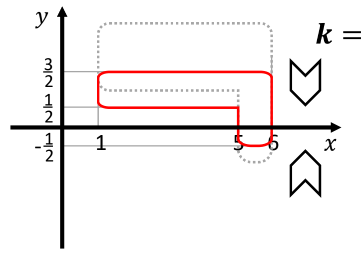
$k = 2$




Si dividono per $k$ tutte le ascisse
(se $x \longmapsto x/k$ si moltiplicano per $k$ le ascisse)

### $y \longmapsto k \cdot y$

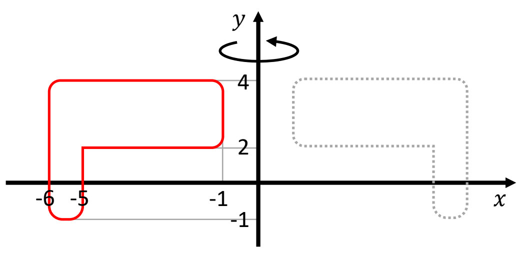
$k = 2$




Si dividono per $k$ tutte le ordinate
(se $y \longmapsto y/k$ si moltiplicano per $k$ le ordinate)

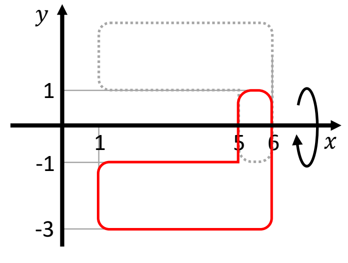
## RIFLESSIONI

### $x \longmapsto -x$




Si cambia il segno di tutte le ascisse

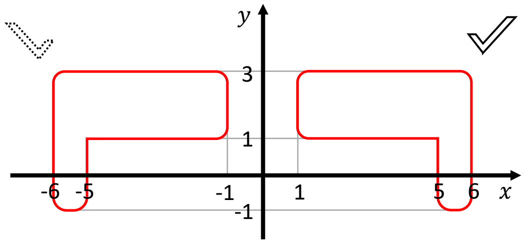
### $y \longmapsto -y$




Si cambia il segno di tutte le ordinate

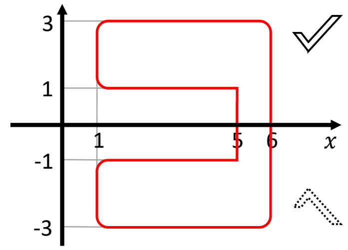
## VAL. ASSOLUTI

### $x \longmapsto |x|$




La parte di grafico con $x > 0$ rimane inalterata. La parte con $x < 0$ viene sostituita con il riflesso della parte con $x > 0$

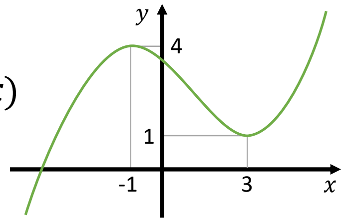
### $y \longmapsto |y|$




La parte di grafico con $y > 0$ rimane inalterata. La parte con $y < 0$ viene sostituita con il riflesso della parte con $y > 0$

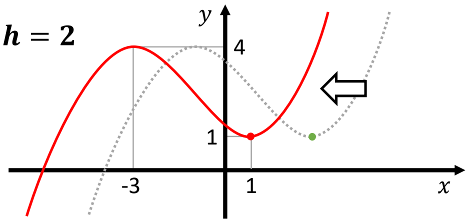
# Trasformazioni e funzioni

$$y = f(x)$$



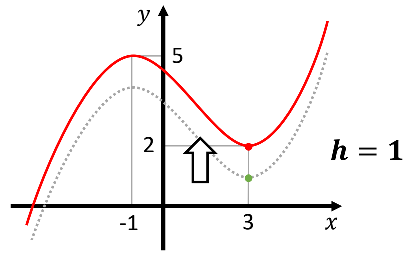

## TRASLAZIONI $(h > 0)$

$$f(x) \longmapsto f(x+h)$$




Si trasla a sinistra sottraendo $h$ a tutte le ascisse
($x \longmapsto x - h$ è una traslazione verso destra)

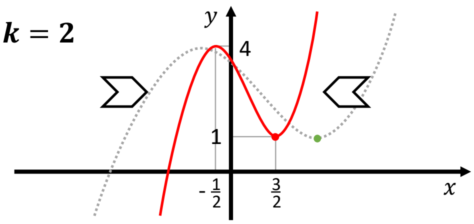
$$f(x) \longmapsto f(x) + h$$




Si trasla verso l'alto sommando $h$ a tutte le ordinate
($f(x) \longmapsto f(x) - h$ è una traslazione verso il basso)

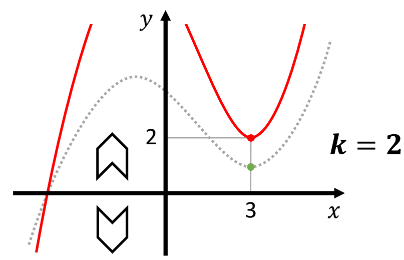
## DILATAZIONI $(k > 0)$

$$f(x) \longmapsto f(k \cdot x)$$




Si dividono per $k$ tutte le ascisse
(se $x \longmapsto x/k$ si moltiplicano per $k$ le ascisse)

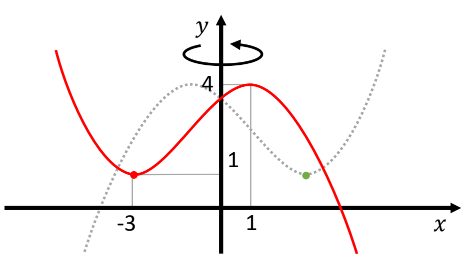
$$f(x) \longmapsto k \cdot f(x)$$




Si moltiplicano per $k$ tutte le ordinate
(se $f(x) \longmapsto f(x)/k$ si dividono per $k$ le ordinate)

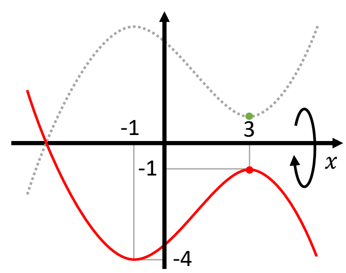
## RIFLESSIONI

$$f(x) \longmapsto f(-x)$$




Si cambia il segno di tutte le ascisse

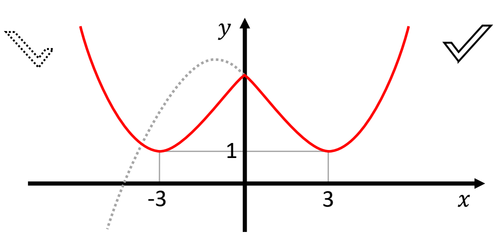
$$f(x) \longmapsto -f(x)$$




Si cambia il segno di tutte le ordinate

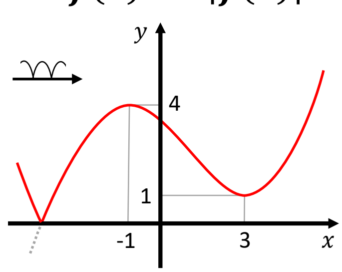
## VAL. ASSOLUTI

$$f(x) \longmapsto f(|x|)$$




La parte di grafico con $x > 0$ rimane inalterata. La parte con $x < 0$ viene sostituita con il riflesso della parte con $x > 0$

$$f(x) \longmapsto |f(x)|$$




La parte di grafico con $y > 0$ rimane inalterata.
La parte con $y < 0$ viene riflessa sopra l'asse $y$

- **Esempio**

Disegnare il grafico della funzione $y = (2x+8)^2$ .

*La funzione si ottiene a partire da $y = x^2$ e applicando due trasformazioni ad $x$. In che ordine vanno eseguite?*

**Ipotesi 1**

$$y = x^2$$
$$\Downarrow \quad x \longmapsto 2\cdot x$$
$$y = (2x)^2$$
$$\Downarrow \quad x \longmapsto x+8$$
$$y = (2(x+8))^2$$

*Non è la funzione desiderata...*

**Ipotesi 2**

1 $$y = x^2$$
$$\Downarrow \quad x \longmapsto x+8$$
2 $$y = (x+8)^2$$
$$\Downarrow \quad x \longmapsto 2\cdot x$$
3 $$y = (2x+8)^2$$

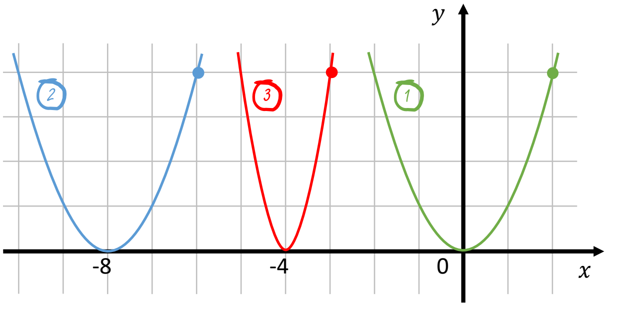
*È la funzione desiderata!*

Punto di controllo

$$P_1 = (2;4)$$
$$\Downarrow$$
$$P_2 = (-6;4)$$
$$\Downarrow$$
$$P_3 = (-3;4)$$

*Verifico se il punto di controllo appartiene al grafico finale:*

$$4 = (2\cdot(-3)+4)^2$$
$$4 = (-2)^2$$
✓




- **Esempio**

Disegnare il grafico della funzione $y = |x^2-1|$ .

*La funzione si ottiene a partire da $y = x^2$ e applicando due trasformazioni ad $f(x)$. In che ordine vanno eseguite?*

**Ipotesi 1**

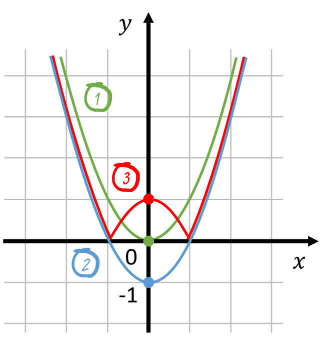
1 $$y = x^2$$
$$\Downarrow \quad f(x) \longmapsto f(x)-1$$
2 $$y = x^2-1$$
$$\Downarrow \quad f(x) \longmapsto |f(x)|$$
3 $$y = |x^2-1|$$

*È la funzione desiderata!*

**Ipotesi 2**

$$y = x^2$$
$$\Downarrow \quad f(x) \longmapsto |f(x)|$$
$$y = |x^2|$$
$$\Downarrow \quad f(x) \longmapsto f(x)-1$$
$$y = |x^2|-1$$

*Non è la funzione desiderata...*




Punto di controllo

$$P_1 = (0;0)$$
$$\Downarrow$$
$$P_2 = (0;-1)$$
$$\Downarrow$$
$$P_3 = (0;1)$$

*Verifico se il punto di controllo appartiene al grafico finale:*

$$1 = |0^2-1|$$
$$1 = 1$$
✓

- **Esempio**

Scrivere nell'ordine corretto la «scaletta» delle trasformazioni necessarie per ottenere il grafico della funzione: $y = -2^{-|x|} + 3$.

$$
\begin{array}{cc}
y = 2^{x} & \\
\Downarrow & x \longmapsto -x \\
y = 2^{-x} & \\
\Downarrow & x \longmapsto |x| \\
y = 2^{-|x|} & \\
\Downarrow & f(x) \longmapsto -f(x) \\
y = -2^{-|x|} & \\
\Downarrow & f(x) \longmapsto f(x) + 3 \\
y = -2^{-|x|} + 3 &
\end{array}
$$

- **Esempio**

Scrivere nell'ordine corretto la «scaletta» delle trasformazioni necessarie per ottenere il grafico della funzione:

$$y = 5 \cdot |-3 \cdot \operatorname{sen}(2|-x+\pi| + 2\pi) - 1|$$

$$
\begin{array}{cc}
y = \operatorname{sen}(x) & \\
\Downarrow & x \longmapsto x + 2\pi \\
y = \operatorname{sen}(x + 2\pi) & \\
\Downarrow & x \longmapsto 2 \cdot x \\
y = \operatorname{sen}(2x + 2\pi) & \\
\Downarrow & x \longmapsto |x| \\
y = \operatorname{sen}(2|x| + 2\pi) & \\
\Downarrow & x \longmapsto x + \pi \\
y = \operatorname{sen}(2|x+\pi| + 2\pi) & \\
\Downarrow & x \longmapsto -x \\
y = \operatorname{sen}(2|-x+\pi| + 2\pi) & \\
\Downarrow & f(x) \longmapsto 3 \cdot f(x) \\
y = 3 \cdot \operatorname{sen}(2|-x+\pi| + 2\pi) & \\
\Downarrow & f(x) \longmapsto -f(x) \\
y = -3 \cdot \operatorname{sen}(2|-x+\pi| + 2\pi) & \\
\Downarrow & f(x) \longmapsto f(x) - 1 \\
y = -3 \cdot \operatorname{sen}(2|-x+\pi| + 2\pi) - 1 & \\
\Downarrow & f(x) \longmapsto |f(x)| \\
y = |-3 \cdot \operatorname{sen}(2|-x+\pi| + 2\pi) - 1| & \\
\Downarrow & f(x) \longmapsto 5 \cdot f(x) \\
y = 5 \cdot |-3 \cdot \operatorname{sen}(2|-x+\pi| + 2\pi) - 1| &
\end{array}
$$

- **Nota Bene**

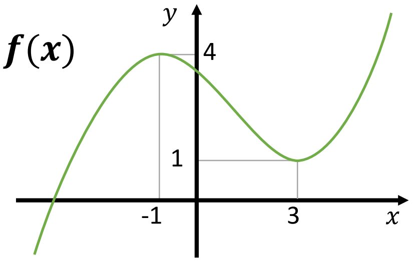
*Le trasformazioni che riguardano $x$ modificano solo $x$ (ad esempio: cambiano il segno della sola $x$, moltiplicano per 2 la sola $x$...) e per questo è corretto applicarle dalla più «lontana» alla più «vicina».*

*Le trasformazioni che riguardano $f(x)$ modificano tutta l'espressione al secondo membro (ad esempio: cambiano il segno di tutto il secondo membro, moltiplicano per 2 tutto il secondo membro...) e per questo è corretto applicarle dalla più «vicina» alla più «lontana».*

*Le trasformazioni che riguardano la $x$ e quelle che riguardano f(x) commutano tra loro.*

# Altre trasformazioni riguardanti $f(x)$

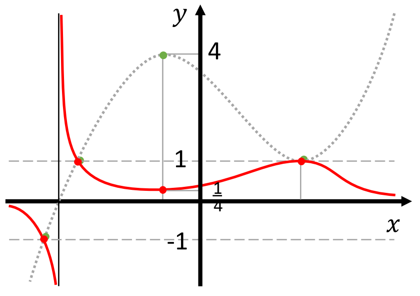
$$y = f(x)$$




Si applica la trasformazione all'ordinata di ciascun punto del grafico:

$$P(x, y) \quad \Rightarrow \quad P'(x, y')$$

$$f(x) \longmapsto \frac{1}{f(x)}$$



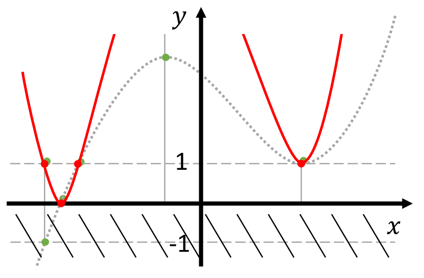

$y'$ ha lo stesso segno di $y$

$y \to 0 \quad \Rightarrow \quad y' \to \infty$

$y \to \infty \quad \Rightarrow \quad y' \to 0$

Punti fissi: $y = 0,\ y = \pm 1$

$$f(x) \longmapsto f^2(x)$$




$y'$ è sempre positivo

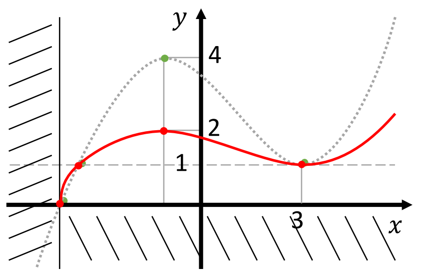
$0 < |y| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < y' < |y|$

$|y| > 1 \quad \Rightarrow \quad y' > |y|$

$y = -1 \quad \Rightarrow \quad y' = +1$

Punti fissi: $y = 0,\ y = 1$

$$f(x) \longmapsto \sqrt{f(x)}$$




$y'$ è sempre positivo

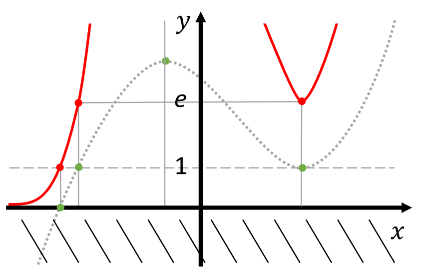
$y < 0 \quad \Rightarrow \quad y'$ non esiste

$0 < y < 1 \quad \Rightarrow \quad y < y' < 1$

$y > 1 \quad \Rightarrow \quad 1 < y' < y$

Punti fissi: $y = 0,\ y = 1$

$$f(x) \longmapsto e^{f(x)}$$




$y'$ è sempre positivo

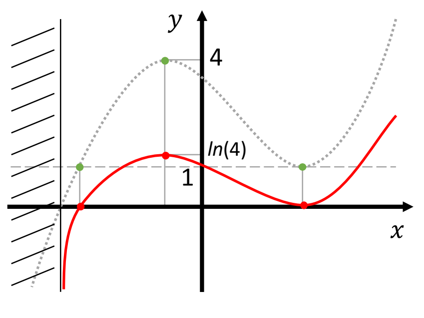
$y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = +1$

$y = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = e$

$y \to -\infty \quad \Rightarrow \quad y' \to 0$

Punti fissi: nessuno

$$f(x) \longmapsto \ln(f(x))$$




$y \leq 0 \quad \Rightarrow \quad y'$ non esiste

$0 < y < 1 \quad \Rightarrow \quad y' < 0$

$y > 1 \quad \Rightarrow \quad y' > 0$

$y \to 0 \quad \Rightarrow \quad y' \to -\infty$

$y = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = 0$

Punti fissi: nessuno